

Stokastiske Processer (E03)

Pensumliste

1. Palle Schmidt's bog "Stokastiske Processer":

Kapitel 1 afsnittene 1-7
Kapitel 2 afsnittene 1-6
Kapitel 3 afsnittene 1-3
Kapitel 4 afsnittene 1-2
Kapitel 5 afsnittene 1-2
Kapitel 6 afsnittene 1-5
Appendiks 6

2. Udleverede noter:

Kolmogorov's Konsistenssætning (Bevis)

Spørgsmål til mundlig eksamen:

1. Definition af en stokastisk proces (version, modifikation, uskelnelighed)
2. Kolmogorov's Konsistenssætning
3. Filtre og stoptider. Målelig proces. Hitting times
4. Processer med uafhængige, stationære tilvekster. Lévy processer
5. Markov processer. Chapman-Kolmogorov's ligninger
6. Lévy processer som Markov processer
7. Poissonprocessen
8. Brownsk Bevægelse
9. Doob's ulighed
10. Martingalmodifikationssætningen
11. Submartingalekonvergenssætningen. Uniformt integrable martingaler
12. Optional stopping og anvendelser

Definition af en stokastisk proces (Version, modification, ushkelnelighed)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, T indexmngd. $(\mathcal{F}_t)_{t \in T} \subseteq \mathcal{F}$ filte

$(X_t)_{t \in T}$ s.p. mht. $(\mathcal{F}_t)$ hvis $\forall t \in T$: X_t er $\mathcal{F}_t$ -mælelig.

Lad $(Y_t)_{t \in T}$ være en anden s.p. mht $(\mathcal{F}_t)$

(Y_t) er en version af (X_t) , hvis

$\forall \{t_1, \dots, t_n\} \subseteq T$: $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}) \sim (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$

(Y_t) er en modification af (X_t) , hvis

$\forall t \in T$: $P(X_t = Y_t) = 1$

(Y_t) og (X_t) er ushkelnelige hvis

$\exists N \in \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{F} \forall \omega \in N^c, t \in T$: $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$

Hvis T er tællelig dækker modification og ushkelnelighed over det samme, og vi kan betagte f.eks. $\limsup_t X_t > c$

Hvis (Y_t) er en version af (X_t) gælder

jvf. Kolmogorovs Konsistenssætning (Faktisk

Caratheodorys sætn.) at ss-målet genereret

af de marginale fædelinge er entydigt bestemt

Sæt $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), P)$, $P \sim \text{Exp}(1)$

Definer $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, $(I_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$

$$X_t(\omega) \equiv 0, \quad I_t(\omega) = 1_{\{t \leq P\}}(\omega), \quad Z_t(\omega) = 1_{\tilde{N}}(t, \omega)$$

$\tilde{N}$ ikke-Borel målelig deling af $(0, \infty)$ $\tilde{N} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}\}$



$$P(X_t = I_t = Z_t) = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

Der $(X_t), (I_t), (Z_t)$ er modifikationen

(X_t) har kont. udfaldsfht. (bedeligt)

Udfaldsfht. for $(I_t), (Z_t)$ er diskont. i et pkt.

$$A_X := \{\sup_t X_t > 1/2\}, \quad A_I := \{\sup_t I_t > 1/2\}$$

$$A_Z := \{\sup_t Z_t > 1/2\}$$

$$A_X = \emptyset, \quad A_I = \mathbb{R}_+, \quad A_Z = \mathbb{N} \quad (Z_t \equiv 0, t \notin \mathbb{N}, Z_t = 1_t \text{ ellers})$$

Hvis vi har nogle valg hvilke version af en proces skal vi så vælge?

V.h.j.a. tænkheden ved at gå fra diskret tid til kont. tid (hvor den diskrete tid er tæt i den kont. tid) er det klart at hvis udfaldsfht. er venstre / højrekont. er processens fadling bestemt af tælleligt mange X_t 'er

Martingalmodifikationsætningen:

Enhver martingal som er kont. i ss. har
en cadlag modifikation.

Overstående sætnings vigtighed i teorien
for Levy-processer (herunder Brownske bevægelser)

Kolmogorovs Konsistenssætning

Lemma (Korollar til prop. 4 i SEG 6 SS2-noter)

μ endeligt mål på $(S, \mathcal{B}(S))$, (S, d) polsk rum
Da er μ indre reguler mht. de kompakte mgd.:
 $\forall A \in \mathcal{B}(S): \mu(A) = \sup \{ \mu(K) \mid K \subseteq A, K \text{ kompakt} \}$

$P_{t_1, \dots, t_n}: S^T \rightarrow S^n$ $P_{t_1, \dots, t_n}(w) = (w(t_1), \dots, w(t_n))$
 $t_1, \dots, t_n \in T, w \in S^T$

$A \subseteq S^T$ kaldes en Borel-cylinder med base $M \in \mathcal{B}(S^n)$
ved koordinaterne $t_1, \dots, t_n \in T$ hvis $A = P_{t_1, \dots, t_n}^{-1}(M)$

$\mathcal{F}^T := \{ A \subseteq S^T \mid A \text{ er en Borel-cylinder} \}$

Da $S^T = P_t^{-1}(S)$, $t \in T$ og for $A_1 = P_{t_1, \dots, t_n}^{-1}(M_1)$

$A_2 = P_{s_1, \dots, s_m}^{-1}(M_2)$, $A_1 \cup A_2 = P_{t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_m}^{-1}(M_1 \times S^m \cup S^n \times M_2)$

$A_1^c = P_{t_1, \dots, t_n}^{-1}(M_1^c)$, dvs. $\mathcal{F}^T$ er en algebra

$\mathcal{B}^T := \sigma(\mathcal{F}^T)$

Theorem (Kolmogorovs konsistensætn.)

Antag $\forall \{t_1, \dots, t_n\} \subseteq T: \pi(t_1, \dots, t_n; \cdot) \in \mathcal{P}_r(S^n)$
opfylder:

1)

$$\pi(t_1, \dots, t_n, t_{n+1}; B \times S) = \pi(t_1, \dots, t_n; B),$$

hvor $\{t_1, \dots, t_{n+1}\} \subseteq T$, $B \in \mathcal{B}(S^n)$ er vilk.

2)

$$\pi(t_1, \dots, t_n; B_1 \times \dots \times B_n) = \pi(t_1, \dots, t_n; B_{i_1} \times \dots \times B_{i_n})$$

hvor $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq T$, $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(S)$ vilk. og $t_1, \dots, t_n; B_{i_1}, \dots, B_{i_n}$ permutati

Da gælder: $\exists! P_T \in \mathcal{P}_r(\mathcal{B}^T) \forall A \in \mathcal{F}^T: P_T(A) = \pi(t_1, \dots, t_n; M)$
 $, M \in \mathcal{B}(S^n): A = \pi_{t_1, \dots, t_n}^{-1}(M)$

Beweis:

Lad $A \in \mathcal{F}^T$ være givet, dvs. $\exists t_1, \dots, t_n \in T, M \in \mathcal{B}(S^n):$

$$A = \pi_{t_1, \dots, t_n}^{-1}(M)$$

$$\text{Def. } P_T: \mathcal{F}^T \rightarrow [0, 1] \quad P_T(A) = \pi(t_1, \dots, t_n; M)$$

P_T er veldef.:

$$\text{Antag } A = \pi_{t_1, \dots, t_n}^{-1}(M_1) = \pi_{s_1, \dots, s_m}^{-1}(M_2), M_1 \in \mathcal{B}(S^n), M_2 \in \mathcal{B}(S^m)$$

$$\{r_1, \dots, r_p\} = \{t_1, \dots, t_n\} \cup \{s_1, \dots, s_m\}$$

Jvf. 1) + 2) $\exists N_1, N_2 \in \mathcal{B}(S^p):$

$$\pi(t_1, \dots, t_n; M_1) = \pi(r_1, \dots, r_p; N_1), \pi(s_1, \dots, s_m; M_2) = \pi(r_1, \dots, r_p; N_2)$$

Antag $N_1 \neq N_2$ da er $\pi_{r_1, \dots, r_p}(N_1) \neq \pi_{r_1, \dots, r_p}(N_2)$ ∇

$$\text{Dvs. } \pi(t_1, \dots, t_n; M_1) = \pi(s_1, \dots, s_m; M_2)$$

P_T er endelig additiv på $\mathcal{F}^T$:

Antag $A, B \in \mathcal{F}^T$, $A \cap B = \emptyset$, dvs. $\exists t_1, \dots, t_n \in T$

$$\exists M_1, M_2 \in \mathcal{B}(S^n): A = P_{t_1, \dots, t_n}^{-1}(M_1), B = P_{t_1, \dots, t_n}^{-1}(M_2)$$

$$\text{Bm. } M_1 \cap M_2 = \emptyset, \text{ da } A \cap B = \emptyset$$

$$P_T(A \cup B) = \pi(t_1, \dots, t_n; M_1 \cup M_2)$$

$$\stackrel{M_1 \cap M_2 = \emptyset}{=} \pi(t_1, \dots, t_n; M_1) + \pi(t_1, \dots, t_n; M_2) = P_T(A) + P_T(B)$$

P_T er σ -additiv på $\mathcal{F}^T$:

Da for $(A_n) \subseteq \mathcal{F}^T$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$:

$$P_T\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P_T(A_i) + P\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} A_j\right)$$

ses, at hvis $B_n \downarrow \emptyset$: $P(B_n) \downarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ ($B_n \subseteq \mathcal{F}^T$, da er

P_T σ -additiv på $\mathcal{F}^T$,

Antag $\exists \varepsilon > 0$, $(B_n) \subseteq \mathcal{F}^T$, $B_n \downarrow \emptyset$: $P(B_n) \not\rightarrow 0 \varepsilon > 0$

$\exists (k_n) \in \mathbb{N}$ voksende, (M_n) , $M_n \in \mathcal{B}(S^{k_n})$, $n \geq 1$:

$$B_n = P_{t_1, \dots, t_{k_n}}^{-1}(M_n), n \geq 1$$

Jof lemmaet $\exists (K_n)$, $K_n \subseteq M_n$ kompakt, $n \geq 1$:

$$\pi(t_1, \dots, t_{k_n}; M_n \setminus K_n) < \varepsilon / 2^{n+1}$$

$$C_n := P_{t_1, \dots, t_{k_n}}^{-1}(K_n)$$

$$P_T(B_n \setminus C_n) = \pi(t_1, \dots, t_{k_n}; M_n \setminus K_n) < \varepsilon / 2^{n+1}$$

$$D_n := \bigcap_{i=1}^n C_i, n \geq 1 \quad (\text{bm. } D_n \in \mathcal{F}^T, \text{ da } \mathcal{F}^T \text{ er en algebra})$$

$$D_n \subseteq C_n \subseteq B_n$$

$$P_T(B_n \setminus D_n) = P_T(B_n \setminus \bigcap_{i=1}^n C_i) = P_T(\bigcup_{i=1}^n (B_n \setminus C_i))$$

$$\stackrel{(B_n) \text{ aft.}}{\leq} P_T(\bigcup_{i=1}^n B_i \setminus C_i) \leq \sum_{i=1}^n P_T(B_i \setminus C_i) < \epsilon/2$$

$$P_T(D_n) = P_T(B_n) - P_T(B_n \setminus D_n) > \epsilon/2, \quad n \geq 1$$

Dvs. (da $D_n \neq \emptyset, n \geq 1$) $\exists (w_n) \subseteq S^T : w_n \in D_n, n \geq 1$

$(w_n) \subseteq C_1$, dvs. $\forall n \geq 1: (w_n(t_1), \dots, w_n(t_{k_1})) \in K_1$

Da K_1 er kompakt har $(w_n(t_1), \dots, w_n(t_{k_1}))$ en konvergent delfølge med grænseværdi i K_1

$(w_n)_{n \geq m} \subseteq C_m$ så et induktionsbevis giver at

$\exists (w_n)$ delfølge af (w_n) så $\forall m \geq 1$:

$(w_n(t_1), \dots, w_n(t_{k_m}))$ er konvergent med grænseværdi i K_m

Vælg $w \in S^T : (w(t_1), \dots, w(t_{k_n}))$ er den ovenfor omtalte grænseværdi, $n \geq 1$, da (k_n) er voksende er eksistensen af w klar, dvs.

$$w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n, \text{ men } B_n \downarrow \emptyset \quad \text{?}$$

Af Caratheodorys sætn. følger (da $\mathcal{F}^T$ er en algebra) at der eksisterer en entydigt bestemt udvidelse af P_T til $\mathcal{B}^T$

□

Korollar

Hvis vi har et system af ss-mål som opfylder betingelserne i sætningen, da eksisterer en s.p. som har de givne ss-mål som marginale fordelinger.

Bevis:

Betragt (S^T, B^T, P_T)

sæt $X_t: S^T \rightarrow S$ $X_t(\omega) = p_t(\omega)$

Da $p_t^{-1}(B) \in B^T$, $B \in \mathcal{B}(S)$ pr. def. af B^T er

X_t mælig og da $P((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B)$

$= P_T(p_{t_1}, \dots, p_{t_n}^{-1}(B)) = \pi(t_1, \dots, t_n; B)$ har vi vist det ønskede $\square$

Filtre og stoptid, Målig proces, Hitting Times

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $T = \mathbb{R}_+$ d. $T = \mathbb{Z}_+$

$(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ er et filter hvis $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ $s \leq t$

$\tau: \Omega \rightarrow T$ er en stoptid, hvis $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, denne er målig mht $\mathcal{F}_\tau = \{B \in \mathcal{F}_\infty \mid B \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, t \in T\}$

τ udvidet stoptid, hvis $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+} \iff \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$

$\tau_B: \Omega \rightarrow T$, $\tau_B := \inf \{t > 0, X_t \in B\}$, $B \subseteq \mathbb{R}_+$
er en Hitting Time for (X_t) s.p.

Proposition: Hvis (X_t) har begrænset udfaldsplet, så er τ_B en udvidet stoptid

Basis: $\{\tau_B < t\} = \bigcup_{0 < s < t} \{X_s \in B\} \in \mathcal{F}_t \quad \square$

Proposition: Hvis (X_t) har kont. udfaldsplet., $B = [b, \infty)$
 τ_B stoptid:

Basis: $\{\tau_B \leq t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\sup_{s \in [0, t] \cap \mathbb{Q}} X_s \geq b\} \in \mathcal{F}_t$

Bm. vi benytter at kont. plet. outager max på lukkede int.
og sup af tælleligt mange $\mathcal{F}_t$ -målig s.v. er $\mathcal{F}_t$ -målig $\square$

(X_t) s.p. siges at være målig hvis $(T = \mathbb{R}_+)$
 $(t, \omega) \mapsto X(t, \omega)$ er $(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}, \mathcal{B})$ -målig

Hvis (X_t) er mækelig er $\omega \mapsto (X_{t\omega})$ mækelig
 hvis τ er en stopetid, dvs. X_τ er mækelig (sammensætn.
 af mækelige afbildninger) Men X_τ er ikke nødvendigvis
 $\mathcal{F}_\tau$ -mækelig:

(X_t) siges at være progressivt mækelig, hvis

$X(t, \omega)|_{t \in [0, c]} \in (\mathcal{B}([0, c]) \otimes \mathcal{F}_c, \mathcal{B})$ -mækelig $c \in \mathbb{R}_+$

(Udfra SS2 ses at prog. mælighed $\Rightarrow$ mælighed)

(X_t) s.p. τ stopetid

Lemma: $X_t 1_{t \leq \tau \leq \infty}$ er $\mathcal{F}_t$ -mækelig $\iff \forall c \in \mathbb{R}_+ : X_{t \wedge c}$ er $\mathcal{F}_c$ -mækelig

Beweis:

$\{T < \infty, X_T \in B\} \in \mathcal{F}_T \stackrel{\text{def. på } \mathcal{F}_T}{\iff} \{T < \infty, X_T \in B, T \leq c\} \in \mathcal{F}_c, \forall c \in \mathbb{R}_+$
 $\iff \{T \leq c, X_{T \wedge c} \in B\} \in \mathcal{F}_c, \forall c \in \mathbb{R}_+ \iff \{X_{T \wedge c} \in B\} \in \mathcal{F}_c$, da
 $\{T > c, X_{T \wedge c} \in B\} = \{T > c, X_c \in B\} \in \mathcal{F}_c \quad \square$

Sætning: τ stopetid, (X_t) progressivt mækelig proces

1) τ er mækelig mht $\mathcal{F}_t$ 2) $X_t 1_{t \leq \tau \leq \infty}$ er $\mathcal{F}_t$ -mækelig

Beweis:

1) trivial udfra def på τ , $\mathcal{F}_t$

2)

$T \wedge c$ er $\mathcal{F}_c$ -mækelig ($\{T \wedge c \leq a\} = \{T \wedge c \leq a \wedge c\} \in \mathcal{F}_{a \wedge c} \in \mathcal{F}_c$)

Dvs. $\omega \mapsto (T(\omega) \wedge c, \omega) \in (\mathcal{F}_c, \mathcal{B}([0, c]) \otimes \mathcal{F}_c)$ -mækelig

$(t, \omega) \mapsto X(t, \omega)$ er pr. antagelse $(\mathcal{B}([0, c]) \otimes \mathcal{F}_c, \mathcal{B})$ -mækelig
 $\uparrow$
 $[0, c] \times \Omega$

Dvs. pr. sammensætning af mækelige fkt. er $X_{T \wedge c}$ $\mathcal{F}_c$ -mækelig

$\square$

Sætning: (X_t) s.p. alle udfaldsfkt. højereordet på $\mathbb{R}_t$

Da er (X_t) progressivt uafhængig (mht. $(\mathcal{F}_t)$)

Beweis:

$$X_t^n(t, \omega) := 1_{\{0\}}(t) \cdot X(0, \omega) + \sum_{j=1}^n 1_{\left[\frac{j-1}{n}c, \frac{j}{n}c\right]}(t) X\left(\frac{j}{n}c, \omega\right)$$

$X_t^n(t, \omega) \sim$ klart $\mathcal{F}_c$ -uafhængig (afhælder t)

Dvs. $(t, \omega) \mapsto X_t^n(t, \omega) \sim (B(\mathcal{C}(c)) \otimes \mathcal{F}_c, \mathcal{B})$ -uafhængig
 $\uparrow$
 $\{0, c\} \times \mathbb{R}$

$X_t^n(t, \omega) \xrightarrow{\text{p.p.}} X_{t \wedge c}(\omega)$, pga. højereordet, dvs.

jvf. SS2 er (X_t) progressivt uafhængig

□

Processer med uafh. stationære tilvækste, Levy processer

$(X_t)_{t \in T}$ s.p. har uafh. stationære tilvækste, hvis

1)

$$X_0, X_{t_1} - X_0, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \text{ uafh}$$

$$0 < t_1 < \dots < t_n$$

2)

$$X_t - X_s \sim X_{t-s}, \quad s < t$$

$\forall$ se p. $T = \mathbb{Z}_+$ d. $\mathbb{R}_+$

For $T = \mathbb{Z}_+$ ses at (X_t) er summe af iid.

$(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ Levy-proces mht. $(F_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$

1)

$\forall 0 \leq s < t$: Fordelingen $X_t - X_s$ afh. kun af $t-s$

2)

$$\forall t \in \mathbb{R}_+: F_t \perp \sigma(\{X_u - X_t \mid u \geq t\})$$

3)

Alle udfaldsft. er højrekont.

Sætning

$(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ s.p. m. uafh. stationære tilvælst, $\exists p \geq 1 : (X_t)$ L^p -kont.

Da eksisterer en modifikation af (X_t) som er
en Levy-proces mht. $(\mathcal{F}_t^X)$ med cadlag udfoldfunktion,
som er begrænset på begrænsede intervaller.

Bewis:

$$f(t) := E[X_t - X_0] , t \in \mathbb{R}_+$$

Da $f(s+t) = f(s) + f(t)$, $s, t \in \mathbb{R}_+$ og

$$|f(s) - f(t)| = |E[X_s - X_t]| \leq E[|X_s - X_t|] \leq \|X_s - X_t\|_p \xrightarrow{s \rightarrow t} 0$$

er $\exists \mu \in \mathbb{R}_+ : f(t) = \mu t = E[X_t] - E[X_0]$, $t \in \mathbb{R}_+$ (*)

(*) gælder for $t \in \mathbb{Q}$ p.v. induktion

$$\text{Dvs } E[X_t] = \mu t + E[X_0] , t \in \mathbb{R}_+$$

$$E[X_t - \mu t - E[X_0] | \mathcal{F}_s^X]$$

$$= E[X_t - X_s - \mu(t-s) + X_s - \mu s - E[X_0] | \mathcal{F}_s^X]$$

$$\stackrel{\text{uafh.}}{=} E[X_t - X_s] - \mu(t-s) + X_s - \mu s - E[X_0] = \underbrace{X_s - \mu s - E[X_0]}_{\text{stationær tilvælst}}$$

Dvs, $(X_t - \mu t - E[X_0])_{t \in \mathbb{R}_+}$ er en martingal mht. $(\mathcal{F}_t^X)$

som er L^p -kont. , idet $\|X_t - \mu t - E[X_0] - X_s + \mu s + E[X_0]\|_p$
 $\stackrel{p \geq 1}{\leq} \|X_t - X_0\|_p + |\mu(t-s)|$, af martingal modifikations sætn.

følger det ønske

□

Eksempler på Levy-processer:

Poisson + Brownisk bevægelse (*)

Enhver Levy-proces er en komb. af (*) (se p. 11)

Proces med uafh. tilvækst er Markov med
transitionsfunktion $(P_{ts})_{0 \leq t \leq s}$

$$P_{ts}(x, A) = P(X_s - X_t + x \in A) = P_{X_s - X_t}(A - x)$$

Hvis processen yderligere har stationære tilvækst er
den Markov med tidshomogen transitionsfkt. $(P_t)_{t \geq 0}$

$$P_t(x, A) = P(X_t - X_0 + x \in A) = P_{X_t - X_0}(A - x)$$

Markov processer, Chapman-Kolmogorovs ligninger

$$(X_t)_{t \in T}, T = \mathbb{Z}_+ \text{ el. } T = \mathbb{R}_+$$

Definition.: (X_t) markovproces mht. $(\mathcal{F}_t)$, hvis

$$P(X_t \in B | X_s) = P(X_t \in B | \mathcal{F}_s) \quad 0 \leq s \leq t$$

$$\Leftrightarrow E[Z | X_s] = E[Z | \mathcal{F}_s], Z \text{ begrænset } \mathcal{F}_s\text{-målig}$$

monoton klasse
lemma

Fortolkning: Fremtiden er uafhængig af fortiden

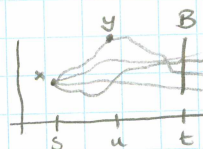
$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+, B \in \mathcal{B} \exists P_{st} \text{ markovkerne: } P_{st}(X_s, B) = P(X_t \in B | X_s) \text{ n.o.}$$

$P_{st}(x, B)$ tolkes som overgangss. : ss for at komme fra x til tid s til B til tid t , $P_{st}(x, B)$ er entydigt bestemt p.n.o., dvs. hvis $\forall B \in \mathcal{B}$:
 $\tilde{P}_{st}(X_s, B) = P(X_t \in B | X_s) \exists N \in \mathcal{B}, P(X_s \in N) = 0 \quad \forall x \in N^c, B \in \mathcal{B}: \tilde{P}_{st}(x, B) = P_{st}(x, B)$

Chapman-Kolmogorovs ligninger

$s < u < t$, $\exists N \in \mathcal{B}, P(X_s \in N) = 0 \quad \forall x \in N^c, B \in \mathcal{B}$:

$$P_{st}(x, B) = \int P_{ut}(y, B) P_{su}(x, dy) = (P_{su} \circ P_{ut})(x, B)$$



Beweis:

$$P_{st}(X_s, B) = P(X_t \in B | X_s) \stackrel{\text{Markov}}{=} P(X_t \in B | \mathcal{F}_s)$$

$$= E[P(X_t \in B | \mathcal{F}_u) | \mathcal{F}_s] \stackrel{\text{Markov}}{=} E[P(X_t \in B | X_u) | \mathcal{F}_s]$$

$$= E[\underbrace{P_{ut}(X_u, B)}_{\text{begrænset}} | \mathcal{F}_s] \stackrel{\text{Markov}}{=} E[\underbrace{P_{ut}(X_u, B)}_{\text{begrænset}} | X_s]$$

$$\stackrel{\text{app. (8.7)}}{=} \int P_{ut}(y, B) P_{su}(x, dy) \Big|_{x=X_s} = (P_{su} \circ P_{ut})(X_s, B)$$

Altså er $P_{su} \circ P_{ut}$ en regular betinget fordeling for X_t givet X_s , de følger det ønskede

□

Sætning:

En Markov proces' marginale fordelinger er bestemt ved begyndelsesfordelingen P_{X_0} og overgangss. $(P_{ot})_{0 \leq s < t}$

$$P(X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n) = \int_S \int_{B_1} \dots \int_{B_n} P_{t_{n-1}t_n}(x_{n-1}, dx_n) \cdot P_{0t_1}(x_0, dx_1) P_{X_0}(dx_0)$$

Beweis:

Vi vil pr. induktion vise at $\forall n \geq 1$; f begrænset $\mathcal{F}^{X_1, t_n}$ -målelig
 $E[\prod_{i=1}^n 1_{B_i}(X_{t_i}) f(X_{t_n})] = \int_S \int_{B_1} \dots \int_{B_n} f(x_n) P_{t_{n-1}t_n}(x_{n-1}, dx_n) \cdot P_{0t_1}(x_0, dx_1) P_{X_0}(dx_0)$

$n=1$:

$$E[1_{B_1}(X_{t_1}) f(X_{t_1})] = E[E[1_{B_1}(X_{t_1}) f(X_{t_1}) | \mathcal{F}_{X_0}]] \\ = \int_S \int_{B_1} f(x_1) P_{0t_1}(x_0, dx_1) P_{X_0}(dx_0)$$

appendix
6.7

$n \geq 1$:

Antag påstanden sand for $n-1$

$$E[\prod_{i=1}^n 1_{B_i}(X_{t_i}) f(X_{t_n})] = E[\prod_{i=1}^{n-1} 1_{B_i}(X_{t_i}) E[1_{B_n}(X_{t_n}) f(X_{t_n}) | \mathcal{F}_{t_{n-1}}]] \\ = E[\prod_{i=1}^{n-1} 1_{B_i}(X_{t_i}) E[1_{B_n}(X_{t_n}) f(X_{t_n}) | \mathcal{F}_{t_{n-1}}]]$$

Markov
egenskab

$$= E[\prod_{i=1}^{n-1} 1_{B_i}(X_{t_i}) \underbrace{\int_{B_n} f(x_n) P_{t_{n-1}t_n}(x_{n-1}, dx_n)}_{\text{begrænset}}]$$

appendix
6.7

$$= \int_S \int_{B_1} \dots \int_{B_n} f(x_n) P_{t_{n-1}t_n}(x_{n-1}, dx_n) P_{t_{n-2}t_{n-1}}(x_{n-2}, dx_{n-1}) \cdot P_{0t_1}(x_0, dx_1) P_{X_0}(dx_0)$$

induktion

□

Lévy-process som markovprocess med tidskontinuerlig
transitionsfkt.

Levy processer som Markov processer

Definition

$(P_t)_{t \geq 0}$ tidshomogen transitionsfkt., hvis

a) P_t markovkerne på $(S, \mathcal{B})$ $P_0 = 1_B(x)$ (identitetskerne)

b) $P_{t+s} = P_s \circ P_t$, $s, t \geq 0$

((P_t) kaldes pga. b) ofte en transitionssemigruppe)

Definition:

$(X_t)_{t \geq 0}$ s.p. siges at være Markov med (F_t) , med tidshomogen transitionsfkt., hvis

1) $(P_t)_{t \geq 0}$ tidshomogen transitionsfkt.,

2) (X_t, F_t) er en Markov proces

3) $\forall f \in b\mathcal{B}(S)$: $E[f(X_t) | F_s] = P_{t-s}(f(X_s))$ n.o. $0 \leq s \leq t$

Sætning: Hvis (X_t, F_t) har uafh. stationære tilvælst er den Markov med tidshomogen transitionsfkt.

(P_t) , $P_t(x, B) = P(X_t - X_0 + x \in B) = P_{X_t - X_0}(B - x)$

Beweis:

$P_t(x, B) = \int_{B-x} dP_{X_t - X_0}$ er for fast B målelig jf.

Fubini, $P_t(x, S) = 1$ og σ -additivitet for fast x

følge af sætn. om monoton konvergens, dvs. $P_t(x, B)$ er en Markov kerne

$$P_0(x, B) = P(\bar{X}_0 - \bar{X}_0 + x \in B) = 1_B(x)$$

$$P_{s+t}(x, B) = P(\bar{X}_{s+t} - \bar{X}_0 + x \in B)$$

$$= P(\bar{X}_{s+t} - \bar{X}_s + \bar{X}_s - \bar{X}_0 + x \in B)$$

$$= E[1_B(\bar{X}_{s+t} - \bar{X}_s + \bar{X}_s - \bar{X}_0 + x \in B)]$$

$$= E[E[1_B(\bar{X}_{s+t} - \bar{X}_s + y)]]_{y=\bar{X}_s - \bar{X}_0 + x}$$

nythig
regul + unfl.

$$= \int P(\bar{X}_{s+t} - \bar{X}_s + y \in B) P_{\bar{X}_s - \bar{X}_0 + x}(dy)$$

$$= \int P(\bar{X}_t - \bar{X}_0 + y \in B) P_{\bar{X}_s - \bar{X}_0 + x}(dy)$$

stationar
ti-ahit

$$= \int P_t(y, B) P_s(x, dy) = P_s \circ P_t(x, B)$$

$$P(\bar{X}_t \in B | \mathcal{F}_s) = P(\bar{X}_t - \bar{X}_s + \bar{X}_s \in B | \mathcal{F}_s)$$

$$= E[1_B(\bar{X}_t - \bar{X}_s + \bar{X}_s) | \mathcal{F}_s]$$

$$= E[1_B(\bar{X}_t - \bar{X}_s + y)]_{y=\bar{X}_s} = E[1_B(\bar{X}_t - \bar{X}_s + \bar{X}_s) | \bar{X}_s]$$

nythig
regul nythig
regul
nythig

$$= P(\bar{X}_t \in B | \bar{X}_s), \text{ dvs. } (\bar{X}_t) \text{ er en Markov proces}$$

$$P(\bar{X}_t \in B | \bar{X}_s) = P(\bar{X}_t - \bar{X}_s + \bar{X}_s \in B | \bar{X}_s) = P(\bar{X}_t - \bar{X}_s + y \in B)_{y=\bar{X}_s}$$

nythig
regul
nythig

$$= P_{t-s}(y, B)_{y=\bar{X}_s} = P_{t-s}(\bar{X}_s, B), \text{ dvs. } P_{t-s} \text{ er en}$$

reguler betinget fadeling for $\bar{X}_t$ givet $\bar{X}_s$ af appendix 8.7 følger.

$$\forall f \in bB(S): E[f(\bar{X}_t) | \mathcal{F}_s] = E[f(\bar{X}_t) | \bar{X}_s] = P_{t-s}(f(\bar{X}_s))$$

Markov
egenskab *

□

Eksempel :

Poisson , Brownske bevægelse

Poissonprocessen

Definition

En Poissonproces er en s.p. $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$

- 1) Værdifunktionen er voksende og højrekont., $N_0 = 0$ n.o.
- 2) (N_t) har uafh. stationære tilvækst
- 3) $N_t \sim \text{Po}(\lambda t)$, $P(N_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Sætning: Der eksisterer en s.p. $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ med de ovennævnte egenskaber.

Beweis:

Def. $\forall 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, $0 = k_0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_n$

$$\pi(t_1, \dots, t_n; k_1, \dots, k_n) := \prod_{i=1}^n \text{Po}(\lambda(t_i - t_{i-1}); k_i - k_{i-1})$$

Vi ser, at ovenstående er en tæthedsfkt. med massen koncentreret på $\{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n \mid k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n\}$

$$\begin{aligned} \pi(t_1, \dots, t_n; k_1, \dots, k_{j-1}, \mathbb{Z}_+, k_{j+1}, \dots, k_n) \\ = \sum_{k_j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n \text{Po}(\lambda(t_i - t_{i-1}); k_i - k_{i-1}) \\ = \sum_{k_j=k_{j-1}}^{k_{j+1}} \prod_{i=1}^n \text{Po}(\lambda(t_i - t_{i-1}); k_i - k_{i-1}) = \pi(t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_n; k_1, \dots, k_{j-1}, k_{j+1}, \dots, k_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{da } \sum_{k_j=k_{j-1}}^{k_{j+1}} \text{Po}(\lambda(t_j - t_{j-1}); k_j - k_{j-1}) \text{Po}(\lambda(t_{j+1} - t_j); k_{j+1} - k_j) \\ =_{\text{uafh.}} \text{Po}(\lambda(t_{j+1} - t_{j-1}); k_{j+1} - k_{j-1}) \end{aligned}$$

Dvs. betingelsen i Kolmogorovs konsistenssætning er opfyldt

Dus. $\exists (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ s.p., $t_1 < \dots < t_n$, $k_1, \dots, k_n$

$$P(X_{t_1} = k_1, \dots, X_{t_n} = k_n) = \prod_{i=1}^n P_0(\lambda(t_i - t_{i-1}); k_i - k_{i-1}), \quad k_0 = t_0 = 0$$

Vi ser, at $X_0 = 0$ i.o., $X_t \sim P_0(\lambda t)$

$$P(X_{t_1} - X_0 = v_1, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = v_n)$$

$$= P(X_{t_1} = v_1, \dots, X_{t_n} = v_1 + \dots + v_n) = \prod_{i=1}^n P_0(\lambda(t_i - t_{i-1}); v_i)$$

Dus. $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ ene er uafh. og $X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \sim P_0(\lambda(t_i - t_{i-1}))$

Vi vil nu finde en modification af (X_t) som har de ønskede egenskaber (voksende og højekont. udfaldsfkt.)

$$N := \bigcup_{\substack{r \leq s \\ r, s \in \mathbb{Q}}} \{\omega \mid X_s(\omega) - X_r(\omega) < 0\}$$

$$P(N) = 0, \text{ da } X_s - X_r \sim P_0(\lambda(s-r))$$

$(X_t)_{t \in \mathbb{Q}}$ har voksende udfaldsfkt. på N^c

Dus. $N_t(\omega) = \lim_{t_n \in \mathbb{Q} \downarrow t} X_{t_n}(\omega)$ er veldef. på N^c , $N_t = 0$ eller

Da $X_t \in \mathbb{Z}_+$: $N_t \in \mathbb{Z}_+$ dette medfører bl.a.

$$\forall \omega \in N^c, t \in \mathbb{R}_+ \exists h > 0 \forall s \in (t, t+h) \cap \mathbb{Q}: X_s(\omega) = X_t(\omega)$$

$\Downarrow$ pr. def. af (N_t)

$$\forall \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}_+ \exists h > 0 \forall s \in (t, t+h): N_s(\omega) = N_t(\omega)$$

Dus. (N_t) er voksende og højekont.

Lad $t \in \mathbb{R}_+$ være vilk., $t_n \in \mathbb{Q} \downarrow t$

$$E|N_t - X_t| = E|\lim_{n \rightarrow \infty} X_{t_n} - X_t| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E|X_{t_n} - X_t|$$

$= \liminf_n \lambda(t_n - t) = 0$, dus. N_t er en modification af (X_t) og dermed har (N_t) alle de ønskede egenskaber $\square$

Egenskaber ved Poissonprocessen:

Simple (spring på 1) ikke eksplosiv (rentetiden på $N_t = \infty$ er ∞ n.o.) tælleproces (hvilket også karakteriserer en Poissonproces)

Man kan gå til en multithomical model ved at betragte med samlede antal til tid t og så se på delintervaller af $[0, t]$

Afstanden mellem springtidspunkterne er $\sim \text{Exp}(\lambda)$ og uafh.

(Enlevyprocess kan skrives som Poisson + Brownish m. drift)

Brownsk Bevægelse

Definition

Hvis $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ er en s.p. således

- 1) $W_t \sim N(0, t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ ($W_0 = 0$ n.o.)
- 2) (W_t) har uafh. stationære tilvækste
- 3) (W_t) har kont. udfaldsfkt.

da siges (W_t) at være en Standard Brownsk Bevægelse (Wienerproces)

Sætning: Der eksisterer en s.p. med de ovennævnte egenskaber

Bevis:

$$t_1 < \dots < t_n, \text{ sæt } \Sigma = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

$$\pi(t_1, \dots, t_n; B) = \int_B f_{N_n(0, \Sigma)}(\underline{x}) d\underline{x} \quad (*)$$

Jf. regnearkne for den n -dimensionale normalfordeling ses at $(*)$ opfylder betingelserne i Kolmogorovs konsistenssætning, dvs. $\exists (X_t)_{t \geq 0} : X_t \sim N(0, t)$ og

$$(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \sim N_n(0, A \Sigma A')$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad A \Sigma A' = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ 0 & t_2 - t_1 & \dots & t_2 - t_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_n - t_{n-1} \end{pmatrix} A' = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \dots & 0 \\ t_2 - t_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_n - t_{n-1} \end{pmatrix}$$

Dvs. $(X_t)_{t \geq 0}$ har uafh. stationære tilvækste

Sæt $X_0 = 0$ n.o.; da opfylder $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 1) og 2)

$$\|X_t - X_s\|_2^2 = \|X_{t-s}\|_2^2 = (t-s)^2 \text{ dermed er } (X_t) \text{ } L^2\text{-kont.}$$

af sætn. i kap 2 følg at der eksisterer en modification $(\tilde{X}_t)$ af (X_t) så $(\tilde{X}_t)$ opfylder 1) og 2) og har cadlag udfaldsfkt.

Sæt $W_t = X_t' 1_{C_X}$

$$C_X = \{\omega \mid X_t'(\omega) \in C^0(\mathbb{R}_+)\}$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \mid X_t'(\omega) \text{ uniformt kont. p\u00e5 } [0, n]\}$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \mid \forall m \geq 1 \exists k \geq 1 \forall s, t \in [0, n] : |t-s| < 1/k \Rightarrow |X_t'(\omega) - X_s'(\omega)| < 1/m\}$$

hejkont.,
$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\omega \mid \forall s, t \in [0, n] \cap \mathbb{Q} : |t-s| < 1/k \Rightarrow |X_t'(\omega) - X_s'(\omega)| < 1/m\}$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{\substack{s, t \in [0, n] \cap \mathbb{Q} \\ |t-s| < 1/k}} \{\omega \mid |X_t'(\omega) - X_s'(\omega)| < 1/m\} \in \sigma(X_t', t \in \mathbb{Q}_+) \subseteq \mathcal{F}$$

Hvis $P(C_X) = 1$ er (W_t) en modification af X_t' med egenskaberne 1) - 3)

$$C_X^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{s, t \in [0, n] \cap \mathbb{Q} \\ |t-s| < 1/k}} \{\omega \mid |X_t'(\omega) - X_s'(\omega)| \geq 1/m\}$$

$$\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^k n} \{\omega \mid |X_{i/2^k}' - X_{(i-1)/2^k}'| \geq 1/m\}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{2^k n} \{\omega \mid |X_{i/2^k}' - X_{(i-1)/2^k}'| \geq 1/m\}\right) \leq \sum_{i=1}^{2^k n} P(|X_{i/2^k}'| \geq 1/m)$$

Markov
$$\leq 2^k n m^4 E[|X_{i/2^k}'|^4] = \text{konstant} \cdot 2^k \cdot \left(\frac{1}{2^k}\right)^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Da $E[|X_{i/2^k}'|^4]$ er proportional med $(1/2^k)^2$

□

Egenskaber ved Brownsk Bev\u00e6gelse:

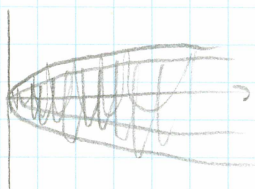
Kont. men af ubegr\u00e6nset variation og intetsteds diff.

Levy-process = Poisson + Brownsk m. drift. $\rightarrow$ Markov

$$\frac{W_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad (\text{da } t W_{1/t} \text{ er Brownsk Bev. l\u00e6d } t \rightarrow 0)$$

Enhver h\u00e5nd\u00e6ndelse sker med ss. 1 el 0.

L\u00f8s om it\u00e6rnde logaritme



Doobs ulighed

Sætning

$(X_t)_{t \geq 0} \in L^p, p > 1$ submartingal: $\| \sup_{t \geq 0} X_t \|_p \leq q \sup_{t \geq 0} \|X_t\|_p$

(q konjugeret til p , dvs. $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \Rightarrow q = \frac{p}{p-1}$)

Antag at udfaldsfilen er højrekont.

Bevis:

Ist. SS2 gælder $\forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+, \lambda > 0$

$$\lambda P(\max_i X_{t_i} \geq \lambda) \leq \int_{\{\max_i X_{t_i} \geq \lambda\}} X_{t_n} dP$$

$$\| \max_i X_{t_i} \|_p^p = \int_0^\infty P((\max_i X_{t_i})^p \geq \lambda) d\lambda$$

$$= \int_0^\infty P(\max_i X_{t_i} \geq \lambda^{1/p}) d\lambda \leq \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^{1/p}} \int_{\{\max_i X_{t_i} \geq \lambda^{1/p}\}} X_{t_n} dP d\lambda$$

$$\stackrel{\text{Tonelli-Fubini}}{=} \int X_{t_n} \int_0^\infty 1_{\{\max_i X_{t_i} \geq \lambda^{1/p}\}} \frac{1}{\lambda^{1/p}} d\lambda dP$$

$$= \int X_{t_n} \int_0^{(\max_i X_{t_i})^p} \frac{1}{\lambda^{1/p}} d\lambda dP = \int X_{t_n} (1 - 1/p)^{-1} (\max_i X_{t_i})^{p \cdot (1 - 1/p)} dP$$

$$\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} q \|X_{t_n}\|_p \| \max_i X_{t_i} \|_q^{p/q} = q \|X_{t_n}\|_p \| \max_i X_{t_i} \|_p^{p/q}$$

$$\Downarrow (X_t) \in L^p \Rightarrow \max_i X_{t_i} \in L^p$$

$$\| \max_i X_{t_i} \|_p \leq q \|X_{t_n}\|_p \leq q \sup_{t \geq 0} \|X_t\|_p$$

$\Downarrow$ Valg $(t_i) = \mathbb{Q}_+$ + monoton konvergens

$$\| \sup_{t \in \mathbb{Q}_+} X_t \|_p \leq q \sup_{t \geq 0} \|X_t\|_p$$

Men $\mathbb{Q}_+$ er tæt i $\mathbb{R}_+$ $\forall \omega \in \Omega \exists (t_n) \in \mathbb{Q}_+ : \sup_{t \geq 0} X_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{t_n}(\omega)$
idet $X_t(\omega)$ er antaget højrekont.

$$\text{Dvs. } \sup_{t \in \mathbb{Q}_+} X_t = \sup_{t \geq 0} X_t \Rightarrow \| \sup_{t \geq 0} X_t \|_p \leq q \sup_{t \geq 0} \|X_t\|_p$$

□

Doob's ulighed giver at et submartingal
i LP med begrænset udfaldsfelt, er U.I. hvis
dets LP-norm er begrænset.

Martingalmodifikationsæbning

Sætning:

$1 \leq p < \infty$, $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \subseteq L^p$ submartingal (mht. $(\mathcal{F}_t)$)
 $t \mapsto X_t$ kontinuert i L^p

Da gælder, at der eksisterer en modifikation $(\tilde{X}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ så

- 1) Udfaldsfunktionerne for $(\tilde{X}_t)$ er cadlag
- 2) Udfaldsfunktionerne er begrænsede på begrænsede intervaller
- 3) $(\tilde{X}_t, \bar{\mathcal{F}}_{t+})$ er et submartingal

Beweis:

Jvf. sætn. om opkrydsninger er

$$\forall n \geq 1, a, b \in \mathbb{Q}, a < b : \bigcup_{t \in [0, n] \cap \mathbb{Q}} U(\cdot, [0, n] \cap \mathbb{Q}, [a, b]) < \infty \text{ n.o.} \quad (1)$$

Jvf. maximaluligheder er

$$\forall n \geq 1 : \inf_{t \in [0, n] \cap \mathbb{Q}} X_t > -\infty \text{ n.o.}, \quad \sup_{t \in [0, n] \cap \mathbb{Q}} X_t < \infty \text{ n.o.} \quad (2)$$

Af nogle limsup/liminf overvejelser følger, at

$$X_t^h(\omega) = \lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \in \mathbb{Q}}} X_s(\omega) \text{ er veldef. for n.a. } \omega \text{ og}$$

$X_t^h(\omega)$ er cadlag på dens def.-mængde og beg. på beg. int.

$$\text{Sæt } N = \bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{\substack{a, b \in \mathbb{Q} \\ a < b}} \{(1) \text{ og } (2) \text{ ikke opfyldt}\} \in \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{F}$$

$$\text{Definer } \tilde{X}_t := X_t^h 1_{N^c} = \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s \geq t \\ s \in \mathbb{Q}}} X_s 1_{N^c} \leftarrow \bar{\mathcal{F}}_{t+} \text{ m\u00e5kelig}$$

Dus. $(\mathbb{F}_t)$ opfylder 1) + 2)

Lad $s < t$ $s < \dots < s_n < \dots < s_1 < s_0 < t < \dots < t_n < \dots < t_1 < t_0$

$(X_{s_n}), (X_{t_n})$ er baglæns submartingaler

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_{s_n}] \geq E[X_s] > -\infty, \quad s_n \downarrow s$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_{t_n}] \geq E[X_t] > -\infty, \quad t_n \downarrow t$$

Dus. $(X_{s_n}), (X_{t_n})$ er U.I. (sætn. s. 8 i kap. 5)

$$\begin{aligned} \forall A \in \bar{\mathcal{F}}_{s+} : \quad & \int_A X_{s_n} dP \leq \int_A E[X_{t_n} | \mathcal{F}_{s_n}] dP = \int_A X_{t_n} dP \\ & \quad \downarrow \text{U.I.} \qquad \qquad \qquad \downarrow \text{U.I.} \\ & \int_A X_s^h dP \leq \int_A X_t^h dP \\ & \quad \parallel \qquad \qquad \qquad \parallel \\ & \int_A \mathbb{I}_s dP \leq \int_A \mathbb{I}_t dP \\ & \qquad \qquad \qquad \parallel \\ & \qquad \qquad \int_A E[\mathbb{I}_t | \bar{\mathcal{F}}_{s+}] dP \end{aligned}$$

Dus. $\mathbb{I}_s \leq E[\mathbb{I}_t | \bar{\mathcal{F}}_{s+}]$ dus. $(\mathbb{I}_t, \bar{\mathcal{F}}_{t+})$ er et submartingal, altså er 3) opfyldt.

□

Men generelt gælder ovenstående ved kont. i ss.

og lignende sætn. kan formuleres, men vi istedet for LP-kont har at $(\mathbb{F}_t)$ er højekont, (dus. $\bar{\mathcal{F}}_t = \bar{\mathcal{F}}_{t+}$)

Korollar: (Til brug i teorien om Levy-processer)

Enhver LP-kont s.p. med uafh. stat. tilvækst
har en cadlag modification.

Submartingalkonvergenssætninger, U.I. martingaler

Sætning (Submartingalkonvergenssætning)

$(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ submartingal i L^1 $\sup_{t \in I} E[|X_t|] < \infty$

$I = [0, \alpha[$, (X_t) har højrekont. udfaldsfkt.

Da eksisterer $\lim_{t \rightarrow \alpha} X_t$ n.o., $\lim_{t \rightarrow \alpha} X_t \in L^1$

$$\text{Bm. } E[X_t^+] \leq E[|X_t|] \leq 2E[X_t^+] - E[X_t] \leq 2E[X_t^+] - E[X_0]$$

$$\text{dvs. } \sup_{t \in I} E[|X_t|] < \infty \iff \sup_{t \in I} E[X_t^+] < \infty$$

Bevis:

$$K := \sup_{t \in I} E[|X_t|]$$

$$\begin{aligned} \forall s \in I: E[U(\cdot, [0, s], [a, b])] &\leq \frac{1}{b-a} E[(X_s - a)^+ - (X_0 - a)^+] \\ &\leq \frac{1}{b-a} (E[|X_s|] + |a|) \leq \frac{1}{b-a} (K + |a|) < \infty \end{aligned}$$

Af monoton konvergens følger at

$$E[U(\cdot, I, [a, b])] \leq \frac{1}{b-a} (K + |a|) < \infty, \text{ dvs.}$$

$\forall a < b: U(\cdot, I, [a, b]) < \infty$ n.o., specielt er

$$N = \bigcup_{\substack{a < b \\ a, b \in \mathbb{Q}}} \{U(\cdot, I, [a, b]) = \infty\} \in \mathcal{W} \cap \mathcal{F}$$

Lad $\omega \in N^c$ og antag at $\liminf_{t \rightarrow \alpha} X_t(\omega) < \limsup_{t \rightarrow \alpha} X_t(\omega)$

$$\text{Dvs. } \exists a, b \in \mathbb{Q}: \liminf_{t \rightarrow \alpha} X_t(\omega) < a < b < \limsup_{t \rightarrow \alpha} X_t(\omega)$$

$$\text{og } U(\omega, I, [a, b]) = \infty \text{ } \frac{1}{2}, \text{ dvs. } \liminf_{t \rightarrow \alpha} X_t(\omega) = \limsup_{t \rightarrow \alpha} X_t(\omega)$$

og $\lim_{t \rightarrow \alpha} X_t$ eksisterer dermed n.o.

$$E[\lim_{t \rightarrow \alpha} X_t] \leq \liminf_{t \rightarrow \alpha} E[|X_t|] \leq K < \infty, \text{ dvs. } \lim_{t \rightarrow \alpha} X_t \in L^1 \quad \square$$

Bm. $(X_n)_{n \geq 1}$ kan shives som s.p. $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ som
 er højekont. udfaldsfkt.

Sætning

$(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ U.I. martingale m. højekont. udfaldsfkt.

Da gælder X_t konverger n.o. og i L^1 , $t \rightarrow \infty$ mod X_∞ .

Beris:

Af submartingalkonvergenssætn. følger at

X_t konverger n.o. mod en fkt. $X_\infty \in L^1$,

idet U.I. medfører $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} E[X_t] < \infty$

Pga. U.I. er X_t også konvergent i L^1 ,

dvs. $\exists X_\infty^1 : X_t \rightarrow X_\infty^1$ i $L^1 \Rightarrow \exists (t_n) \subseteq \mathbb{R}_+ : X_{t_n} \rightarrow X_\infty^1$ n.

$\Rightarrow X_\infty = \lim_{t_n \rightarrow \infty} X_{t_n} = X_\infty^1 \quad \square$

Kriterium for U.I.: $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|X_t\|_p < \infty$ for et $p > 1$

Sætn om U.I.:

$(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ U.I. martingal

$\Updownarrow$

$(X_t) \in L^1$ martingal $\exists X_\infty \in L^1$ $X_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} X_\infty$ i L^1

$\Updownarrow$

$\exists Z \in L^1 : X_t = E[Z | \mathcal{F}_t]$, $t \in \mathbb{R}_+$

$\Downarrow$

$X_\infty = E[Z | \mathcal{F}_\infty]$, $X_t = [X_\infty | \mathcal{F}_t]$ $t \in \mathbb{R}_+$, $X_{t_n} \rightarrow X_\infty$ n.o.

for $(t_n) \subseteq \mathbb{R}_+$ $t_n \uparrow \infty$.

Sætning:

$$(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \in L^p, p > 1 \text{ martingale} \quad \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|X_t\|_p < \infty$$

$\Downarrow$

(X_t) U.I. og L^p -konvergent

Beweis:

Jf. Doob's Ulighed (da $(|X_t|)_{t \in \mathbb{R}_+}$ er et submartingal
jvf. Jensen's ulighed for b.m.) er (X_t) U.I.

Jf. ovenstående $\exists X_\infty \in L^1 : X_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} X_\infty$ i L^1
 $\|X_\infty\|_p^p \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \|X_t\|_p^p < \infty$, dvs. $X_\infty \in L^p$

$\forall (t_n) \subseteq \mathbb{R}_+, t_n \uparrow \infty : X_{t_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X_\infty$ n.o.

$|X_{t_n} - X_\infty|^p \leq (2 \sup_{n \geq 1} |X_{t_n}|)^p \in L^1$ jf. Doob's Ulighed.

Af Lebesgues sætning om dom. konv.:

$$\|X_{t_n} - X_\infty\|_p^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (*)$$

Dvs. $X_t \rightarrow X_\infty$ i L^p thi ellers $\exists (t_n) \uparrow \infty$ således
at (*) ikke gælder.

□

Optional stopping & anvendelse

Sætning (Optional Stopping for U.I. martingale)

Antag $(X_t, \mathcal{F}_t)$ U.I. martingal med højrekont. udfaldsfelt

T stop tid : $X_T = E[X_\infty | \mathcal{F}_T]$

Basis:

Pga. højrekont. har vi progressiv målelighed og da X_∞ er $\mathcal{F}_T$ -målelig p. $\{T = \infty\}$ ses, at X_T er $\mathcal{F}_T$ -målelig

$$T_n(\omega) = \begin{cases} j/2^n, & T(\omega) \in [j/2^n, (j+1)/2^n[\quad j=0, \dots \\ \infty, & T(\omega) = \infty \end{cases}$$

$T_n \leq T$ T_n stop tid, da $(X_{j/2^n})_{j \geq 0}$ er U.I. følge af SS2, at $X_{T_n} = E[X_\infty | \mathcal{F}_{T_n}]$ (*)

Vi ser at $(X_{T_n})_{n \geq 1}$ er U.I.

Af højrekont. følger at $X_{T_n} \rightarrow X_T$ pga. U.I. og (*) ses

$$\forall A \in \mathcal{F}_T: E[X_T; A] = E[\lim X_{T_n}; A] = \lim E[X_{T_n}; A] = E[X_\infty; A]$$

idet $\mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{F}_{T_n}$ $n \geq 1$, dvs. $X_T = E[X_\infty | \mathcal{F}_T]$

□

Lemma: T udf. stop tid: $(X_{T \wedge t}, \mathcal{F}_t)$ martingal
når $(X_t, \mathcal{F}_t)$ martingal med højrekont. udfaldsfelt

'Basis': højrekont. $\Rightarrow$ progressiv målelighed, martingalegenskab bl. anvendes

Sætning (Optional Stopping)

$(X_t, \mathcal{F}_t)$ martingale i L^1 med højeste udfaldsfht.

$S \leq T$ stop tid, T optional for $(X_t, \mathcal{F}_t)$

S optional for $(X_t, \mathcal{F}_t)$, $X_S = E[X_T | \mathcal{F}_S]$

$$E[X_0] = E[X_S] = E[X_T]$$

Beris:

$(X_{T \wedge t})$ U.I., jvf. ovenstående sætn.

$$E[X_T | \mathcal{F}_S] = E[E[\lim_{T \wedge t} X_{T \wedge t} | \mathcal{F}_T] | \mathcal{F}_S]$$

$$E[\lim_{T \wedge t} X_{T \wedge t} | \mathcal{F}_S] = X_{T \wedge S} = X_S$$

Specielt gælder $\forall t \geq 0$ $X_{S \wedge t} = E[X_T | \mathcal{F}_{S \wedge t}]$

des. $(X_{S \wedge t})$ er U.I., idet $X_T \in L^1$, altså $\sim S$ optional

$0 \leq S \leq T$:

$$X_0 = E[X_S | \mathcal{F}_0] = E[E[X_T | \mathcal{F}_T] | \mathcal{F}_0] = E[X_T | \mathcal{F}_0]$$

$$\Rightarrow E[X_0] = E[X_S] = E[X_T]$$

□

Anvendelse: Ruinproblemet: diskret Simple random walk
kontinuerligt Brownisk

$$P(a ruinert) = \frac{b}{a+b} \quad E[T] = \frac{ab}{\sigma^2} \quad (\text{diskret } \sigma^2=1)$$

Institut for Matematiske Fag
Aarhus Universitet

Den 22. august 2003

Stokastiske Processer

Uge 25/8/03

Forelæsninger: § 1.1-1.3.

Øvelser: –

Goran Peskir

Institut for Matematiske Fag
Aarhus Universitet

Den 28. august 2003

Stokastiske Processer

Uge 1/9/03

Forelæsninger: § 1.3 (Bevis); § 1.4.

Øvelser: Opgaver 1-3.

Goran Peskir

3. The Kolmogorov consistency theorem (Proof)

The state space S will be $\mathbb{R}$ or $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$).
 (The proof can be extended to S being any separable metric space, or more generally, any polish space (see Appendix 1)). These extensions require only to change the proof of Lemma 1 below, and the rest of the argument is just the same.)

We set $\text{Pr}(\mathbb{R}^n)$ denote the family of all probability measures on $\mathbb{R}^n$ (i.e. on $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$)

A key point of the proof is contained in the following lemma.

Lemma 1.

(Borel sets in $\mathbb{R}^n$)

Each $P \in \text{Pr}(\mathbb{R}^n)$ is tight, i.e.

$$(1) \quad P(M) = \sup \{ P(K) \mid K \subseteq M, K \text{ is compact} \}$$

for all $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

$\Updownarrow$
 (bounded & closed in $\mathbb{R}^n$)

Proof. We know (from SS2) that each $P \in \mathcal{P}_r(\mathbb{R}^n)$ is regular, i.e. (see Hint below)

$$(2) \quad P(M) = \sup \{ P(C) \mid C \subseteq M, C \text{ is closed} \} \\ (= \inf \{ P(U) \mid U \supseteq M, U \text{ is open} \})$$

for all $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Hence, if $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ is given, then there is a sequence of closed sets $C_n \subseteq M$ ($n \geq 1$), such that $P(C_n) \rightarrow P(M)$

as $n \rightarrow \infty$. Setting $K_n = \underbrace{C_n \cap [-n, n]}_{\text{compact}}$ we see that K_n is compact, and since: bounded & closed

$$\begin{aligned} M \quad P(C_n) &= P(K_n) + P(C_n \setminus [-n, n]) \\ &\underbrace{\quad}_{\rightarrow P(M)} \quad \underbrace{\quad}_{\leq P(\mathbb{R} \setminus [-n, n]) \rightarrow 0} \\ &\quad \quad \quad \downarrow \emptyset \end{aligned}$$

it follows that $P(K_n) \rightarrow P(M)$ as $n \rightarrow \infty$.

This proves (1).

□

Hint for (2):

1. Note that (2) is equivalent to:

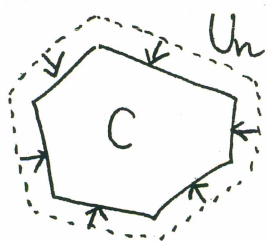
(2') $\forall M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \forall \varepsilon > 0, \exists$ open U_ε and closed C_ε such that $C_\varepsilon \subseteq M \subseteq U_\varepsilon$ and $P(U_\varepsilon \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon$.

2. Let $\mathcal{G}$ denote the family of all $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ for which (2') holds. Show:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad M \in \mathcal{G} \Rightarrow M^c \in \mathcal{G} \\ \text{(ii)} \quad M_n \in \mathcal{G}, n \geq 1 \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \in \mathcal{G} \\ \text{(iii)} \quad \mathcal{C} \subseteq \mathcal{G} \end{array} \right. \\ & \uparrow \\ & \text{closed sets in } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$
 $\mathcal{G}$ is a σ -algebra

Hint for (iii): C closed $\Rightarrow C = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$



$$U_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, C) < \frac{1}{n}\}$$

$x \mapsto d(x, C)$ is continuous

$$|d(x, C) - d(y, C)| \leq d(x, y)$$

Euclidean metric on $\mathbb{R}^n$

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$$

$$d(x, C) = \inf_{y \in C} d(x, y)$$

For $T \neq \emptyset$ we set :

$$S^T = \{ f : T \rightarrow S \mid f \text{ is a function} \}$$

↑
notation : $\omega = (\omega(t), t \in T)$ or $(x_t, t \in T)$

From now on we shall write $\mathbb{R}$ instead of S .

Given $\{t_1 \dots t_n\} \subseteq T$ we define a projection
 $p_{t_1 \dots t_n}$ by setting :

$$p_{t_1 \dots t_n}(\omega) = (x_{t_1} \dots x_{t_n})$$

for $\omega = (x_t, t \in T) \in \mathbb{R}^T (= S^T)$.

Definition : $A \subseteq \mathbb{R}^T$ is called a Borel cylinder
with base M at coordinates $t_1 \dots t_n$, if

$$A = p_{t_1 \dots t_n}^{-1}(M)$$

where $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ and $\{t_1 \dots t_n\} \subseteq T$.

Definition : $\mathcal{F}^T = \{A \subseteq \mathbb{R}^T \mid A \text{ is a Borel cylinder}\}$

It is easily verified that $\mathcal{F}^T$ is an algebra of
subsets of $\mathbb{R}^T$ (verifi. !)

$$p_{t_1 \dots t_n, s_1 \dots s_m}^{-1}(M_1 \times M_2) = A_1 \cap A_2$$

Definition : $\mathcal{B}^T = \underbrace{\sigma(\mathcal{F}^T)}$

the smallest σ -algebra
containing $\mathcal{F}^T$

the σ -algebra of Borel sets in $\mathbb{R}^T$
(by definition)

Suppose now that $\forall \{t_1 \dots t_n\} \subseteq T$ we are given :

$$\Pi(t_1 \dots t_n; \cdot) \in \mathcal{P}_r(\mathbb{R}^n)$$

satisfying the Kolmogorov consistency conditions :

$$(1) \quad \Pi(t_1 \dots t_n, t_{n+1}; B \times \mathbb{R}) = \Pi(t_1 \dots t_n; B) \\ (\forall \{t_1 \dots t_n, t_{n+1}\} \subseteq T, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$$

$$(2) \quad \Pi(t_{i_1} \dots t_{i_n}; B_{i_1} \times \dots \times B_{i_n}) = \Pi(t_1 \dots t_n; B_1 \times \dots \times B_n) \\ (\forall \text{ permutation } (t_{i_1} \dots t_{i_n}) \text{ of } (t_1 \dots t_n) \text{ where } \\ \{t_1 \dots t_n\} \subseteq T \text{ is arbitrary; } \forall B_1 \dots B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$$

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$!?

Define $\mathbb{P}_T$ on $\mathcal{F}^T$ by :

$$(3) \quad \underline{\mathbb{P}_T(A) = \Pi(t_1 \dots t_n; M)}$$

where $A = p_{t_1 \dots t_n}^{-1}(M)$ for some $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ and $\{t_1 \dots t_n\} \subseteq T$.

This definition does not depend on the chosen representation of A , i.e. if $A = p_{t_1 \dots t_n}^{-1}(M) = p_{s_1 \dots s_m}^{-1}(N)$, then $\Pi(t_1 \dots t_n; M) = \Pi(s_1 \dots s_m; N)$.

$$\{r_1, \dots, r_p\} = \{t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_m\}, \text{ j.f. (1)+(2)} \exists M', N' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \\
A = P_{r_1, \dots, r_p}^{-1}(M') = P_{r_1, \dots, r_p}^{-1}(N') \quad \Pi(t_1, \dots, t_n; M) = \Pi(r_1, \dots, r_p; M') \quad \Pi(s_1, \dots, s_m; N) = \Pi(r_1, \dots, r_p; N') \\
(= P_{t_1, \dots, t_n}^{-1}(M) = P_{s_1, \dots, s_m}^{-1}(N)) \quad \Pi(*) \quad \begin{array}{l} \text{da } r_1, \dots, r_p \text{ freshlinge} \\ \Rightarrow \\ w \in P_{r_1, \dots, r_p}^{-1}(M') \\ \Leftrightarrow w \in P_{r_1, \dots, r_p}^{-1}(N') \\ (*) \end{array} \quad -6-$$

This follows easily by applying (1) and (2).
(Check it.)

We may now state the key fact.

Theorem (Kolmogorov 1933)

There exists a unique probability measure P_T on $\mathcal{B}^T$ satisfying (3) for all $A \in \mathcal{F}^T$.

Proof. We first show that P_T (defined by (3)) is finitely additive on $\mathcal{F}^T$. For this, let $A, B \in \mathcal{F}^T$ with $A \cap B = \emptyset$ be given. Then $A = P_{t_1, \dots, t_n}^{-1}(M_1)$ and $B = P_{t_1, \dots, t_n}^{-1}(M_2)$ for some $M_1, M_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. (Note that here is no restriction to assume that the set $\{t_1, \dots, t_n\}$ of coordinates is the same for both A and B — if not, make it the same — check this.) Since $A \cap B = \emptyset$, we have $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, and thus (3) implies:

$$P_T(A \cup B) = P_T(P_{t_1, \dots, t_n}^{-1}(M_1) \cup P_{t_1, \dots, t_n}^{-1}(M_2)) =$$

$$\begin{aligned}
&= P_T \left(p_{t_1 \dots t_n}^{-1} (M_1 \cup M_2) \right) \stackrel{(3)}{=} \Pi(t_1 \dots t_n; M_1 \cup M_2) = \\
&= \Pi(t_1 \dots t_n; M_1) + \Pi(t_1 \dots t_n; M_2) \stackrel{(3)}{=} \\
&= P_T(A) + P_T(B).
\end{aligned}$$

Thus, P_T is finitely additive on $\mathcal{F}^T$.

Next we show that P_T is σ -additive on $\mathcal{F}^T$
 (this is the key point of the proof). For this,
 it is enough to show that for each $\{A_n \mid n \geq 1\} \subseteq \mathcal{F}^T$ such that $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ with $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$
 we have $\lim_{n \rightarrow \infty} P_T(A_n) = 0$. (Check this claim!)

Assume that this is not the case for some sequence $\{A_n \mid n \geq 1\} \subseteq \mathcal{F}^T$ of this type, i.e. assume that:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_T(A_n) = \varepsilon > 0.$$

(Note that the limit always exists as $P_T(A_1) \geq P_T(A_2) \geq \dots \geq 0$.) Let $A_n = p_{t_1 \dots t_{m_n}}^{-1} (M_n)$ for some $M_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m_n})$ with $n \geq 1$. Without loss

of generality we may assume that $n \mapsto m_n$ is increasing (clarify this point). Then:

$$P_T(A_n) = \pi(t_1 \dots t_{m_n}; M_n) \geq \varepsilon > 0$$

for all $n \geq 1$. Since $M_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m_n})$, then by Lemma 1 above $\exists$ compact $K_n \subseteq \mathbb{R}^{m_n}$ such that $K_n \subseteq M_n$ and:

$$(4) \quad \pi(t_1 \dots t_{m_n}; M_n \setminus K_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \quad (n \geq 1).$$

The set K_n is closed (and bounded) in $\mathbb{R}^{m_n}$, thus $K_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m_n})$. Set:

$$B_n = p_{t_1 \dots t_{m_n}}^{-1}(K_n) \quad (n \geq 1).$$

Then $B_n \in \mathcal{F}^T$, $B_n \subseteq A_n$ and:

$$P_T(A_n \setminus B_n) = \pi(t_1 \dots t_{m_n}; M_n \setminus K_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \quad (n \geq 1)$$

by (4).

Set $C_n = \bigcap_{k=1}^n B_k$ for $n \geq 1$. Then $C_n \in \mathcal{F}^T$ and $C_n \subseteq B_n \subseteq A_n$ for all $n \geq 1$. Moreover:

$$\begin{aligned} P_T(A_n \setminus C_n) &= P_T\left(\bigcup_{k=1}^n A_n \setminus B_k\right) \leq P_T\left(\bigcup_{k=1}^n A_k \setminus B_k\right) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n P_T(A_k \setminus B_k) < \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

and hence :

$$P_T(C_n) = P_T(A_n) - P_T(A_n \setminus C_n) > \frac{\varepsilon}{2} > 0 \quad (n \geq 1).$$

In particular, this implies that $C_n \neq \emptyset$ for all $n \geq 1$.
Thus, for each $n \geq 1$ we can choose $\omega^{(n)} = (x_t^{(n)}, t \in T) \in C_n$. Since $C_n \subseteq B_1$ for all $n \geq 1$, we have:

$$\left\{ (x_{t_1}^{(n)} \dots x_{t_{m_1}}^{(n)}) \mid n \geq 1 \right\} \subseteq K_1.$$

Since K_1 is compact, then there exists a (strictly) increasing subsequence $n \mapsto r_{1n}$ such that :

$$(x_{t_1}^{(r_{1n})} \dots x_{t_{m_1}}^{(r_{1n})}) \longrightarrow (x_{t_1}^{(o)} \dots x_{t_{m_1}}^{(o)}) \in K_1$$

↑

as $n \rightarrow \infty$,

since K_1 is closed

Similarly, from $C_n \subseteq B_2$ for all $n \geq 2$ it follows that the sequence $\left\{ (x_{t_1}^{(r_{1n})} \dots x_{t_{m_2}}^{(r_{1n})}) \mid n \geq 1 \right\}$ is

contained in K_2 (except perhaps the first point of this sequence) so that the compactness of K_2 implies the existence of a (strictly) increasing subsequence $\{t_{2n} | n \geq 1\}$ of $\{t_{1n} | n \geq 1\}$ such that:

$$\left(x_{t_1}^{(r_{2n})} \dots x_{t_{m_2}}^{(r_{2n})} \right) \longrightarrow \underbrace{\left(x_{t_1}^{(0)} \dots x_{t_{m_1}}^{(0)} \dots x_{t_{m_2}}^{(0)} \right)}_{\text{clearly the same as before/above}}$$

as $n \rightarrow \infty$.

If we continue this procedure by induction, in the i -th step we get a subsequence $\{t_{in} | n \geq 1\}$ such that:

$$\left(x_{t_1}^{(r_{in})} \dots x_{t_{m_i}}^{(r_{in})} \right) \longrightarrow \left(x_{t_1}^{(0)} \dots x_{t_{m_1}}^{(0)} \dots x_{t_{m_2}}^{(0)} \dots x_{t_{m_i}}^{(0)} \right)$$

as $n \rightarrow \infty$.

Take now any $\omega = (x_t, t \in T) \in \mathbb{R}^T$ such that:

$$p_{t_1 \dots t_{m_n}}(\omega) = (x_{t_1} \dots x_{t_{m_n}}) = (x_{t_1}^{(0)} \dots x_{t_{m_n}}^{(0)})$$

for all $n \geq 1$. Then:

$$\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$$

and this is a contradiction.

Thus, we may conclude that P_T is $\mathcal{G}$ -additive on the algebra $\mathcal{F}^T$, and therefore by the Carathéodory theorem (SS2) it can be uniquely extended to a probability measure on $\mathcal{G}(\mathcal{F}^T) = \mathcal{B}^T$. This completes the proof. $\square$

Corollary (Kolmogorov): Existence of a stoch. process
 $(T \neq \emptyset \text{ given \& fixed})$ given finite dim. distr.

Suppose that $\forall \{t_1, \dots, t_n\} \subseteq T$ we are given $\Pi(t_1, \dots, t_n; \cdot) \in \mathcal{P}_r(\mathbb{R}^n)$ satisfying (1) and (2).

Then $\exists$ a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ and $\exists$ a stochastic process $X = (X_t)_{t \in T}$ defined on it, such that :

$$(5) \quad \text{Law}\left((X_{t_1}, \dots, X_{t_n})\right) = \Pi(t_1, \dots, t_n; \cdot)$$

for all $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq T$ where $n \geq 1$.

Proof. Take :

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}^T, \mathcal{B}^T, \mathbb{P}_T)$$

↑

exists by the Theorem above

$$X_t(\omega) := p_t(\omega) = \omega(t) = x_t$$

for $\omega = (\omega(t), t \in T) = (x_t, t \in T) \in \Omega = \mathbb{R}^T$. Then $\omega \mapsto X_t(\omega)$ is measurable (the projection p_t is a measurable map from $\mathbb{R}^T$ into $\mathbb{R}$ by construction of $\mathcal{B}^T$) i.e. $X = (X_t)_{t \in T}$ is a stochastic process defined on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Moreover, for each $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ we have :

$$\mathbb{P}\{(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B\} = \mathbb{P}_T\left(p_{t_1, \dots, t_n}^{-1}(B)\right) \stackrel{(3)}{=} \Pi(t_1, \dots, t_n; B).$$

This establishes (5), and the proof is complete.

□

Stokastiske Processer, TØ nr. 1

opgave 1

$X = \{X_t\}_{t \in I}$, $Y = \{Y_t\}_{t \in I}$ s.p. def. på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$(X, Y) := \{(X_t, Y_t)\}_{t \in I}, \quad (X, X) := \{(X_t, X_t)\}_{t \in I}$$

Påstand:

X, Y modificationer af hinanden

$$\iff (X, Y) \sim (X, X)$$

Bevis:

$\Rightarrow$:

$$P(X = Y) = 1 \implies P((X, Y) = (X, X)) = 1$$

$$\implies (X, Y) \sim (X, X)$$

$\Leftarrow$:

$$(X, Y) \sim (X, X) \implies P(X \neq Y) = P(X \neq X) = 0$$

$$\implies P(X = Y) = 1$$

Løs X som $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ tilsvarende for Y

opgave 2

$(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ reel s.p. på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Påstand:

$\mathbb{I} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ s.v.

(a) $\exists f \in M(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}) : \mathbb{I} = f(X_0, \dots, X_n)$

$\Updownarrow$

(b) $\mathbb{I}$ er $\mathcal{F}_n$ -målbar, $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, \dots, X_n)$

Beweis:

$\Downarrow$: Klar jvf. målelighed af målelige sammensatte fkt

$\Uparrow$:

Antag $\mathbb{I} = 1_A$, dvs. $A \in \mathcal{F}_n$

Pr. def. af $\mathcal{F}_n \exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}) : A = \{(X_0, \dots, X_n) \in B\}$

$$\mathbb{I} = 1_B(X_0, \dots, X_n)$$

Antag $\mathbb{I}_1, \mathbb{I}_2$ $\mathcal{F}_n$ målelige $f_1, f_2 \in M(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$:

$$\mathbb{I}_1 = f_1(X_0, \dots, X_n), \mathbb{I}_2 = f_2(X_0, \dots, X_n)$$

$$\text{Da er } a\mathbb{I}_1 + b\mathbb{I}_2 = af_1 + bf_2(X_0, \dots, X_n)$$

$$\text{og } af_1 + bf_2 \in M(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$$

Antag (f_m) F_n -målbare $(f_m) \subseteq M(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$:

$$f_m(x_0, \dots, x_n) \leq f_{m+1}(x_0, \dots, x_n), \quad m \geq 1$$

$$\sup_m (f_m(x_0, \dots, x_n)) < \infty$$

$$f_\infty := \sup_m f_m \cdot 1_{\{\sup_m f_m < \infty\}} \in M(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}) \quad (\text{jf. Lemma 5 i SS2})$$

$$\text{Dus. } \sup_m I_m = \sup_m f_m(x_0, \dots, x_n)$$

AF standardiseret s. 20 i SS2-noterne følger

$$\forall I, F_n\text{-målbare: } \exists f \in M(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}) : I = f(x_0, \dots, x_n)$$

□

opgave 3

$\mathcal{N}$ mængde i $(\mathcal{F}, \mathcal{F}, P)$

$$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \text{ del-}\sigma\text{-alg. } \bar{\mathcal{G}} = \sigma(\mathcal{G} \cup \mathcal{N})$$

$$\text{Påstand: } \bar{\mathcal{G}} = \{B \in \mathcal{F} \mid \exists A \in \mathcal{G} : A \Delta B \in \mathcal{N}\}$$

Beris:

$$\text{Antag } (B_n) \subseteq \{B \in \mathcal{F} \mid \exists A \in \mathcal{G} : A \Delta B \in \mathcal{N}\}$$

$$\exists (A_n) \in \mathcal{G} : A_n \Delta B_n \in \mathcal{N}$$

$$A_0^c \in \mathcal{G} \quad (\mathcal{G} \text{ } \sigma\text{-alg}) \quad A_0^c \Delta B_0^c = A_0 \Delta B_0$$

$$\text{Dus. } B_0^c \in \{B \in \mathcal{F} \mid \exists A \in \mathcal{G} : A \Delta B \in \mathcal{N}\}$$

$$\bigcup_n A_n \in \mathcal{G} \quad (\mathcal{G} \text{ } \sigma\text{-alg})$$

$$\bigcup_n A_n \Delta \bigcup_n B_n \subseteq \bigcup_n (A_n \Delta B_n),$$

$\uparrow$
 $\mathcal{F}$

da vi ydeligvis ser, at $\mathcal{N} \Delta \mathcal{N} = \emptyset \in \mathcal{N}$ ses
at $\{B \in \mathcal{F} \mid \exists A \in \mathcal{G} : A \Delta B \in \mathcal{N}\}$ er en σ -alg.



$$\mathcal{G}, \mathcal{W} \subseteq \{B \in \mathcal{F} \mid \exists A \in \mathcal{G} : A \Delta B \in \mathcal{W}\} \quad (\sigma\text{-alg})$$

$\Downarrow$

$$\overline{\mathcal{G}} \subseteq \{B \in \mathcal{F} \mid \exists A \in \mathcal{G} : A \Delta B \in \mathcal{W}\}$$

$$B \in \mathcal{F} : \exists A \in \mathcal{G} : A \Delta B \in \mathcal{W} \quad \text{vilkårlig}$$

$$B = \underbrace{(A \setminus (A \Delta B))}_{\in \mathcal{G}} \cup \underbrace{((A \Delta B) \setminus A)}_{\in \mathcal{W}} \in \sigma(\mathcal{G} \cup \mathcal{W}) = \overline{\mathcal{G}}$$

$$\text{dus. } \{B \in \mathcal{F} \mid \exists A \in \mathcal{G} : A \Delta B \in \mathcal{W}\} \subseteq \overline{\mathcal{G}}$$

□

Stokastiske Processer

Uge 8/9/03

Forelæsninger: § 1.4-1.7 (§ 1.8 overspringes).

Øvelser: (i) Opgaver 8 og 9.

(ii) Vis (6.2) Sætning (Monoton Klasse Lemma) sider A-32 til A-35.

Goran Peskir

Stokastiske Processer, TØ nr. 2

(1)

opgave 8

Påstand: $X \in L^1(P) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{|X| > n\}} |X| dP = 0$

Beweis:

$\implies$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |X| 1_{\{|X| > n\}} = 0, \quad \forall n \geq 1: |X| 1_{\{|X| > n\}} \leq |X|$$

Af Lebesgues Sætn. om dom. konv. følger det ønskede.

$\impliedby$:

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{|X| > n\}} |X| dP = 0$ gælder $\exists N, M \geq 1$:

$$\int_{\{|X| > N\}} |X| dP \leq M$$

$$\implies E[|X|] \leq NP(|X| \leq N) + M < \infty$$

□

opgave 9

1)

$\{X_t\}_{t \in I}$, $\{Y_t\}_{t \in I}$ U.I.

Påstand: $\{X_t + Y_t\}_{t \in I}$ U.I.

Beris:

$$\sup_t \int_{\{|X_t + Y_t| > a\}} |X_t + Y_t| dP \leq \sup_t \left(\int_{\{|X_t| + |Y_t| > a\}} |X_t| + |Y_t| dP \right) \quad (*)$$

Da

$$\int_{\{|X_t| + |Y_t| > a\}} |X_t| dP \leq a P(|X_t| + |Y_t| > a) + \int_{\{|X_t| > a\}} |X_t| dP$$

fås, at

$$(*) \leq \sup_t \int_{\{|X_t| > a\}} |X_t| dP + \sup_t \int_{\{|Y_t| > a\}} |Y_t| dP + 2a \sup_t P(|X_t| + |Y_t| > a)$$

$\xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0$, thi

$$\sup_t P(|X_t| + |Y_t| > a) \leq \frac{1}{a} \left(\sup_t E[|X_t|] + \sup_t E[|Y_t|] \right)$$

Idet U.I. medfører $\sup_t E[|X_t|], \sup_t E[|Y_t|] < \infty$

□

2)

Påstand:

$(X_n) \subseteq L^1(P)$, $X_n \xrightarrow{P} 0$ i L^1 , da gælder
 $(X_n) \cup.I.$

Beweis:

Lad $\varepsilon > 0$ være givet

Da $X_n \xrightarrow{P} 0$ i L^1 og $|X_n|_{\{|X_n| > a\}} \leq |X_n|$, $a \in \mathbb{R}_+$
 $\exists N \geq 1 \forall n \geq 1$:

$$\sup_{n \geq N} \int_{\{|X_n| > a\}} |X_n| dP < \varepsilon/2$$

Jvf. opg. 8 kan vi vælge et $a \in \mathbb{R}_+$ så

$$\sup_{1 \leq n < N} \int_{\{|X_n| > a\}} |X_n| dP < \varepsilon/2, \text{ dvs.}$$

$$\sup_n \int_{\{|X_n| > a\}} |X_n| dP \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0$$

□

3)

$(X_n) \subseteq L^1$ konvergent i L^1

Dvs. $\exists X \in L^1$: $E[|X_n - X|] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Påstand: $(X_n) \cup.I.$

Beweis:

$(X_n - X) \cup.I.$ jvf. 2) dvs. $(X_n) \cup.I.$ jvf. 1)

□

(ii)

Sætning: (Monoton Klasse Lemma)

Antag $\mathcal{H}$ mgl. af reelle begrænsede fkt. på E ,
og $\mathcal{H}$ er et vektorrum indeholdende $1_E(\cdot)$,
som er lukket under monoton begrænset konvergens
($0 \leq f_1 \leq \dots \leq f_n \leq \dots$, $f_n \in \mathcal{H}$, $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ begrænset $\Rightarrow f \in \mathcal{H}$)
Dus. $\mathcal{H}$ er et MVR

$\mathcal{R}$ er en multiplikativ mgl. $\subseteq \mathcal{H}$

Da gælder at enhver reel, begrænset $\sigma(\mathcal{R})$ -målelig
fkt. ligger i $\mathcal{H}$.

Bevis:

Juf. s. A-33 er et MVR lukket under uniform konv.
, dus., hvis $f_n \Rightarrow f$, $(f_n) \subseteq \mathcal{H} \Rightarrow f \in \mathcal{H}$ (*)

$\forall g_1, \dots, g_n \in \mathcal{R} \exists K$ kompakt i $\mathbb{R}^n$ (da $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{H}$):

$\forall x \in E: (g_1, \dots, g_n)(x) \in K$

Da $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{H}$ og $\mathcal{R}$ er multiplikativ og $\mathcal{H}$ er et vektorrum
er $P(g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{H}$ for ethvert P polynomium i
 n variable.

Weierstraß approximationsætning, (se Analyse 1 noterne)

giver: $\forall f \in C^0(K) \exists (P_n)$ polynomier: $P_n \Rightarrow f$ på K

Dus. $C^0(K) \subseteq \mathcal{H}$ jf. (*)

Lad $U \subseteq \mathbb{R}^n$ åben, $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{R}$ være vilk.

$$1 \wedge n \cdot \text{dist}((g_1, \dots, g_n), U^c) \uparrow 1_U(g_1, \dots, g_n) \\ \stackrel{n}{C^0(K)}$$

Dvs. $1_U(g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{H}$, da $\mathcal{H}$ er lukket under monoton konvergens.

$\mathcal{U} := \{f \in \mathcal{H} \mid f \text{ endelig lin. komb. af fkt. på form } 1_U(g_1, \dots, g_n)\}$

Da $1_U(g_1, \dots, g_n) \cdot 1_V(g'_1, \dots, g'_m) = 1_{U \times V}(g_1, \dots, g_n, g'_1, \dots, g'_m)$
er $\mathcal{U}$ en multiplikativ mgt.

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq E \mid 1_A \in \mathcal{U}\}, \quad \mathcal{J} := \{A \subseteq E \mid 1_A \in \mathcal{H}\}$$

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{J}^+$ og $E \in \mathcal{A}^*$, og $\{(g_1, \dots, g_n) \in U\} \in \mathcal{A}$
for $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{R}$ $U \subseteq \mathbb{R}^n$ åben. jvf. def på $\mathcal{U}$
dvs. jvf. def på borel-målelighed er $\sigma(\mathcal{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow 1_E - 1_A \in \mathcal{U} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$$

$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow 1_A \cdot 1_B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$$

Altså er $\mathcal{A}$ en algebra (jvf. *)

$\mathcal{J}$ er $\uparrow$ -L stabil, idet $\mathcal{H}$ er lukket under monoton konvergens, dvs. $A_1 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$

$$\Rightarrow 1_{A_n} \uparrow 1_{\bigcup_n A_n} \in \mathcal{H} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{J}$$

Da $\mathcal{A}$ er en alg. er det mindste $(\uparrow, L)$ stabile mgt. system, som indeholder $\mathcal{A}$, $\sigma(\mathcal{A})$

Dermed ses, at $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{J}$ (jvf. +)

Dvs. $1_A \in \mathcal{H}$, $\forall A \in \sigma(\mathcal{R})$

Da enhver pos. $\sigma(\mathcal{R})$ målelig fkt. kan fås som
grænsefkt. til en monoton voksende (og begrænset)
flg. af simple fkt., som konverger uniformt
(se SS2-noterne Lemma 6 s. 19) og $\mathcal{H}$ er
lukket under monoton uniform konvergens er
enhver $\sigma(\mathcal{R})$ målelig fkt. i $\mathcal{H}$, idet vi ser på
hh. pos. og neg. del af fkt.

□

Stokastiske Processer

Uge 15/9/02

Forelæsninger: § 2.1-2.2.

Øvelser: (i) Vis (6.2) Sætning (Monoton Klasse Lemma) sider A-32 til A-35.
(ii) Opgaver 4, 5, 6.

Goran Peskir

Stokastiske Processer, TØ nr. 3

(i) $\rightarrow$ se TØ nr. 2

(ii):

opgave 4

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ filtreret måleligt rum $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_t \mathcal{F}_t)$

1)

Påstand: T stopetid: $\mathcal{F}_T$ σ -algebra

Bevis:

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F}_\infty \mid A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$$

Da T er en veldef. stopetid er $\Omega \cap \{T \leq t\} = \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, t \geq 0$
dvs. $\Omega \in \mathcal{F}_T$

Antag $(A_n) \subseteq \mathcal{F}_T$

$$A_i^c \cap \{T \leq t\} = \underbrace{(A_i \cap \{T \leq t\})^c}_{\mathcal{F}_t \text{ (}\sigma\text{-alg)}} \cap \underbrace{\{T \leq t\}}_{\mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_t, t \geq 0$$

Dvs. $A_i^c \in \mathcal{F}_T$

$$(\cup_n A_n) \cap \{T \leq t\} = \cup_n (A_n \cap \{T \leq t\}) \in \mathcal{F}_t \text{ (da } \mathcal{F}_t \text{ } \sigma\text{-alg.) } t \geq 0.$$

□

2)

Påstand: T stopetid $\sim \mathcal{F}_T$ -målbar.

Bevis:

$$\{T \leq s\} \cap \{T \leq t\} = \{T \leq s \wedge t\} \in \mathcal{F}_t \text{ (da } \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t)$$

□

3)

Pöstand: S, T stopptid $\forall \omega \in \Omega: S(\omega) \leq T(\omega)$
 $\Rightarrow \mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$

Bewis:

Lad $A \in \mathcal{F}_S$, dus. $A \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t, t \geq 0$

Da $\mathcal{F}_t, t \geq 0$ en σ -alg. fölgr

$A \cap \{T \leq t\} = A \cap \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, t \geq 0$, dus. $A \in \mathcal{F}_T$ $\square$

4)

$t_0 \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $T(\omega) := t_0 \forall \omega \in \Omega$

Pöstand: T stopptid, $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{t_0}$

Bewis:

$t \geq 0$: $\{T \leq t\} = \emptyset$ d. $\{T \leq t\} = \Omega \Rightarrow \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, t \geq 0$

dus. T stopptid

$A \in \mathcal{F}_T$: $A = A \cap \{T \leq t_0\} \in \mathcal{F}_{t_0}$ pr. def. af $\mathcal{F}_T$

$A \in \mathcal{F}_{t_0}$: $A \cap \{T \leq t\} = \emptyset, t < t_0$ $A \cap \{T \leq t\} = A, t \geq t_0$

dus. $(\mathcal{F}_{t_0} \subseteq \mathcal{F}_t, t \geq t_0)$ $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, t \geq 0 \Rightarrow A \in \mathcal{F}_T$ $\square$

5)

Pöstand: S, T stopptid $\Rightarrow S \wedge T, S \vee T$ stopptid

Bewis:

$\{S \wedge T \leq t\} = \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, t \geq 0$ dus $S \wedge T$ stopptid

$\{S \vee T \leq t\} = \{S \vee T > t\}^c = (\{S > t\} \cap \{T > t\})^c$

$= (\{S \leq t\}^c \cap \{T \leq t\}^c)^c \in \mathcal{F}_t$, dus $S \vee T$ stopptid.

6)

Paßsund: S, T stopptid $\Rightarrow S+T$ stopptid

Beweis:

$$\{S+T > t\} = \{S=0, T > t\} \cup \{0 < S < t, S+T > t\} \\ \cup \{S > t, T=0\} \cup \{S \geq t, T > 0\}$$

$$\{S=0\} = \{S \leq 0\} \in \mathcal{F}_t, \quad \{T > t\} = \{T \leq t\}^c \in \mathcal{F}_t$$

$$\{0 < S < t\} = \bigcup_{\substack{0 < r < t \\ r \in \mathbb{Q}}} \{r < S < t, T > t-r\} \in \mathcal{F}_t \text{ idet}$$

$$\{r < S < t\} = \{S \leq r\}^c \cap \left(\bigcup_{t_n \uparrow t} \{S \leq t_n\} \right) \in \mathcal{F}_t,$$

$$\{T > t-r\} = \{T \leq t-r\}^c \in \mathcal{F}_t$$

$$\{S > t\} = \{S \leq t\}^c \in \mathcal{F}_t, \quad \{T=0\} = \{T \leq 0\} \in \mathcal{F}_t$$

$$\{S \geq t\} = \bigcap_{t_n \uparrow t} \{S > t_n\} = \bigcap_{t_n \uparrow t} \{S \leq t_n\}^c \in \mathcal{F}_t$$

$$\{T > 0\} = \{T \leq 0\}^c \in \mathcal{F}_t$$

Dus. $\{S+T \leq t\} = \{S+T > t\}^c \in \mathcal{F}_t$ ($\mathcal{F}_t$ σ -alg), $t \geq 0$
 altså er $S+T$ en stopptid □

opgave 5

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ filtreret måleligt rum

$T: \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ s.v.

1)

Påstand: T er en udvidet stopetid mht. $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$

$$\iff \{T < t\} \in \mathcal{F}_t, t \geq 0$$

Beris:

$\Rightarrow$:

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s, t \geq 0 \implies \{T < t\} = \bigcup_{t_n \uparrow t} \{T \leq t_n\} \in \mathcal{F}_t, t \geq 0$$

$$\text{idet } \{T \leq t_n\} \in \mathcal{F}_{t_n+} \subseteq \mathcal{F}_s, s > t$$

$\Leftarrow$:

$$\{T < t\} \in \mathcal{F}_t, t \geq 0 \implies \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+}, t \geq 0, \text{idet}$$

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{s > t} \{T < t_n\} \in \mathcal{F}_s, s > t$$

□

2)

T udvidet stopetid (dvs. $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+}, t \geq 0$)

Påstand: $\mathcal{F}_{T+} = \{A \in \mathcal{F}_\infty \mid A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$

Beris:

$$A \in \mathcal{F}_{T+} \iff \{A \in \mathcal{F}_\infty \mid A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+}, t \geq 0\}$$

$$A \cap \{T < t\} = A \cap \left(\bigcup_{t_n \uparrow t} \{T \leq t_n\} \right) \in \mathcal{F}_t, \text{idet}$$

$$A \cap \{T_n \leq t_n\} \in \mathcal{F}_{t_n+} \subseteq \mathcal{F}_t, t \geq 0, \text{dvs.}$$

$$A \in \{A \in \mathcal{F}_\infty \mid A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$$

$$A \in \{A \in \mathcal{F}_\infty \mid A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$$

$$A \cap \{T \leq t\} = A \cap \bigcap_{s > t, s \in \mathbb{Q}} \{T < s\} \in \mathcal{F}_s, s > t$$

||

$$A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+}, t \geq 0$$

□

opgave 6

$$\Omega = \mathbb{R}_+, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{F}_t = \mathcal{F}, t \geq 0$$

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ betegner da et filtreret rum

$M \subseteq \mathbb{R}_+$ ikke-målelig (sådanne eksisterer jf. Analyse 1)

dvs. $M \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$

$$X_t(\omega) := \begin{cases} 1_{\{t \in M\}}(\omega), & t \in M \\ 2 \cdot 1_{\{t \notin M\}}(\omega), & t \notin M \end{cases}$$

1)

Påstand: $(X_t)_{t \geq 0}$ er en. s.p. med målelige udfaldsfkt.

Basis:

$\{t\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, dvs. $X_t(\cdot)$ er målelig, $t \geq 0$

Altså er $(X_t)_{t \geq 0}$ veldef. s.p.

$$X_{(\cdot)}(\omega) = \begin{cases} 1_{\{\omega \in M\}}(\cdot), & \omega \in M \\ 2 \cdot 1_{\{\omega \notin M\}}(\cdot), & \omega \notin M \end{cases}, \text{ da } \{\omega\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$$

er $X_{(\cdot)}(\omega)$ målelig $\forall \omega \in \mathbb{R}_+$

□

2)

$$T(\omega) := \omega, \omega \in \Omega$$

Påstand: T stopetid

Beweis:

$$\{T \leq t\} = [0, t] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) = \mathcal{F} = \mathcal{F}_t, t \geq 0$$

□

3)

Påstand: X_T er ikke en s.v.

Beweis:

$$X_T = X_\omega(\omega) = 1 \cdot 1_M(\omega) + 2 \cdot 1_{M^c}(\omega)$$

Hvis X_T er en s.v., er

$$M = \{X_T \leq 1\} \text{ element i } \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

↯

□

4)

Påstand: $X_{\cdot, \cdot}(\cdot)$ er ikke målelig

Beweis:

Antag modstridende, at $X_{\cdot, \cdot}(\cdot)$ er målelig.

(dvs. $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+) = \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ målelig)

T er en s.v., dvs.,

$\omega \mapsto (\omega, T(\omega)) \mapsto X_{T(\omega)}(\omega)$ er målelig

dvs. X_T er målelig ↯ if 3)

□

Stokastiske Processer

Uge 22/9/03

Forelæsninger: § 2.3-2.4.

Øvelser: Opgaver 4, 5, 6; Exercise 1.

Exercise 1.

Let $X = (X_t)_{t \geq 0}$ be a stochastic process with *independent increments* (i.e. random variables X_0 , $X_{t_1} - X_0$, $X_{t_2} - X_{t_1}$, $\dots$, $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ are independent for every $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$).

Prove that each of the following processes is a *martingale* with respect to the natural filtration $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$ of X (recall that $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s \mid 0 \leq s \leq t)$ for $t \geq 0$):

- (1) $X_t - E(X_t)$, if $E|X_t| < \infty$ for all t ;
- (2) $(X_t - E(X_t))^2 - E(X_t - E(X_t))^2$, if $E|X_t|^2 < \infty$ for all t ;
- (3) $e^{\lambda X_t} / E(e^{\lambda X_t})$, if $E(e^{\lambda X_t}) < \infty$ for all t ;

where $\lambda \in \mathbb{R}$ is given and fixed.

Stokastiske Processer TØ m. 4

opgave 4, 5, 6 $\rightarrow$ se TØ m. 3

Exercise 1

$(X_t)_{t \geq 0}$ s.p. med uafh. tilvækste, dvs.

$X_0, X_{t_1} - X_0, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ uafh. (*)

$\forall 0 < t_1 < \dots < t_n$

Påstand

De flg. processer er martingaler mht. $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$

$(\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s, s \leq t))$

(1) $X_t - E[X_t]$, hvis $(X_t) \in L^1(P)$

(2) $(X_t - E[X_t])^2 - E[(X_t - E[X_t])^2]$, hvis $(X_t) \in L^2(P)$

(3) $e^{\lambda X_t} / E[e^{\lambda X_t}]$, hvis $(e^{\lambda X_t}) \in L^1(P)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Beweis:

$t_1 \leq t_2$:

(1)

$$E[X_{t_2} - E[X_{t_2}] | \mathcal{F}_{t_1}^X] =$$

$$E[X_{t_2} - X_{t_1} - E[X_{t_2} - X_{t_1}] + X_{t_1} - E[X_{t_1}] | \mathcal{F}_{t_1}^X]$$

$$= E[X_{t_2} - X_{t_1}] - E[X_{t_2} - X_{t_1}] + X_{t_1} - E[X_{t_1}]$$

(*)
+ regneregler
for BM

$$= X_{t_1} - E[X_{t_1}]$$

(b.m. ovenstående giver mening, da $(X_t) \in L^1(P)$)

(2)

$$\begin{aligned}
& E[(X_{t_2} - E[X_{t_2}])^2 - E[(X_{t_2} - E[X_{t_2}])^2] | \mathcal{F}_{t_1}^X] \\
&= E[(X_{t_2} - X_{t_1} - E[X_{t_2} - X_{t_1}] + X_{t_1} - E[X_{t_1}])^2 \\
&\quad - E[(X_{t_2} - X_{t_1} - E[X_{t_2} - X_{t_1}] + X_{t_1} - E[X_{t_1}])^2] | \mathcal{F}_{t_1}^X] \\
&= E[(X_{t_2} - X_{t_1} - E[X_{t_2} - X_{t_1}])^2 + (X_{t_1} - E[X_{t_1}])^2 + 2(X_{t_2} - X_{t_1} - E[X_{t_2} - X_{t_1}])(X_{t_1} - E[X_{t_1}]) \\
&\quad - E[(X_{t_2} - X_{t_1} - E[X_{t_2} - X_{t_1}])^2] - E[(X_{t_1} - E[X_{t_1}])^2] \\
&\quad - 2E[(X_{t_2} - X_{t_1} - E[X_{t_2} - X_{t_1}])(X_{t_1} - E[X_{t_1}])] | \mathcal{F}_{t_1}^X] \\
&= E[(X_{t_2} - X_{t_1} - E[X_{t_2} - X_{t_1}])^2] + (X_{t_1} - E[X_{t_1}])^2 \\
&\quad + 2E[(X_{t_2} - X_{t_1} - E[X_{t_2} - X_{t_1}])(X_{t_1} - E[X_{t_1}])] \\
&\quad - E[(X_{t_2} - X_{t_1} - E[X_{t_2} - X_{t_1}])^2] - E[(X_{t_1} - E[X_{t_1}])^2] \\
&= (X_{t_1} - E[X_{t_1}])^2 - E[(X_{t_1} - E[X_{t_1}])^2]
\end{aligned}$$

Ovinstående gjev mening, idet $(X_t) \subseteq L^2(P)$

(3)

$$\begin{aligned}
& E[e^{\lambda X_{t_2}} / E[e^{\lambda X_{t_2}}] | \mathcal{F}_{t_1}^X] \\
&= E[e^{\lambda X_{t_2}}]^{-1} E[e^{\lambda(X_{t_2} - X_{t_1}) + \lambda X_{t_1}} | \mathcal{F}_{t_1}^X] \\
&= E[e^{\lambda X_{t_2}}]^{-1} e^{\lambda X_{t_1}} E[e^{\lambda(X_{t_2} - X_{t_1})}] \\
&= E[e^{\lambda X_{t_1}}]^{-1} e^{\lambda X_{t_1}} E[e^{\lambda(X_{t_2} - X_{t_1})}]^{-1} E[e^{\lambda(X_{t_2} - X_{t_1})}] \\
&= e^{\lambda X_{t_1}} / E[e^{\lambda X_{t_1}}]
\end{aligned}$$

(*)
+ Tonelli-Fubini

Ovinstående gjev mening da $(e^{\lambda X_t}) \subseteq L^1(P)$

□

Institut for Matematiske Fag
Aarhus Universitet

Den 24. september 2003

Stokastiske Processer

Uge 29/9/03

Forelæsninger: § 2.4-2.6 (2.7 overspringes).

Øvelser: Exercise 1 (uge 22/9/03); Opgaver 10, 11, 12.

Goran Peskir

Stokastiske Processer, TD nr. 5

Exercise 1 $\rightarrow$ se TD nr. 4

opgave 10

X, Y s.v.

Påstand: $X \perp\!\!\!\perp Y, X+Y \in L^1(P) \implies X, Y \in L^1(P)$

Beris:

$\forall a, t \in \mathbb{R}_+$

$$\{X > t+a, Y > -a\} \cup \{X < -t-a, Y < a\} \subseteq \{|X+Y| > t\}$$

$\Downarrow X \perp\!\!\!\perp Y + P$ på disj. mængder.

$$P(|X+Y| > t) \geq P(X > t+a)P(Y > -a) + P(X < -t-a)P(Y < a)$$

$$\Downarrow \text{Sæt } c(a) := P(Y > -a) \wedge P(Y < a) \leq 1$$

$$P(|X+Y| > t) \geq c(a) P(|X| > t+a)$$

$$\int |X| dP = \underbrace{\text{Integrationsformel}}_{\text{s.s. 1.5.2 notat}} \int_0^\infty P(|X| > t) dt$$

$$= \underbrace{k_1 + k_2}_{\text{ikke konstante}} \int_0^\infty c(a) P(|X| > t+a) dt$$

$$\leq k_1 + k_2 \int_0^\infty P(|X+Y| > t) dt = k_1 + k_2 E[|X+Y|] < \infty$$

int. formel igen

Dvs. $X \in L^1(P)$ (tilsvarende vises, at $Y \in L^1(P)$)

□

Lad (X_t) betegne en s.p. med uafh. stationære tilfælde (tilfældigheder $\mathbb{R}$)

Påstand: $\exists t > 0: X_t \in L^1(P) \Rightarrow \forall t \geq 0: X_t \in L^1(P)$

Bevis:

$s < t$:

$s=0$: $X_t - X_0 \perp X_0$ $X_t = (X_t - X_0) + X_0 \in L^1(P)$
 $\Rightarrow X_0 \in L^1(P)$ (jvf. den følgende påstand)

$0 < s < t$:

$X_t - X_s, X_s - X_0, X_0$ uafh., specielt

$X_t - X_s \perp X_s$

$X_t = (X_t - X_s) + X_s \in L^1(P) \xRightarrow{\text{følgende}} X_s \in L^1(P)$

$s > t$:

Velg $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = s$, $\forall i: t_i - t_{i-1} < t$

$X_s = (X_s - X_{t_{n-1}}) + \dots + (X_{t_1} - X_{t_0}) + X_{t_0}$

$(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) \sim X_{t_i - t_{i-1}} \in L^1(P) \Rightarrow X_s \in L^1(P)$

□

opgave 11

$(X_t)_{t \geq 0}$ s.p. tilstandsrum $\mathbb{R}$

1)

Påstand: (X_t) Levy proces mht. et filter $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$
da har (X_t) uafh. tilvækste

Beweis:

Lad $0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$ vilk.

$\sigma(X_0) \subseteq \mathcal{F}_0$, dvs. $\sigma(X_0) \perp \sigma(X_u - X_0 | u \geq t)$

$\sigma(X_{t_1} - X_0) \subseteq \mathcal{F}_{t_1}$, dvs. $\sigma(X_0) \perp \sigma(X_{t_1} - X_0) \perp \sigma(X_u - X_{t_1} | u \geq t_1)$

$\vdots$

$\sigma(X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \subseteq \sigma(X_u - X_{t_{n-1}} | u \geq t_{n-1})$

$\Rightarrow \sigma(X_0) \perp \sigma(X_{t_1} - X_0) \perp \dots \perp \sigma(X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$

□

Påstand: Hvis (X_t) har højrechent. udfaldsfht. og uafh. stationære tilvækste, så er (X_t) en Levy proces mht. til sit naturlige filter $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$

Beweis:

1) $X_t - X_s$ afh. kun af $t-s$, og $s < t$ (stationære tilvækste)

2) $\mathcal{F}_t^X \perp \sigma(X_u - X_t | u \geq t)$ (da (X_t) har uafh. tilvækste)

3) Alle udfaldsfht. er højrechent. (trivielt ud fra antagelsen)

J.f. s 2-4 er (X_t) en Levy proces mht. $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$

□

Opgave 12

$(X_t)_{t \leq t_0}$ s.p. def. på $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \leq t_0})$
med vilk. måleligt rum $(S, \mathcal{B})$ som tilstandsrum

Antag (X_t) er progressivt målelig mht. $(\mathcal{F}_t)_{t \leq t_0}$

T udvidet stop tid $(\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, t \leq t_0)$

Påstand: $(X_{T \wedge t})_{t \leq t_0}$ er en s.p. tilpasset $(\mathcal{F}_t)_{t \leq t_0}$

Beris:

Jvf. opg. 4 3^o) er $\mathcal{F}_{T \wedge t} \subseteq \mathcal{F}_t$

da $T \wedge t$ er $\mathcal{F}_{T \wedge t}$ -målelig jvf. opg. 4 2^o) er

$T \wedge t$ altså også $\mathcal{F}_t$ -målelig.

$\omega \mapsto (t, \omega)$ er $(\mathcal{F}_t, \mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t)$ målelig

$(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$, $s \in [0, t]$ er (da (X_t) er progressiv
målelig) $(\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t, \mathcal{B})$ målelig, jvf. resultatet om
sammensætn. af målelige fkt. er $X_{T \wedge t}(\mathcal{F}_t | \mathcal{B})$
målelig, dvs. $(X_{T \wedge t})$ er $(\mathcal{F}_t)$ -tilpasset

□

Stokastiske Processer

Uge 6/10/03

Forelæsninger: § 3.1, 3.2.

Øvelser: Opgave 1 (ned); Opgave 15: (1°)-(4°); (6.5) Eksempel (s.A-38); (6.8) Eksempel (s.A-39).

Goran Peskir

Opgave 1

1) Lad (X_t) og (Y_t) betegne to versioner med tilstandsrum $\mathbb{R}^n$, som begge har luttet højrekontinuerte udfaldsfunktioner. For enhver åben mængde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ har $T_U(X)$ og $T_U(Y)$ da samme fordeling og ligeledes

$$\underline{X_{T_U(X)} \cdot \mathbf{1}_{\{T_U(X) < \infty\}}} \text{ og } \underline{Y_{T_U(Y)} \cdot \mathbf{1}_{\{T_U(Y) < \infty\}}},$$

hvor $T_U(X)$ og $T_U(Y)$ betegner første Hitting Time til U for h.h.v. (X_t) og (Y_t) . Bevis for 1). Da vi senere skal benytte, at $T_U(X)$ og $T_U(Y)$ er identisk fordelte, vil jeg kort argumentere for dette. Definer for ethvert $n \geq 1$

$$T_U^n(X) = \inf\{k/2^n > 0 \mid X_{k/2^n} \in U\}$$

og tilsvarende $T_U^n(Y)$. Bemærk at de indførte variable er aftagende i n . Umiddelbar anvendelse af definitionen viser, at

$$\begin{aligned} P(T_U^n(X) = k/2^n) &= P(X_{1/2^n} \notin U, \dots, X_{(k-1)/2^n} \notin U, X_{k/2^n} \in U) \\ &= P(Y_{1/2^n} \notin U, \dots, Y_{(k-1)/2^n} \notin U, Y_{k/2^n} \in U) = P(T_U^n(Y) = k/2^n) \end{aligned}$$

for alle k , d.v.s. $T_U^n(X)$ og $T_U^n(Y)$ har samme fordeling for ethvert n . Heraf følger påstanden, thi højrekontinuiteten og det faktum, at U er åben, bevirker, at

$$T_U^n(X) \downarrow T_U(X) \text{ og } T_U^n(Y) \downarrow T_U(Y)$$

punktvis, og denne konvergensform implicerer som bekendt konvergens i fordeling.

Stokastiske Processer, TØ nr. 6

Opgave 1 på US

Påstand: $(X_t), (Y_t), t \geq 0$ er to versioner med tilstandsrum $\mathbb{R}^n$, og med højrekont. udfaldsfkt.

$$\forall U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ åbne: } T_U(X) \sim T_U(Y)$$

($T_U(Z)$ er første Hitting Time for U mht. (Z_t))

$$\text{og } X_{T_U(X)} 1_{\{T_U(X) < \infty\}} \sim Y_{T_U(Y)} 1_{\{T_U(Y) < \infty\}}$$

Beweis:

Jvf. bm. s. 1-22 er $T_U(X), T_U(Y)$ udelukkende stoptider, idet $\{T_U(X) < t\} = \bigcup_{\substack{0 \leq s < t \\ s \in \mathbb{Q}}} \{X_s \in U\} \in \mathcal{F}_t$

$$\text{og } \{T_U(Y) < t\} = \bigcup_{\substack{0 \leq s < t \\ s \in \mathbb{Q}}} \{Y_s \in U\} \in \mathcal{F}_t$$

(dvs. $T_U(X), T_U(Y)$ er målelig mht. hh. $\mathcal{F}_{T_U(X)+}, \mathcal{F}_{T_U(Y)+}$ jvf. opg. 4 2° + opg. 5)

$$T_U^n(X) := \inf \{k/2^n > 0 \mid X_{k/2^n} \in U\} \quad (\text{tilsv. for } Y)$$

$$(\text{Bm } T_U^n(X) \geq T_U^{n+1}(X))$$

$$P(T_U^n(X) = k/2^n) = P(X_{1/2^n} \notin U, \dots, X_{k-1/2^n} \notin U, X_{k/2^n} \in U)$$

$$\stackrel{X, Y \text{ versioner}}{=} P(Y_{1/2^n} \notin U, \dots, Y_{k-1/2^n} \notin U, Y_{k/2^n} \in U) = P(T_U(Y) = k/2^n)$$

$$\text{Dvs. } T_U^n(X) \sim T_U^n(Y), n \geq 1$$

$$\{T_0(X) = \infty\} = \{T_0^{\wedge}(X) = \infty\} \quad n \geq 1 \quad (\text{hls. for } \mathbb{E}) \quad (*)$$

For $\omega \in \{T_0(X) < \infty\}$ er det klart, at

$$T_0^{\wedge}(X)(\omega) \downarrow T_0(X)(\omega) \quad (\text{hls. for } \mathbb{E})$$

da $t \mapsto X_t$ er højrekont.

$$\text{Dvs. } T_0^{\wedge}(X) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T_0(X) \implies T_0^{\wedge}(X) \simeq T_0(X)$$

(hls. for $\mathbb{E}$)

Dvs. j-f. entydighed af 'grænsefordeling' at

$$T_0(X) \sim T_0(\mathbb{E})$$

$$X_{T_0^{\wedge}(X)} 1_{\{T_0^{\wedge}(X) < \infty\}} = \sum_{k=1}^{\infty} X_{k/2^n} 1_{\{T_0^{\wedge}(X) = k\}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X_{T_0(X)} 1_{\{T_0(X) < \infty\}}$$

pga. højrekont.

$$P(X_{T_0^{\wedge}(X)} 1_{\{T_0^{\wedge}(X) < \infty\}} \leq a) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X_{k/2^n} \in U, \dots, X_{k/2^n} \in U, X_{k/2^n} \leq a)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(X_{k/2^n} \in U, \dots, X_{k/2^n} \in U, X_{k/2^n} \leq a) = P(X_{T_0^{\wedge}(\mathbb{E})} 1_{\{T_0^{\wedge}(\mathbb{E}) < \infty\}} \leq a),$$

$a \leq 0$, hvis $0 \leq a$ skal der tilføjes ss. $P(T_0^{\wedge}(X) = \infty)$

på v.s. og $P(T_0^{\wedge}(\mathbb{E}) = \infty)$ på h.s. men husk $(*)$!

Resten følg af entydighedsætn. for mål

□

Opgave 15

$(X_t)_{t \geq 0}$ Levy proces mht. $(F_t)_{t \geq 0}$, $X_0 \equiv 0$

$$u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+: \Phi_t(u) := E[e^{uX_t}] \quad (0 < \Phi_t(u) < \infty)$$

$$\text{Antag } u \in \mathbb{R}: \Phi_1(u) = E[e^{uX_1}] < \infty$$

$$\text{Påstand: } \Phi_t(u) = (\Phi_1(u))^t, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

Beweis:

Da $X_0 \equiv 0$ u $X_t \perp X_s$, $0 < s < t$

Dus. $0 \leq s < t$: $\Phi_{t+s}(u) = \Phi_t(u) \Phi_s(u)$ (Tonelli-Fubini) (*)

$\Downarrow$

$\forall q \in \mathbb{Q}_+$ ($q = \frac{n}{m}$):

$$\Phi_q(u) = \Phi_{\frac{n}{m}}(u) = (\Phi_{\frac{1}{m}}(u))^n = (\Phi_1(u))^{\frac{n}{m}} = (\Phi_1(u))^q, \text{ idet}$$

$$\Phi_1(u) = (\Phi_{1/m}(u))^m$$

Idet udfaldsft. u højrekont.: $e^{uX_{t_n}} \downarrow e^{uX_t}$

$(t_n) \subseteq \mathbb{Q}_+$, $t_n \downarrow t \in \mathbb{R}_+$, dus. jvf. Fatous Lemma:

$$\Phi_t(u) \leq \liminf_n (\Phi_1(u))^{t_n} = (\Phi_1(u))^t$$

$$\text{Dus. } \Phi_t(u) \leq (\Phi_1(u))^t, \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (+)$$

$$\text{Jvf. (*) : } \Phi_t(u) = \frac{\Phi_{t+s}(u)}{\Phi_s(u)} \quad (t \in \mathbb{R}_+, t+s \in \mathbb{Q}_+)$$

$$= \frac{(\Phi_1(u))^{t+s}}{\Phi_s(u)} \underset{(+)}{\geq} \frac{(\Phi_1(u))^{t+s}}{(\Phi_1(u))^s} = (\Phi_1(u))^t$$

$$\Rightarrow \Phi_t(u) = (\Phi_1(u))^t$$

□

(6.5) Eksempel (sA-38)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ss-rum

$\mathcal{B}$ = mgt. af begrænsede reelle s.v. på $(\Omega, \mathcal{F})$

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ del- σ -alg. af $\mathcal{F}$

Påstand: Antag $\forall A \in \mathcal{A} : P(A|B) = P(A|C)$

(dvs. jvf. def., at $E[1_A|B] = E[1_A|C]$, $A \in \mathcal{A}$)

Da gælder $\forall Z \in L^1(\mathcal{A}, P) : E[Z|B] = E[Z|C]$

Bevis:

$\mathcal{H} := \{Z \in \mathcal{B} \mid E[Z|B] = E[Z|C], Z \text{ } \mathcal{A}\text{-målbar}\}$

Jvf. regneregler for Bm. er $\mathcal{H}$ et MVR

$\mathcal{R} := \{1_A \mid A \in \mathcal{A}\}$ ($\mathcal{R}$ multiplikativ mgt. af begrænsede fkt.)

Pr. Antagelse gælder $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{H}$, men

$\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{A}$, dvs. jvf. Monoton Klasse Lemma

er alle $\mathcal{A}$ -målbare fkt. i $\mathcal{B}$ i $\mathcal{H}$ (*)

$Z \in L^1(\mathcal{A}, P) : Z^+ \wedge n \uparrow Z^+, Z^- \wedge n \uparrow Z^-$

Da $Z^+ \wedge n, Z^- \wedge n \in \mathcal{H}$, nzt følger jvf. regneregler om monoton konvergens af Bm., at

$$E[Z|B] = \lim_{n \rightarrow \infty} (E[Z^+ \wedge n|B] - E[Z^- \wedge n|B])$$

$$\stackrel{(*)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (E[Z^+ \wedge n|C] - E[Z^- \wedge n|C]) = E[Z|C]$$

□

(6.8) Eksempel (Nyttig Regel) s. A-39

$(S, \mathcal{B})$ vilk. måleligt rum

X, Y s.v. def. på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med tilstandrum S

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ del- σ -alg.

Påstand:

$X \perp\!\!\!\perp \mathcal{A}$, Y vilk. målelig, $f(\cdot, \cdot)$ reel begrænset $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ -målelig fkt. på $S \times S$:

$$E[f(X, Y) | \mathcal{A}] = E[f(X, y)]_{y=Y}$$

Beris:

$\mathcal{H} := \{f(\cdot, \cdot) \text{ reel begrænset } \mathcal{B} \times \mathcal{B}\text{-målelig fkt. på } S \times S:$

$$E[f(X, Y) | \mathcal{A}] = E[f(X, y)]_{y=Y}\}$$

Jf. regnearbejde for Bm. er $\mathcal{H}$ et MVR

$\mathcal{R} := \{f(\cdot, \cdot) \text{ reel begrænset } \mathcal{B} \times \mathcal{B}\text{-målelig fkt. på } S \times S:$

$\exists g, h \text{ reelle begrænsede } \mathcal{B}\text{-målelige fkt. på } S:$

$$f = g \cdot h\}$$

$f \in \mathcal{R}: (g, h: f = g \cdot h)$

$$E[f(X, Y) | \mathcal{A}] = \underset{\substack{\text{regnearbejde} \\ \text{for Bm}}}{h(Y) E[g(X)]} = h(y) E[g(X)]_{y=Y}$$

$$= E[h(y) g(X)]_{y=Y} = E[f(X, y)]_{y=Y}$$

Dvs. $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{H}$, da $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ jf. def. på produkt σ -alg. følger det umiddelbart af Monoton Konvergens Lemma $\square$

Stokastiske Processer

Uge 27/10/03

Forelæsninger: § 3.2, 3.3; (§ 3.4 overspringes).

Øvelser: Opgaver 21, 22, 29.

N.B. Due to the autumn holiday there will be no lectures in the following two weeks. The lectures will resume on 28 October 2003.

Goran Peskir

Stokastiske Processer, TD nr. 7

opgave 21

$(N_t)_{t \geq 0}$ Poissonproces med intensitet $\lambda > 0$

Påstand: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} = \lambda$ n.o.

Bevis:

$$P\left(\left|\frac{N_t}{t} - \lambda\right| \geq \varepsilon\right) \stackrel{\text{Markov}}{\leq} \frac{1}{\varepsilon^2} E\left[\left(\frac{N_t}{t} - \lambda\right)^2\right]$$

$$\begin{aligned} E\left[\left(\frac{N_t}{t} - \lambda\right)^2\right] &= \frac{1}{t^2} E[N_t^2] + \lambda^2 - 2\frac{\lambda}{t} E[N_t] \\ &= \frac{1}{t^2}(\lambda t + \lambda^2 t^2) + \lambda^2 - 2\frac{\lambda}{t} \lambda t = \frac{\lambda}{t} + \lambda^2 + \lambda^2 - 2\lambda^2 = \frac{\lambda}{t} \end{aligned}$$

$$\text{Dus. } P\left(\sup_{2^n \leq t \leq 2^{n+1}} \left|\frac{N_t}{t} - \lambda\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\lambda}{\varepsilon 2^n}$$

Af det faste Borel-Cantelli lemma følger, at

$$P\left(\limsup_n \left\{ \sup_{2^n \leq t \leq 2^{n+1}} \left|\frac{N_t}{t} - \lambda\right| \geq \varepsilon \right\}\right) = 0$$

$$\text{Dus. } P\left(\liminf_n \left\{ \sup_{2^n \leq t \leq 2^{n+1}} \left|\frac{N_t}{t} - \lambda\right| < \varepsilon \right\}\right) = 1$$

Altså gælder $\frac{N_t}{t} \rightarrow \lambda, t \rightarrow \infty$

□

opgave 22

$N = (N_t)_{t \geq 0}$ simpel ikke-eksplosiv tælleproces med uafh. stationære tilvækster (N er ikke-triviel, $\exists t > 0: P(N_t > 0) > 0$)

Påstand: N er en Poissonproces

Bevis:

Def. $g(t) := P(N_t = 0)$, $t \geq 0$

Da N er en tælleproces er $N_0 \equiv 0$ (*), dvs. $g(0) = 1$

Da N er en tælleproces er $t \mapsto N_t(\omega)$ ikke-aftagende, $\forall \omega \in \Omega$

Dvs. $\{N_{t_1} = 0\} \supseteq \{N_{t_2} = 0\}$ $t_1 \leq t_2$ og dermed er $g(t)$ ikke-voksende

Da N har uafh. sta. tilvækster og pga. (*) er $N_s \sim N_{s+t} - N_t$

$$\begin{aligned} N_t \perp N_{s+t} &\Rightarrow g(s+t) = P(N_{s+t} = 0) = P(N_{s+t} - N_t = 0, N_t = 0) \\ &= P(N_{s+t} - N_t = 0) P(N_t = 0) = P(N_s = 0) P(N_t = 0) = g(s) g(t) \quad (+) \end{aligned}$$

Da N er ikke-triviel $\exists t > 0: P(N_t > 0) > 0$, dvs. $g(t) =$

$$P(N_t = 0) < 1 \Rightarrow \exists n \geq 1: g(n) < 1 \quad (g \text{ ikke-voksende})$$

$$\Rightarrow g(1) = g(n)^{1/n} < 1$$

$$\text{Hvis } g(1) = 0 \Rightarrow g(n) = g(1)^n = 0 \quad \forall n, \text{ dvs. } 0 < g(1) < 1$$

$$\text{Jf. (+): } \log(g(s+t)) = \log(g(s)) + \log(g(t)) \quad , s, t \geq 0$$

Dette er en funktionsligning for lin. funkt., dvs. $\exists r \in \mathbb{R}$:

$$\log g(s) = rs \Rightarrow g(s) = e^{rs} \quad , \text{ da } g(s) \leq 1, s \in \mathbb{R} \exists \lambda > 0$$

$$(\text{da } g(1) < 1) \quad g(s) = e^{-\lambda s}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ : Z_n(t) := \sum_{i=1}^n 1_{\{N_{it/n} - N_{(i-1)t/n} > 0\}}$$

Da N er ikke-eksplosiv gælder $\forall t \in \mathbb{R}_+, \omega \in \Omega : N_t(\omega) < \infty$

og jf. s. 2-31 + 2-32 er $N_t - N_{t-} \in \{0, 1\}$ (X)

Da N er en tælleproces er alleudfaldsfilen højekont., dvs.

$$\text{jf. (X) er } \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(t) = N_t \quad (+)$$

$$P(Z_n = k) = \binom{n}{k} P(N_{t/n} > 0)^k (1 - P(N_{t/n} > 0))^{n-k} \quad k=0, \dots, n$$

idet N_t har uafh. stationære tilækster

$$= \binom{n}{k} (1 - g(t/n))^k g(t/n)^{n-k}, \text{ dvs. } Z_n \sim \text{bi}(n, 1 - e^{-\lambda t/n})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n (1 - e^{-\lambda t/n}) = \lim_{\text{L'Hopital } n \rightarrow \infty} -\frac{\lambda t}{n^2} e^{-\lambda t/n} / -1/n^2 = \lambda t$$

Jvf. SS2 TØ m. 23 2002/2003 opg. 1 $Z_n(t) \xrightarrow{d} \text{po}(\lambda t)$

Da $Z_n(t) \xrightarrow{d} N_t$, jf. (+) og pga. entydighed af grænsefordeling er $N_t \sim \text{po}(\lambda t)$.

Vi ser, at N_t opfylder 0^o - 3^o s. 3-1 dvs.

N er en Poissonproces.

□

opgave 29

$(M_t)_{t \geq 0}$ Poissonproces med intensitet $\lambda > 0$

$(K_t)_{t \geq 0}$ — — — — — $\mu > 0$

$$\sigma((M_t)_{t \geq 0}) \perp \sigma((K_t)_{t \geq 0})$$

$$N_t := M_t + K_t, \quad t \geq 0$$

1)

Det er klart ud fra 0°) - 3°) s. 3-1 at $(N_t)_{t \geq 0}$ er en Poissonproces, da $M_t \perp K_t \Rightarrow N_t \sim \text{po}(\lambda + \mu)$, $t \geq 0$ intensiteten af (N_t) er altså $\lambda + \mu$.

2)

$$n \in \mathbb{Z}_+$$

$$\begin{aligned} P(K_t = k | N_t = n) &= \frac{P(K_t = k, N_t = n)}{P(N_t = n)} \\ &= \frac{P(K_t = k, M_t = n - k)}{P(N_t = n)} = \frac{P(K_t = k) P(M_t = n - k)}{P(N_t = n)} \\ &= \frac{\frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t} \frac{(\lambda t)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda t}}{\frac{((\mu + \lambda)t)^n}{n!} e^{-(\mu + \lambda)t}} = \binom{n}{k} \left(\frac{\mu}{\mu + \lambda} \right)^k \left(\frac{\lambda}{\mu + \lambda} \right)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n \end{aligned}$$

3)

$$T := \inf \{ t \geq 0 \mid N_t > 0 \}$$

$$T_1 := \inf \{ t \geq 0 \mid M_t > 0 \}, \quad T_2 := \inf \{ t \geq 0 \mid K_t > 0 \}$$

Pga. højekart. af udfaldst. $\sim$

$$A = \{\text{første ankomst er en kvinde (K)}\} = \{T = T_2\}$$

Jf. opg. 4 2^o) er T_1, T_2 uafhængige flt.

$$P(T \leq t) = P(\underbrace{N_t > 0}_{\text{N}_t \text{ uafhængig af } T_1 \text{ og } T_2}) = 1 - e^{-(\mu + \lambda)t}, \text{ dvs. } T \sim \text{Exp}(\mu + \lambda)$$

Tilsvarende ses, at $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$, $T_2 \sim \text{Exp}(\mu)$

$$\text{Da } P(M_{t_1} > 0, K_{t_2} > 0) = P(M_{t_1} > 0) P(K_{t_2} > 0)$$

$$\text{ses at } P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2) = P(T_1 \leq t_1) P(T_2 \leq t_2)$$

altså $T_1 \perp T_2$ (j.f. SS1)

$$T_1 \wedge T_2 = T \quad (\text{første ankomst er enten fra M el. K})$$

$$P(T \leq t, A) = P(T \leq t, T = T_2)$$

$$= P(T_1 \wedge T_2 \leq t, T_1 \wedge T_2 = T_2)$$

$$= P(T_2 \leq t, T_1 \wedge T_2 = T_2)$$

$$= P(T_2 \leq t, T_1 \geq T_2)$$

$$= \int_B dP_{(T_1, T_2)} \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x \geq y, y \leq t\}$$

$$= \int_{[t, \infty) \times [0, t]} dP_{(T_1, T_2)} + \int_{\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x \geq y, x \leq t\}} dP_{(T_1, T_2)}$$

$$= \int_t^\infty \int_0^t dP_{T_2} dP_{T_1} + \int_0^t \int_0^x dP_{T_2}(y) dP_{T_1}(x) \quad (\text{Tonelli-Fubini})$$

$$= P(T_1 > t) P(T_2 \leq t) + \int_0^t P(T_2 \leq x) dP_{T_1}(x)$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - 1 + e^{-\lambda t})(1 - e^{-\mu t}) + \int_0^t (1 - e^{-\mu x}) dP_{T_1}(x) \\
&= e^{-\lambda t} - e^{-(\mu+\lambda)t} + \int_0^t (1 - e^{-\mu x}) \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= e^{-\lambda t} - e^{-(\mu+\lambda)t} + \lambda \int_0^t (e^{-\lambda x} - e^{-(\lambda+\mu)x}) dx \\
&= e^{-\lambda t} - e^{-(\mu+\lambda)t} + [-e^{-\lambda x}]_0^t + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} [e^{-(\lambda+\mu)x}]_0^t \\
&= 1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + e^{-(\mu+\lambda)t} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} - 1 \right) \\
&= \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right) (1 - e^{-(\mu+\lambda)t}) \\
&= \frac{\mu}{\lambda+\mu} P(T \leq t)
\end{aligned}$$

$$P(A) = P(T = T_2) = P(T_1 \geq T_2) = \int_{\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x \geq y\}} dP_{(T_1, T_2)}$$

$$= \int_0^\infty \int_0^x dP_{T_2}(y) dP_{T_1}(x) = \int_0^\infty P(T_2 \leq x) dP_{T_1}(x)$$

Tonelli-Fubini

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty (1 - e^{-\mu x}) \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^\infty + \frac{\lambda}{\mu+\lambda} [e^{-(\mu+\lambda)x}]_0^\infty \\
&= 1 - \frac{\lambda}{\mu+\lambda} = \frac{\mu}{\mu+\lambda}, \text{ dus,}
\end{aligned}$$

$$P(T \leq t, A) = P(T \leq t) P(A)$$

$$\text{Also } T \perp A \text{ of } P(A) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

Stokastiske Processer

Uge 3/11/03

Forelæsninger: § 4.1, 4.2.

Øvelser: Opgaver 29, 30, 31.

Hint for 3°) in Exercise 29: Let T_1 denote the time of the first jump of the process $(M_t)_{t \geq 0}$, let T_2 denote the time of the first jump of the process $(K_t)_{t \geq 0}$, and let T denote the time of the first jump of the process $(N_t)_{t \geq 0}$. Then (explain why):

- (1) $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$, $T_2 \sim \text{Exp}(\mu)$, $T \sim \text{Exp}(\lambda + \mu)$
- (2) T_1 and T_2 are independent
- (3) $T = T_1 \wedge T_2$.

Next note that $A = \{T = T_2\}$ and prove (using (1)-(3) above) that

$$P(\{T \leq t\} \cap A) = P\{T \leq t\}P(A)$$

for all $t \geq 0$. Argue that this implies that T and A are independent.

Stokastiske Processer, TØ nr. 8

opgave 29 → se TØ nr. 7

opgave 30

$(N_t)_{t \geq 0}$ Poissonproces m. intensitet $\lambda > 0$

$(X_n)_{n \geq 1}$ iid. $X_n \sim \text{bi}(1, p)$, $n \geq 1$

$(N_t)_{t \geq 0} \perp\!\!\!\perp (X_n)_{n \geq 1}$

(*)

$$K_t := \sum_{n=1}^{N_t} X_n, \quad M_t := N_t - K_t = \sum_{n=1}^{N_t} (1 - X_n)$$

1°)

Påstand: For $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, $k_1, m_1, k_2, m_2, \dots, k_n, m_n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} P(K_{t_i} - K_{t_{i-1}} = k_i, M_{t_i} - M_{t_{i-1}} = m_i, i=1, \dots, n) \\ = \prod_{i=1}^n P_0(p\lambda(t_i - t_{i-1}), k_i) \cdot \prod_{i=1}^n P_0((1-p)\lambda(t_i - t_{i-1}), m_i) \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} P(K_{t_i} - K_{t_{i-1}} = k_i, M_{t_i} - M_{t_{i-1}} = m_i, i=1, \dots, n) \\ = P(K_{t_i} - K_{t_{i-1}} = k_i, N_{t_i} - N_{t_{i-1}} = m_i + k_i, i=1, \dots, n) \\ = P\left(\sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} X_j = k_i, N_{t_i} - N_{t_{i-1}} = m_i + k_i, i=1, \dots, n\right) \\ = \prod_{i=1}^n P\left(\sum_{j=1}^{m_i+k_i} X_j = k_i\right) \prod_{i=1}^n P(N_{t_i-t_{i-1}} = m_i + k_i) \end{aligned}$$

$$= \prod_{i=1}^n \binom{m_i+k_i}{k_i} p^{k_i} (1-p)^{m_i} \prod_{i=1}^n e^{-(t_i-t_{i-1})\lambda} \frac{(\lambda(t_i-t_{i-1}))^{m_i+k_i}}{(m_i+k_i)!}$$

$$= \prod_{i=1}^n e^{-p(t_i-t_{i-1})\lambda} \frac{(p(t_i-t_{i-1})\lambda)^{k_i}}{k_i!} \prod_{i=1}^n e^{-(1-p)(t_i-t_{i-1})\lambda} \frac{((1-p)(t_i-t_{i-1})\lambda)^{m_i}}{m_i!}$$

□

2°)

Påstand: $(K_t)_{t \geq 0}$, $(M_t)_{t \geq 0}$ er uafh. Poissonprocesser med intensitet hh. $p\lambda$ og $(1-p)\lambda$

Beweis:

1°) giver, at $(K_t)_{t \geq 0}$, $(M_t)_{t \geq 0}$ har uafh. stationære tilvækster og for enhver inddeling $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ er $(K_{t_1} - K_0, \dots, K_{t_n} - K_{t_{n-1}}) \perp (M_{t_1} - M_0, \dots, M_{t_n} - M_{t_{n-1}})$ og vi kan derfor konkludere $(K_t)_{t \geq 0} \perp (M_t)_{t \geq 0}$

Pr. def. af $(K_t), (M_t)$ gælder at tilstandsrummet er $\mathbb{Z}_+$

Vi har altså indset, at 0°) + 2°) på s. 3-1 er opfyldt.

Af def ses endvidere, at $N_0 = K_0 + M_0$, $K_0 = 0$ n.o.

da $N_0 = 0$ n.o., dvs. da $K_t = K_t - K_0$, $M_t = M_t - M_0$,

har vi vist 3°) og delvist 1°) s. 3-1, da

det foregående delpg. 1°) giver $K_t - K_0 \sim \text{po}(t p \lambda)$

$M_t - M_0 \sim \text{po}(t (1-p) \lambda)$ (Dvs. intensiteten af (K_t) er $p\lambda$ og intensiteten af (M_t) er $(1-p)\lambda$)

Pr. def af $(K_t), (M_t)$ ses derudover, at da udfaldsfkt. er ikke-aftagende og højrekont. for (N_t) , er dette også gældende for $(K_t), (M_t)$

□

opgave 31

$(I_n)_{n \geq 1}$ iid s.v.

$(N_t)_{t \geq 0}$ Poissonproces med intensitet $\lambda > 0$

(*)

$(I_n) \perp (N_t)$

$$X_t := \sum_{k=1}^{N_t} I_k \quad (\text{Bm. } N_t = 0 \Rightarrow X_t = 0) \quad , t \geq 0$$

(X_t) betegnes en sammensat Poissonproces

$$V_t := (X_t, N_t) \quad , t \geq 0$$

$$\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_t^V \quad \text{vi ser, at } \mathcal{F}_t^X, \mathcal{F}_t^N \subseteq \mathcal{F}_t$$

1.)

Påstand: $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \leq x_i, N_{t_i} - N_{t_{i-1}} = k_i\}\right) \\ = \prod_{i=1}^n P(X_{t_i - t_{i-1}} \leq x_i, N_{t_i - t_{i-1}} = k_i) \end{aligned}$$

Beris:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \leq x_i, N_{t_i} - N_{t_{i-1}} = k_i\}\right) \\ = P\left(\bigcap_{i=1}^n \left\{\sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} I_j \leq x_i, N_{t_i} - N_{t_{i-1}} = k_i\right\}\right) \\ = \prod_{i=1}^n P\left(\sum_{j=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} I_j \leq x_i, N_{t_i} - N_{t_{i-1}} = k_i\right) \end{aligned}$$

$$\stackrel{(*)}{=} \prod_{i=1}^n P(X_{t_i - t_{i-1}} \leq x_i, N_{t_i - t_{i-1}} = k_i)$$

□

Påstand: $(U_t)_{t \geq 0}$ er en Levy proces mht. $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$

Beweis:

Jvf. det ovenstående resultat har $(U_t)_{t \geq 0}$ uafh. stationære tilvækster mht. $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ da

(N_t) har ikke-aftagende højrekont. udfaldsfkt. ses, at også (U_t) har denne egenskab, jvf. def. på (X_t) .

Dvs. 1) - 3) på s. 2-4 er opfyldt, altså er $(U_t)_{t \geq 0}$ en Levyproces. $\square$

2°)

Påstand: $(X_t)_{t \geq 0}$ er en Levyproces mht. $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$

Beweis:

Jvf. bin. i det følgende bevis har $(X_t)_{t \geq 0}$ ikke-aftagende højrekont. udfaldsfkt.

Da $X_t = \pi(U_t)$, $\pi: (x, y) \mapsto x$

ses, at (X_t) er målelig mht. $(\mathcal{F}_t)$ og da (U_t) har stationære uafh. tilvækster gælder dette for (X_t) , jvf. s. 2-4 er (X_t) en Levyproces. $\square$

3°)

Paßand: $\mathbb{I}_1 \in \mathcal{U}(P) \Rightarrow \forall t \geq 0: E[X_t] = \lambda t E[\mathbb{I}_1]$

Beweis:

Da (N_t) v. illu.-explosiv: $1 = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{N_t=n\}}, t \geq 0$

$$\begin{aligned} E[X_t] &= E\left[X_t \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{N_t=n\}}\right] \\ &= E\left[\sum_{n=0}^{\infty} X_t 1_{\{N_t=n\}}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E[X_t | 1_{\{N_t=n\}}] \quad (\text{monoton konverg.}) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_i | 1_{\{N_t=n\}}\right] = E[\mathbb{I}_1] \sum_{n=0}^{\infty} n P(N_t=n) = E[\mathbb{I}_1] E[N_t] \\ &\quad \begin{matrix} (\mathbb{I}_i) \text{ i.i.d.} \\ (N_t) \text{ iid} \end{matrix} \\ &< \infty, \text{ d.h. } X_t \in \mathcal{U}(P) \end{aligned}$$

Analogt mit densifizierende see, at

$$E[X_t] = E[\mathbb{I}_1] E[N_t] = E[\mathbb{I}_1] \lambda t$$

□

4°)

$$\forall u \in \mathbb{R}: \Psi(u) := E[e^{u\mathbb{I}_1}]$$

Antag $\Psi(u) < \infty$

Paßand: $E[e^{uX_t}] = e^{\lambda t [\Psi(u) - 1]}$

Beweis:

$$\begin{aligned} E[e^{uX_t}] &= E\left[e^{uX_t} \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{N_t=n\}}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[e^{u \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_i} 1_{\{N_t=n\}}\right] \quad (\text{monoton konverg.}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\Psi(u))^n \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Psi(u)\lambda t)^n}{n!} = e^{\lambda t [\Psi(u) - 1]} \end{aligned}$$

$(\mathbb{I}_i) \text{ i.i.d.}$
 $(\mathbb{I}_i) \perp (N_t)$
 $N_t \sim \text{po}(\lambda t)$

□

Institut for Matematiske Fag
Aarhus Universitet

Den 5. november 2003

Stokastiske Processer

Uge 10/11/03

Forelæsninger: § 5.1, 5.2, 6.1.

Øvelser: Opgaver 31, 32, 34, 35.

Goran Peskir

Stokastiske Processer, TØ nr. 9

opgave 31 $\rightarrow$ se TØ nr. 8

opgave 32

$(N_t)_{t \geq 0}$ Poissonproces med intensitet $\lambda > 0$

$(F_t)_{t \geq 0}$, $F_t := F_t^N$, $a \in \mathbb{R}$ vilk.

$U_t := (N_t - \lambda t)^2 - \lambda t$, $V_t := \exp(aN_t - \lambda t(e^a - 1))$, $t \geq 0$

Påstand: $(U_t)_{t \geq 0}$, $(V_t)_{t \geq 0}$ er martingaler (mht $(F_t)_{t \geq 0}$)

Beweis:

At $(U_t)_{t \geq 0}$ er en martingal er en direkte konsekvens af Exercise 1 TØ nr. 4 (idet $E[N_t] = \lambda t$, $\text{Var}(N_t) = \lambda t$)

denne overbeviser sig også, at hvis $E[e^{aN_t}] < \infty$ er $e^{aU_t} / E[e^{aU_t}]$ en martingal, men

$$E[e^{aN_t}] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{an} P(N_t = n) = \sum_{n=0}^{\infty} (e^a \lambda t)^n / n! e^{-\lambda t}$$

$$= e^{\lambda t(e^a - 1)} \quad \text{og dermed har vi vist det ønskede}$$

□

opgave 34

$(W_t)_{t \geq 0}$ Standard Brownish Bevægelse

$(F_t)_{t \geq 0}$, $F_t := \mathcal{F}_t^W$, $a \in \mathbb{R}$ vilk.

$$U_t := W_t^2 - t, \quad V_t := \exp(aW_t - \frac{1}{2}a^2t), \quad t \geq 0$$

Påstand: $(U_t)_{t \geq 0}$, $(V_t)_{t \geq 0}$ er martingaler (mht $(F_t)_{t \geq 0}$)

Basis:

For $t \geq 0$: $W_t \sim N(0, t)$, $E[W_t] = 0$, $\text{Var}(W_t) = t$

$$E[e^{aW_t}] = \int_{\mathbb{R}} e^{ax} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t} dx$$

$$= e^{-\frac{1}{2}a^2t} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{a^2t}{2} + ax - \frac{x^2}{2t}} dx$$

$$= e^{-\frac{1}{2}a^2t} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(x - (-at))^2/2t} dx = e^{-\frac{1}{2}a^2t}$$

Af Exercise 1 og m. 4 følger det ønskede $\square$

opgave 35

$(W_t)_{t \geq 0}$ Standard Brownish Bevægelse

$$V_t := W(t) - tW(1), \quad t \geq 0$$

$$\text{Cov}(V_t, V_s) = \text{Cov}(W_t - tW(1), W_s - sW(1))$$

$$= E[(W_t - tW(1)) - E[W_t - tW(1)]] \\ [(W_s - sW(1)) - E[W_s - sW(1)]]]$$

$$= E[(W_t - tW_1)(W_s - sW_1)]$$

$$= E[W_t W_s] - s E[W_t W_1] - t E[W_1 W_s] + st E[W_1^2]$$

$$= t \wedge s - s \cdot (t \wedge 1) - t (s \wedge 1) + st$$

$$\text{Da } E[W_t W_s] = E[(W_t - W_s) + W_s] W_s$$

$$= E[W_t - W_s] E[W_s] + E[W_s^2] = s, \quad t > s$$

Stokastiske Processer

Uger 17+24 /11/03

Forelæsninger: § 6.1, 6.2, 6.3.

Øvelser: Opgaver 32, 34, 35, 36 (to be presented on 26/11/03).

N.B. There will be **no lectures and exercises on Wednesday 19 November** since I will be abroad. Let us discuss on Tuesday (18 November) about possible times when these lectures and exercises could be held instead.

Goran Peskir

Stokastiske Processer, TØ m. 10

Opgave 32, 34, 35 $\rightarrow$ se TØ m. 9

opgave 36

$(W_t)_{t \geq 0}$ Standard Brownske Bevægelse

$$U_t := e^{-t} W(e^{2t}), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Cov}(U_t, U_s) = E[e^{-t} W_{e^{2t}} e^{-s} W_{e^{2s}}]$$

$E[e^{-v} W_{e^{2v}}] = 0$

$$= e^{-(s+t)} E[W_{e^{2t}} W_{e^{2s}}] = e^{-(s+t)} e^{2(t \wedge s)} = e^{2(t \wedge s) - (s+t)}$$

$$= e^{t \wedge s - t \vee s}$$

$(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ kaldes en stationær Ornstein-Uhlenbeck proces

Påstand: $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ er stationær, dvs.

$t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}$:

$$(U_{t_1}, U_{t_2}, \dots, U_{t_n}) \sim (U_{t_1+h}, \dots, U_{t_n+h})$$

Bevis:

$$(U_{t_1}, U_{t_2}, \dots, U_{t_n}) \sim N_n(\underline{0}, \{\text{Cov}(U_{t_i}, U_{t_j})\}_{i,j})$$

$$\text{Cov}(U_{t_i+h}, U_{t_j+h}) = e^{(t_i+h) \wedge (t_j+h) - (t_i+h) \vee (t_j+h)}$$

$$= e^{t_i \wedge t_j - t_i \vee t_j} = \text{Cov}(U_{t_i}, U_{t_j})$$

□

Institut for Matematiske Fag
Aarhus Universitet

Den 26. november 2003

Stokastiske Processer

Uge 1/12/03

Forelæsninger: § 6.4.

Øvelser: Opgaver 37, 38, 39, 40, 41.

Goran Peskir

Stokastiske Processer, TØ nr. 11

opgave 37

$(W_t)_{t \geq 0}$ Standard Brownish Bevægelse

$$Z_n = \sup_{s \in [0,1]} |W_{n+s} - W_n|, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

1)

Påstand: $(Z_n)_{n \geq 0}$ iid. i $L^1(P)$

Beris:

$\forall s \in [0,1], n \in \mathbb{N}_0$: $W_{n+s} - W_n \sim W_s$, dvs. (Z_n) iid
da $(n, n+s)_{n \in \mathbb{N}_0}$ er disjunkte intervaller.

$$\|Z_1\|_2 = \left\| \sup_{s \in [0,1]} W_s \right\|_2 \leq 2 \sup_{s \in [0,1]} \|W_s\|_2 = 2 < \infty$$

Idet $(W_s)_{s \in [0,1]}$ er en submartingal* og vi bruger Doob's Uighed
Sætn. 1.3 s. 6-3.

$$^* E[W_t | \mathcal{F}_s] = E[W_t - W_s + W_s | \mathcal{F}_s] = W_s \quad (\text{jvf. regneregler for Bm.})$$

□

2)

Påstand: $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n/n = 0$ n.o.

Beris:

Jvf. Kolmogorov's Store Tals Lov: $\sum_{i=1}^n Z_i/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[Z_1]$ n.o.

$$\frac{Z_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i - \sum_{j=1}^{n-1} Z_j}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{n} - \frac{n-1}{n} \frac{\sum_{j=1}^{n-1} Z_j}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{n.o.}$$

□

3°)

$$n_t := \lfloor t \rfloor$$

Påstand: $\lim_{t \rightarrow \infty} W_t/n_t = 0$ n.o.

Beris:

$$|W_t/n_t - W_{n_t}/n_t| \leq \underbrace{Z_{n_t}}_{\text{diff. p.}}/n_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \text{ n.o.}$$

□

4°)

Påstand: $\lim_{t \rightarrow \infty} W_t/t = 0$ n.o.

Beris:

$$\left| \frac{W_t}{t} \right| = \left| \frac{n_t}{t} \frac{W_t}{n_t} \right| \leq \frac{t+1}{t} \left| \frac{W_t}{n_t} \right| = \left(1 + \frac{1}{t}\right) \left| \frac{W_t}{n_t} \right| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \text{ n.o.}$$

□

opgave 38

$(W_t)_{t \geq 0}$ Standard Brownish Bevægelse

$$A := \{\omega \in \Omega \mid \exists s \geq 0: t \mapsto W(t, \omega) \text{ er diff. i } s\} = \bigcup_{N=1}^{\infty} A_N$$

$$A_N := \{\omega \in \Omega \mid \exists s \in [0, N]: t \mapsto W(t, \omega) \text{ er diff. i } s\}$$

1°)

Påstand:

Antag $\omega \in A_N$ og lad $W(\cdot, \omega)$ være diff. i $s \in [0, N]$

$$\exists a, k \in \mathbb{R}_+ : |W(s + \Delta s, \omega) - W(s, \omega)| \leq a \cdot \Delta s$$

$$0 \leq \Delta s \leq 4/k$$

Beris:

Da $W(\cdot, \omega)$ er diff. i s $\lim_{\Delta s \downarrow 0} \left| \frac{W(s+\Delta s, \omega) - W(s, \omega)}{\Delta s} \right| = 0$

Dus. $\exists a \geq 1, k \geq 1$:

$$\left| \frac{W(s+\Delta s, \omega) - W(s, \omega)}{\Delta s} \right| \leq a, \quad 0 \leq \Delta s \leq 4/k$$

hvoraf det enskede følger

□

Lad ω, s, a, k være givet som de ovenstående

$n \geq k$, $i_n := \lceil ns \rceil + 1$, dvs. $(i_n - 1)/n \leq s < i_n/n$

Påstand: $j = i_n + 1, i_n + 2, i_n + 3$: $|W(\frac{j}{n}, \omega) - W(\frac{j-1}{n}, \omega)| \leq \frac{7a}{n}$

Beris:

$$|W(\frac{j}{n}, \omega) - W(\frac{j-1}{n}, \omega)|$$

$$\leq |W(\frac{j}{n}, \omega) - W(s, \omega)| + |W(\frac{j-1}{n}, \omega) - W(s, \omega)|$$

$$\leq a \frac{4}{n} + a \frac{3}{n} = \frac{7a}{n}, \text{ idet}$$

$$\frac{i-1}{n} \leq s < \frac{i}{n} < \frac{i+1}{n} < \frac{i+2}{n} < \frac{i+3}{n}$$

$$\text{men } \frac{j}{n} - \frac{i-1}{n} \leq \frac{4}{n}, \quad \frac{j-1}{n} - \frac{i-1}{n} \leq \frac{3}{n}, \quad j = i+1, i+2, i+3$$

$$\text{og } \frac{4}{n} \leq \frac{4}{k}, \quad \frac{3}{n} \leq \frac{3}{k}, \quad n \geq k$$

□

2°)

$$\text{Sæt } N := \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcap_{a=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{nN+1} \bigcap_{j=i+1}^{i+3} \{w \in \mathbb{R} \mid |W(\frac{j}{n}, w) - W(\frac{j-1}{n}, w)| \leq \frac{7a}{n}\}$$

Påstand: $A \subseteq N$

Basis: En direkte konsekvens af 1° $\square$

3°)

Påstand: $\forall N, a, k \geq 1, n \geq k$:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{nN+1} \bigcap_{j=i+1}^{i+3} \{w \in \mathbb{R} \mid |W(\frac{j}{n}, w) - W(\frac{j-1}{n}, w)| \leq \frac{7a}{n}\}\right) \quad (*)$$

$$\leq (nN+1) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-7a/\sqrt{n}}^{7a/\sqrt{n}} e^{-x^2/2} dx\right)^3 \leq \left(\frac{14a}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 (N+1) \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Basis:

$\forall i=1, \dots, nN+1$:

$W_{\frac{j}{n}}^i - W_{\frac{j-1}{n}}^i$ uafh. $j=i+1, \dots, i+3$ og $W_{\frac{j}{n}}^i - W_{\frac{j-1}{n}}^i \sim W_{\frac{1}{n}}$

$$P\left(\bigcap_{j=i+1}^{i+3} \{w \in \mathbb{R} \mid |W(\frac{j}{n}, w) - W(\frac{j-1}{n}, w)| \leq \frac{7a}{n}\}\right)$$

$$\leq P(|W_{\frac{1}{n}}| \leq \frac{7a}{n})^3 = \left(\int_{-\frac{7a}{n}}^{\frac{7a}{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{1}{n}} e^{-x^2/2 \frac{1}{n}} dx\right)^3$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-7a/\sqrt{n}}^{7a/\sqrt{n}} e^{-x^2/2} dx\right)^3 \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} 14a/\sqrt{n}\right)^3 = \left(\frac{14a}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$\text{Dvs. } (*) \leq (nN+1) \left(\frac{14a}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \frac{1}{n\sqrt{n}} \leq (N+1) \left(\frac{14a}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\square$

4°)

Påstand: $P(N)=0$

Beris:

Lad $N, a, k \geq 1$ være givet

Da (*) jf 3°) går mod 0 for $n \rightarrow \infty$ gælder, at

$$P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{nN+1} \bigcap_{j=1}^{i+1} \{\omega \in \Omega \mid |W(\frac{j}{i}, \omega) - W(\frac{j-1}{i}, \omega)| \leq \frac{a}{n}\}\right) = 0$$

Dus. $P(N)=0$

□

opgave 39

$(X_n)_{n \geq 1}$ s.v.,

Påstand: Antag $\exists p > 0: \sum_{n=1}^{\infty} E[|X_n - X|^p] < \infty$

Da gælder, at $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ n.o.

Beris:

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \underset{\text{Markov}}{\leq} \frac{1}{\varepsilon^p} E[|X_n - X|^p], \varepsilon > 0$$

Dus. antagelsen medfører, at $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \infty$

Af Borel-Cantelli 1. Lemma følger

$$P(\limsup_n \{|X_n - X| \geq \varepsilon\}) = 0$$

Dus. $P(\liminf_n \{|X_n - X| < \varepsilon\}) = 1 \Rightarrow X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$ n.o.

□

opgave 40

$(W_t)_{t \geq 0}$ Brownsk Bevægelse, $W_t \sim N(0, \sigma^2 t)$, $t \geq 0$

$$s = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_{\nu_n}^{(n)} = t, \quad n \geq 1$$

$$\delta_n := \max_k (t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)})$$

$$\text{Antag } \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$$

$$S_n := \sum_{k=1}^{\nu_n} (W(t_k^{(n)}) - W(t_{k-1}^{(n)}))^2 \quad (\text{kuad. var. hændelse til n'le ind.})$$

1°)

$$E[S_n] = \sum_{k=1}^{\nu_n} E[W_{t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}}^2] = \sum_{k=1}^{\nu_n} \sigma^2 (t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}) = \sigma^2 (t - s)$$

$$\text{Var}(S_n) = \sum_{k=1}^{\nu_n} \text{Var}(W_{t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}}^2) = \sum_{k=1}^{\nu_n} 2\sigma^4 (t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)})^2$$

$$\text{Idet } W_{t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}}^2 \sim \sigma^2 (t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}) \chi^2(1)$$

$$\text{Påstand: } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sigma^2 (t - s) \quad \text{i } L^2$$

Beweis:

$$E[|S_n - \sigma^2 (t - s)|^2] = \text{Var}(S_n) = \sum_{k=1}^{\nu_n} 2\sigma^4 (t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)})^2$$

$$\leq 2\sigma^4 \sum_{k=1}^{\nu_n} (t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}) \delta_n = \delta_n 2\sigma^4 (t - s) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \square$$

2°)

Påstand:

Antag $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$, da $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sigma^2(t-s)$ n.o.

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} E[|S_n - \sigma^2(t-s)|^2] &= \sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}(S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\sigma^4 \sum_{k=1}^{v_n} (t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)})^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2\sigma^4 \delta_n (t-s) = 2\sigma^4 (t-s) \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty \end{aligned}$$

Det ønskede følger derfor af opg. 39

□

opgave 41

$(W_t)_{t \geq 0}$ Standard Brownish Bevægelse

For betegnelsen se opg. 40

Påstand:

$$S_n = \sum_{k=1}^{v_n} (W(t_k^{(n)}) - W(t_{k-1}^{(n)}))^2 \leq \max_k |W(t_k^{(n)}) - W(t_{k-1}^{(n)})| \sum_{k=1}^{v_n} |W(t_k^{(n)}) - W(t_{k-1}^{(n)})|$$

Beweis:

$$\text{Trækt, da } (W(t_i^{(n)}) - W(t_{i-1}^{(n)}))^2 \leq \max_k |W(t_k^{(n)}) - W(t_{k-1}^{(n)})| |W(t_i^{(n)}) - W(t_{i-1}^{(n)})|$$

$i=1, \dots, n$

□

Påstand: $W(c, w)$ er af ubegrænset variation for n.a. w

Beweis:

Jlf. opgave 40 2^o) og ovenstående $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N$:

$$\sigma^2(t-s) - \varepsilon < \delta_n \sum_{k=1}^n |W(t_k^{(n)}) - W(t_{k-1}^{(n)})|$$

Dvs. specielt $\exists \varepsilon > 0, N \in \mathbb{N} \forall n \geq N$: $0 < \varepsilon < \delta_n \sum_{k=1}^n |W(t_k^{(n)}) - W(t_{k-1}^{(n)})|$

da $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ ses at variationen bliver vilk. stor

□

Institut for Matematiske Fag
Aarhus Universitet

Den 3. december 2003

Stokastiske Processer

Uge 8/12/03

Forelæsninger: § 6.5.

Øvelser: Opgaver 39, 40, 41, 42, 45.

Goran Peskir

Stokastiske Processer, TØ m. 12

opgave 39, 40, 41 $\rightarrow$ se TØ m. 11

opgave 42

$(W_t)_{t \geq 0}$ Standard Brownish Bevægelse def. på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
 $0 \leq a < b < \infty$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, begrænset variation på $[a, b]$

vær:

$$I(\omega) := \int_a^b f(t) dW(t, \omega)$$

$$S_n(\omega) := \sum_{k=1}^n f(t_{k-1}^{(n)}) (W(t_k^{(n)}, \omega) - W(t_{k-1}^{(n)}, \omega))$$

$$t_k^{(n)} = a + k \frac{b-a}{n}, \quad n \geq 1, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Da udfaldsft. for W er højekont. følg af sætn. 4.6

s. A-25, at $I(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\omega)$, værl

dvs. da månelig er lukt under konvergens, at I er månelig.

1°)

Påstand: $S_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

Beris:

Vi ser (da $W(t_k^{(n)}) - W(t_{k-1}^{(n)}) \sim W_{t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}}$ og p.g. uafh. af diff.)

$$S_n \sim N\left(0, \sum_{k=1}^n (f(t_{k-1}^{(n)})^2 (t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}))\right)$$

$$\text{så } \mu = 0, \quad \sigma^2 = \sum_{k=1}^n (f(t_{k-1}^{(n)})^2 (t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}))$$

□

2°)

$$\begin{aligned}\varphi_Z(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{S_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{2}t^2 \sum_{k=1}^n f(t_{k-1}^{(n)})^2 (t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)})} \\ &= e^{-\frac{1}{2}t^2 \int_a^b f^2(s) ds} \quad \text{jf. Sætn. 4.5 s. A-24}\end{aligned}$$

Dvs. (jf. regl. for konvergens) $Z \sim N(0, \int_a^b f^2(s) ds)$

opgave 45

$(W_t)_{t \geq 0}$ Standard Brownish Bevægelse def. på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, $\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_t^W$

$$X_t := \int_0^t W(u) du, \quad t \geq 0$$

1°) Påstand: $(X_t)_{t \geq 0}$ er tilpasset $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$
og $X_t \sim N(0, t^3/3)$, $t \geq 0$

Bevis:

Juf. sætn 4.3 s. A-22

$$\begin{aligned}\int_0^t W(u) du &= W(t)t - W(0) \cdot 0 - \int_0^t u dW(u) \\ &= \int_0^t (t-u) dW(u)\end{aligned}$$

Juf. opg. 42 er $X \sim N(0, \int_0^t (t-u)^2 du)$

(X_t) er $(\mathcal{F}_t)$ tilpasset, idet S_n def. i opg. 42 er $\mathcal{F}_t$ målelig, (12.1)

$$\int_0^t (t-u)^2 du = t^3 + \frac{1}{3}t^3 - 2t \cdot \frac{1}{2}t^2 = t^3/3$$

□

2°)

Påstand: $(tW(t) - X(t))_{t \geq 0}$ er en martingal mht. $(F_t)_{t \geq 0}$

Beweis:

Da $E[tW(t) - X(t)] = 0$, $t \geq 0$ er dette en konsekvens af Exercise 1 TØ m. 4

□

3°)

Påstand:

$(W_t^3 - 3X_t)_{t \geq 0}$, $(W_t^3 - 3tW_t)_{t \geq 0}$ er martingaler mht. $(F_t)_{t \geq 0}$

Beweis:

Jvf. 2°) $(W_t^3 - 3X_t)_{t \geq 0}$ martingal $\Leftrightarrow (W_t^3 - 3tW_t)_{t \geq 0}$ martingal

$$E[W_t^3 - 3tW_t | F_s] = E[W_t(W_t^2 - 3t) | F_s]$$

$$= E[(W_t - W_s) + W_s)((W_t - W_s) + W_s)^2 - 3t | F_s]$$

$$= E[(W_t - W_s) + W_s)((W_t - W_s)^2 + W_s^2 + 2(W_t - W_s)W_s - 3t) | F_s]$$

$$= E[(W_t - W_s)^3 + (W_t - W_s)W_s^2 + 2(W_t - W_s)^2W_s - 3t(W_t - W_s) + W_s(W_t - W_s)^2 + W_s^3 + 2(W_t - W_s)W_s^2 - 3tW_s | F_s]$$

$$= E[(W_t - W_s)^3] + 3(t-s)W_s + W_s^3 - 3tW_s$$

regulærlig for BM.

$$= E[(W_t - W_s)^3] + W_s^3 - 3sW_s = W_s^3 - 3sW_s, \quad s < t$$

$$\text{idet } E[(W_t - W_s)^3] = E[W_{t-s}^3] = 0$$

$$\text{idet } x^3 f_{W_{t-s}}(x) \text{ er ulige}$$

□

4°)

$$f(v) = Av^3 + Bv^2 + Cv + D, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}$$

Påstand: $(f(W_t) - f(0) - \int_0^t \frac{1}{2} f''(W_u) du)_{t \geq 0}$
er en martingal mht. $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$

Beris:

$$f''(v) = 6Av + 2B$$

$$\begin{aligned} f(W_t) - f(0) - \int_0^t \frac{1}{2} f''(W_u) du \\ = f(W_t) - D - \int_0^t (3AW_u + B) du \end{aligned}$$

$$= AW_t^3 + BW_t^2 + CW_t - tB - 3A\mathcal{X}_t$$

$$= A(W_t^3 - 3\mathcal{X}_t) + BW_t^2 + CW_t - tB$$

Idet $E[BW_t^2 - tB] = 0$, $E[CW_t] = 0$ følg det ensbete af 3°) + Exercise 1 TD nr. 4 idet en endelig sum af martingaler er en martingal

□