

Meddelelse 24

Forelæsningerne i sidste uge

(Onsdag den 19. marts): Fortsatte med Afsnit 10.3 *Faktorer: Lineær struktur*.

(Fredag den 21. marts): Fortsætter med Kapitel 10. Nåede beviset for hovedsætningen (Sætning 10.11), det vil til nederst side 110. Jeg begyndte derefter at anvende sætningen på konstruktion af ANOVA tabellen i Afsnit 10.5.

Forelæsningerne i denne uge

(Onsdag den 26. marts): Jeg resumerede resultatet i hovedsætningen (Sætning 10.11), og afsluttede Afsnit 10.4. Fortsatte med konstruktion af ANOVA tabellen og nåede til og med Eksempel 10.13 om tosidet variansanalyse på side 114.

(Fredag den 28. marts): Fortsatte med eksemplerne på konstruktion af ANOVA tabeller i Afsnit 10.5, men sprang over Eksempel 10.16 om split-plot design. Gennemgik derefter hele Afsnit 10.6 om Lineære normale modeller.

Forelæsningerne i næste uge

(Onsdag den 2. marts og fredag den 4. marts): Afsnit 10.7 *Varianskomponentmodeller*.

Øvelserne i de næste uger

(Uge 14: 31. marts - 6. april): manglende opgaver fra sidste gang, samt 10.8, 10.9, 10.3, 10.11

Kommentarer til opgaverne:

Opgave 10.11: Det er ikke tanken, at opgaven skal regnes helt færdig ved øvelserne i næste uge. Start med at erkende at I har et ortogonalt design og lav faktorstrukturdiagram og ANOVA tabel. I første omgang kun for det latinske kvadrat-design med faktorerne række, søjle og gødning. Derefter for designet, hvor strukturen af gødningsfaktoren som en produktfaktor indføres. Der er naturligvis SAS programmer, der foretager alle beregninger. I første omgang er kun programmet

http://home.imf.au.dk/statbib/atsskurser/stat1/opgaver/kapitel_10/opgave_11/opgave_11a.sas

interessant. Det indlæser kun data og beregner relevante summer, som kan bruges til beregning af ANOVA tabellen.

(Uge 15: 7. april - 13. april): 10.11 (fortsat), 10.4, 10.5, 10.12

Kommentarer til opgaverne:

Det kan godt være, at det for stort et program. Opgave 10.12 går så videre til den følgende uge.

Afleveringsopgaver

(Uge 14: 31. marts - 6. april): 10.9

(Uge 15: 7. april - 13. april):

Trykfejl

På mystisk vis havde der indsneget sig et forkert faktorstrukturdiagram midt på side 114. Det rigtige skulle være:

$$\begin{array}{ccccc} & & & R_{r-1}^r & \\ & & \nearrow & & \searrow \\ I_{|I|-rs}^{|I|} & \longrightarrow & R \times S_{(r-1)(s-1)}^{rs} & & O_1^1 \\ & & \searrow & & \nearrow \\ & & S_{s-1}^s & & \end{array}$$

STAT1, TD nr. 23

opgave 9.7

$$\mathbb{R}^p = L_1 \oplus L_2, \text{ dvs.}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^p \exists! x_1 \in L_1, x_2 \in L_2 : x = x_1 + x_2 \quad (*)$$

$$P: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p \quad P(x) = \underset{(*)}{P(x_1 + x_2)} = x_1$$

(1)

Lad $x, y \in \mathbb{R}^p$, $a, b \in \mathbb{R}$ være vilk.

$$\text{Jf. } (*) \exists! x_1, y_1 \in L_1, x_2, y_2 \in L_2 : x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2$$

$$ax + by = \underbrace{(ax_1 + by_1)}_{\in L_1} + \underbrace{(ax_2 + by_2)}_{\in L_2}$$

Dvs.

$$P(ax + by) = ax_1 + by_1 = aP(x) + bP(y)$$

Altså har vi vist:

Påstand: P er lineær.

$$P^2(x) = P(P(x)) = P(x_1) = x_1 = P(x)$$

Dvs vi har vist, at:

$$\text{Påstand: } P^2 = P \quad (P \text{ idempotent})$$

(2)

Påstand: $(I_n - P)$ er projectionen på L_2 langs L_1

Beris:

$$(I_n - P)x = x - P(x) \underset{(*)}{=} x - x_1 = x_2$$

□

(3)

Påstand:

$$P: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p, \text{ linear } P^2 = P$$

Da $\exists L_1, L_2$ lin. underrum $\subseteq \mathbb{R}^p$: $P(x) = x_1$

$$\text{hvor } x = \underset{\substack{\uparrow \\ L_1}}{x_1} + \underset{\substack{\uparrow \\ L_2}}{x_2} \quad \text{og } \mathbb{R}^p = L_1 \oplus L_2$$

Beris:

$$\text{Sæt } L_1 = P(\mathbb{R}^p), \quad L_2 = (I_p - P)(\mathbb{R}^p)$$

L_1, L_2 er lin. underrum og $L_1 \cup L_2 = \mathbb{R}^p$

Lad $x \in L_1 \cap L_2$, dvs. $\exists x', x'' \in \mathbb{R}^p$

$$P(x') = x = (I_p - P)(x'') = x'' - P(x'')$$

$$\begin{aligned} \text{Da } P^2 = P \text{ ser vi } P(x') &= P^2(x') = P(x'' - P(x'')) \\ &\underset{P \text{ lin.}}{=} P(x'') - P(x'') = 0 \end{aligned}$$

Altså er $L_1 \cap L_2 = 0$ og dermed: $L_1 \oplus L_2 = \mathbb{R}^p$

Pr. def. af L_1, L_2 følger dermed, at

$$\forall x \in \mathbb{R}^p \exists! x_1 \in L_1, x_2 \in L_2: x = x_1 + x_2 \text{ og } P(x) = x_1$$

□

Lad $\langle \cdot, \cdot \rangle$ betegne et indre produkt på $\mathbb{R}^p$

P betegner en ortogonal projection, hvis $L_1 \perp L_2$, dvs.
hvis $\forall x_1 \in L_1, x_2 \in L_2 : \langle x_1, x_2 \rangle = 0$

(4)

Påstand: P er ortogonal $\iff P$ selvadjungeret

Beris:

$\Leftarrow$

P selvadjungeret, dvs. $\forall x, y \in \mathbb{R}^p : \langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle$

Lad $x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$ være vilk., idet $Px_1 = x_1, Px_2 = 0$

$$\text{fås } \langle x_1, x_2 \rangle = \langle Px_1, x_2 \rangle = \langle x_1, Px_2 \rangle = \langle x_1, 0 \rangle = 0$$

$\Rightarrow$

Lad $x, y \in \mathbb{R}^p$ være vilkårlige

$$x = \underbrace{x_1}_{\in L_1} + \underbrace{x_2}_{\in L_2}, \quad y = \underbrace{y_1}_{\in L_1} + \underbrace{y_2}_{\in L_2}, \quad Px = x_1, \quad Py = y_1$$

$$\langle Px, y \rangle = \langle x_1, y_1 + y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle$$

$$= \langle x_1 + x_2, y_1 \rangle = \langle x, Py \rangle$$

□

Lad $\underline{P}$ betegne matricen for afb. P og antag at

P er givet ud fra basen $\{b_1, \dots, b_p\}$ for $\mathbb{R}^p$

Da er det indre produkt defineret ved

(den p.d. matrix): $\Sigma = \{ \langle b_i, b_j \rangle \}_{i,j=1}^p$ således

$x = (x_1, \dots, x_p)$, $y = (y_1, \dots, y_p)$ vektorer i $\mathbb{R}^p$ udtrykt i

basen $\{b_1, \dots, b_p\}$ har indre produkt

$$\langle x, y \rangle = (x_1, \dots, x_p) \Sigma (y_1, \dots, y_p)^*$$

(5)

Påstand:

P er en ortogonalprojektion (mht. det indre prod. givet ved Σ) $\iff \underline{P}^* \Sigma = \Sigma \underline{P}$

Beris:

If. (4) gælder at P ort. hvis P er selvadjungent

dvs. hvis $\forall x, y \in \mathbb{R}^p: (\underline{P}x)^* \Sigma y = x^* \Sigma \underline{P}y$

$$\iff x^* \underline{P}^* \Sigma y = x^* \Sigma \underline{P} y$$

$$\iff \underline{P}^* \Sigma = \Sigma \underline{P}$$

□

(6)

$L = T(\mathbb{R}^p)$ hvor $T \in \text{Mat}_{p \times q}(\mathbb{R})$ og har fuld rang

Påstand:

Den ortogonale projektion på L mht. Σ er givet ved

$$T(T^* \Sigma T)^{-1} T^* \Sigma \quad (*)$$

Beris:

Ben da T har fuld rang er $T^* \Sigma T \in GL_q(\mathbb{R})$

Lad $x' \in L$, dvs. $\exists x \in \mathbb{R}^p: Tx = x'$ (+)

Det er klart at billedmængden for $*$ $\subseteq L$ og idet
$$T(T^* \Sigma T)^{-1} T^* \Sigma x' \stackrel{(+)}{=} T(T^* \Sigma T)^{-1} T^* \Sigma Tx = Tx = x'$$
rammer $(*)$ hele L .

Idet

$$\begin{aligned} (T(T^* \Sigma T)^{-1} T^* \Sigma)^* \Sigma &= \Sigma^* T(T^* \Sigma^* T)^{-1} T^* \Sigma \\ &= \Sigma T(T^* \Sigma T)^{-1} T^* \Sigma = \Sigma (T(T^* \Sigma T)^{-1} T^* \Sigma) \end{aligned}$$

følge jvf. (5) at $(*)$ er den ortogonale projektion på L $\square$

(7)

$$L = \{x \in \mathbb{R}^p \mid Rx = 0\} \quad R \in \text{Mat}_{(p-q) \times p}(\mathbb{R}) \text{ med rang } p-q$$

Påstand:

Den ortogonale projektion på L mht. Σ er givet ved

$$I_p - \Sigma^{-1} R^* (R \Sigma^{-1} R^*)^{-1} R \quad (*)$$

Beris:

Lad $x \in$ billedrummet for $(*)$, dvs. $\exists y$:

$$\begin{aligned} Rx &= R(I_p - \Sigma^{-1} R^* (R \Sigma^{-1} R^*)^{-1} R) y \\ &= Ry - Ry = 0 \end{aligned}$$

For $x \in L$:

$$(I_p - \Sigma^{-1} R^* (R \Sigma^{-1} R^*)^{-1} R)x = x$$

Dvs. billedrummet for $(*)$ er L

$$\begin{aligned} \text{Idet } & (I_p - \Sigma^{-1} R^* (R \Sigma^{-1} R^*)^{-1} R)^2 \\ &= I_p - \Sigma^{-1} R^* (R \Sigma^{-1} R^*)^{-1} R - \Sigma^{-1} R^* (R \Sigma^{-1} R^*)^{-1} R \\ &\quad + \Sigma^{-1} R^* (R \Sigma^{-1} R^*)^{-1} R \Sigma^{-1} R^* (R \Sigma^{-1} R^*)^{-1} R \\ &= I_p - \Sigma^{-1} R^* (R \Sigma^{-1} R^*)^{-1} R \end{aligned}$$

Juf. (3) er $(*)$ den ønskede projektion

□

opgave 10.2

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T \sim N_n \left(\begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2 n & \dots & n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n & \dots & n \sigma^2 \end{pmatrix} \right)$$

A betegn en orthogonal matrix $(n \times n)$

$$j=1, \dots, n: a_{ij} = 1/\sqrt{n}$$

$$\mathbf{Y} := A\mathbf{X} \quad \mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$$

1)

Påstand: $Y_1, \dots, Y_n$ er uafh.

$$Y_1 \sim N(\sqrt{n}\mu, \sigma^2 + (n-1)n)$$

$$Y_j \sim N(0, \sigma^2 - n) \quad j=2, \dots, n$$

Beweis:

$$\mathbf{Y} \sim N_n \left(A \begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} \sigma^2 n & \dots & n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n & \dots & n \sigma^2 \end{pmatrix} A^T \right) \text{ jf. sætn. 9.17 (B)}$$

$\begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu \end{pmatrix}$ er jf. def. på A parallel med første række i A og vinkelret på de resterende, dvs. middelværdisvektoren for $\mathbf{Y}$ er $\begin{pmatrix} \sqrt{n}\mu \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Vi ser, at det (i, j) te element i $\mathbf{Y}$ s covariansmatrix er

$$\begin{aligned} & \sigma^2 a_{ji} a_{ii} + n a_{ji} \sum_{k \neq i} a_{ik} + \dots + \sigma^2 a_{jn} a_{in} + n a_{jn} \sum_{k \neq n} a_{ik} \\ &= \sigma^2 \langle a_i, a_j \rangle + n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \right) \sum_{k=1}^n a_{jk} - n \langle a_i, a_j \rangle \end{aligned}$$

Vi ser, at kovariansmatricen for $\mathbf{I}$ er $(\sum_k a_{jk} = 0 \text{ } j \neq 1,$

$$\begin{pmatrix} v^2 + (n-1)\eta & & 0 \\ & v^2 - \eta & \\ 0 & & \ddots & v^2 - \eta \end{pmatrix}$$

Det ønskes at der for en direkte konsekvens af sætn. 9.17 (E) + (F)

□

2)

Påstand: $\Sigma \in GL_n(\mathbb{R}) \iff -\frac{v^2}{n-1} < \eta < v^2$
 hvor Σ betegner kovariansmatricen for $\mathbf{X}$

Beris:

$$\Sigma \in GL_n(\mathbb{R}) \iff \begin{pmatrix} v^2 + (n-1)\eta & & 0 \\ & v^2 - \eta & \\ 0 & & \ddots & v^2 - \eta \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{R})$$

↑
regulær for
determinant

$$\iff (v^2 + (n-1)\eta)(v^2 - \eta)^{n-1} \neq 0$$

$$\iff v^2 + (n-1)\eta \neq 0 \quad \vee \quad v^2 - \eta \neq 0 \quad (*)$$

Da Σ er en kovariansmatrice: $\eta \leq v^2$

$$(*) \iff v^2 > \eta > -\frac{v^2}{n-1}$$

□

3)

Påstand:

$$\bar{Y}_1 = \sqrt{n} \bar{X}. \quad (1), \quad \sum_{j=1}^n \bar{Y}_j^2 = \sum_{j=1}^n X_j^2 \quad (2)$$

$$\sum_{j=2}^n \bar{Y}_j^2 = \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}.)^2 \quad (3)$$

Beweis:

$$\bar{Y}_1 = (A\bar{X})_1 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} X_i = \sqrt{n} \bar{X}$$

$$\sum_{j=1}^n \bar{Y}_j^2 = (A\bar{X})^T A\bar{X} = \bar{X}^T A^T A \bar{X} = \bar{X}^T \bar{X} = \sum_{j=1}^n X_j^2$$

$$\sum_{j=1}^n \bar{Y}_j^2 = \sum_{j=1}^n \bar{Y}_j^2 - \bar{Y}_1^2 = \sum_{j=1}^n X_j^2 - n \bar{X}.^2 = \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}.)^2$$

□

Påstand: $\bar{X}. \perp \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}.)^2$

Beweis:

Jvf 1) er $\bar{Y}_1$ ene uafh. og jvf. 3) er

$$\bar{X}. = \frac{1}{\sqrt{n}} \bar{Y}_1, \quad \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}.)^2 = \sum_{j=2}^n \bar{Y}_j^2, \quad \text{des.}$$

(månlige) fkt. af disjunkte ugd. af uafh. s.v.

□

Vi ser (jvf. 1)) at $\bar{X}. \sim N(\mu, \frac{\sigma^2 + (n-1)\sigma^2}{n})$

$$\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}.)^2 = \sum_{j=2}^n \bar{Y}_j^2 = (n-1) \sum_{j=2}^n \left(\bar{Y}_j / \sqrt{n-1} \right)^2 \underset{(3.76)}{\sim} \underset{(3.75)}{\frac{1}{\sigma^2 + \sigma^2}} \chi^2(n-1)$$

opgave 10.7

F, G to faktorer, tilhørende underrum betegnes L_F, L_G

Påstand:

$$\exists H \text{ faktor: } L_H = L_F \cap L_G$$

$$H = F \wedge G$$

Beris:

$L_F \cap L_G$ er et lineært underrum af $\mathbb{R}^I$

L_F er udsændt af søjlerne i designmatricen for F (tilsvarende for G)

Søjlerne i hver designmatrix er ortogonale (der står højst et 1-tal på hver række i resten af indgangene i rækken er 0'er).

Hvis vi betragte mængd. af vektorer i L_F , som udelukkende har 0 og 1-taller som koordinater, M_F og tilsvarende M_G for G , da er der en 1-1 sammenhæng med vektorerne i M_F og elementerne i M_F (jvf. s. 101 + s. 103)

Vektorerne i $M_F \cap M_G$ udsænder $L_F \cap L_G$ (jvf. def. på L_F, L_G s. 103) og jvf. s. 102,

ser vi at $M_F \cap M_G = M_{F \wedge G}$

Af def. på designmatricen (s. 103) følger det ønskede $\square$

opgave 10.10

1)

L er def. ved $L: I \rightarrow \{a, b, \dots, g\}$

P er def. ved $P: I \rightarrow \{1, \dots, 12\}$

D er def. ved $D: I \rightarrow \{\text{Dag 1, Dag 2, Dag 3}\}$

2)

$L \times P \subseteq I$ (trivielt, da $L \times P$ ikke har tomme niveauer)

$I \subseteq L \times P$, idet der er ligeså mange niveauer i $L \times P$ som der er obs. og hvert niveau indeholder præcis en obs.

$D \subseteq P$ idet mgt. af obs. på et niveau for D er en foreningsmgt. af obs. fra niveauer af P

3)

$L \times P$ er balanceret og derved også L og P

D er ubalanceret idet f.eks. niveauet Dag 1 indeholder flere obs. end niveauet Dag 2.

$D \times L$ er heller ikke balanceret idet niveauet Dag 1 $\times a$ f.eks. indeholder flere obs. end Dag 2 $\times a$

4)

Idet $L \times P$ er balanceret er L, P balanceret

og $\frac{n_{LP}}{n_L n_P} = 1 = n_{L \perp P}$ idet $L \perp P$ jf. bm. s.102

Af sætn. 10.9 følger at $L \perp P$

Tilsvarende ses, at $D \perp L = 0$

og idet $\frac{n_{DL}}{n_D n_L} = 1$ følger igen af sætn. 10.9 at $D \perp L$

$(L \times D) \wedge P = D$ jf. bm. s.102, idet vi kan betragte $L \times D \times P$ i et 3. dim. koordinatsystem, vi ser at jf. sætn. 10.9 er $(L \times D) \perp P$

opgave 10.1

1)

$$\begin{aligned}(aI_n + bJ_n)(\alpha I_n + \beta J_n) \\&= \alpha I_n \cdot I_n + \alpha \beta I_n J_n + \beta \alpha J_n I_n + \beta b J_n^2 \\&= \alpha I_n + (\alpha \beta + \alpha b + n b \beta) J_n\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}(aI_n + bJ_n)\left(\frac{1}{a}(I_n - \frac{b}{a+nb}J_n)\right) \\&= (aI_n + bJ_n)\left(\frac{1}{a}I_n - \frac{b}{a(a+nb)}J_n\right) \\&\stackrel{(1)}{=} I_n + \left(-\frac{b}{a+nb} + \frac{b}{a} - nb \frac{b}{a(a+nb)}\right) J_n = I_n\end{aligned}$$

Hvilket viser det ønskede.

3)

Jvf. opg. 10.2. kan vi diagonalisere $aI_n + bJ_n$ ved at benytte en orthogonal-matrix med første række lig $(1/\sqrt{n}, \dots, 1/\sqrt{n})$ og jvf. 10.2 er den resulterende diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a+b+(n-1)b & & 0 \\ & a+b-b & \\ 0 & & a+b-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+nb & & 0 \\ & a & \\ 0 & & a \end{pmatrix}$$

Af lineær algebra (F&B s. 306 sætn. 5.2) følger at $|aI_n + bJ_n| = a^{n-1}(a+nb)$ og at

$aI_n + bJ_n$ har egenverdierne a
med multiplicitet $n-1$ og $a+nb$ med
multiplicitet 1 , hvilket også
besvarer spørgsmål 4)

Meddelelse 23

Forelæsningerne i sidste uge

(Onsdag den 12. marts): Afsluttede Kapitel 9 om den flerdimensionale normalfordeling med gennemgang af Anneks til Kapitel 9 om den flerdimensionale normalfordeling i SAS.

(Fredag den 14. marts): Begyndte på Kapitel 10 om varianskomponentmodeller. Gennemgik Eksempel 10.1, men sprang over Eksempel 10.2, og gennemgik derefter hele Afsnit 10.3 *Faktorer: Kombinatorisk struktur*.

Forelæsningerne i denne uge

(Onsdag den 19. marts): Fortsætter med Afsnit 10.3 *Faktorer: Lineær struktur*.

(Fredag den 21. marts): Fortsætter med Kapitel 10. Jeg regner med at nå Afsnit 10.4 (som indeholder hovedresultatet i Kapitlet) og et stykke ind i Afsnit 10.5.

Øvelserne i de næste uger

(Uge 13: 24. marts - 30. marts): 9.7, 10.2, 10.7, 10.10, 10.1

(Uge 14: 31. marts - 6. april): 10.8, 10.9, 10.11, 10.3

Afleveringsopgaver

(Uge 13: 24. marts - 30. marts): 10.10

(Uge 14: 31. marts - 6. april): 10.9

2. obligatoriske opgave afleveres på Informationskontoret inden klokken 15 mandag den 24. marts.

STAT 1, TØ nr. 22

opgave 9.23

$$S \sim W_p(\Sigma, f), \quad \Sigma \in GL_p(\mathbb{R}) \quad f \geq p$$

$$\Sigma^{-1} = \{\sigma^{ij}\}_{i,j=1}^p, \quad S^{-1} = \{s^{ij}\}_{i,j=1}^p.$$

(S er invertibel med ss. 1 da W er pos. def. med ss. 1 da $f \geq p$ og $\Sigma \in GL_p(\mathbb{R})$, jvf. 9.20)

Påstand: $\frac{\sigma^{PP}}{W^{PP}} \sim \chi^2(f - (p-1))$ og $W^{PP} \perp \{W_{ij}\}_{i,j=1}^{p-1}$

Bewis:

$$\Sigma^{-1} = \begin{Bmatrix} \Sigma^{11} & \Sigma^{12} \\ \Sigma^{21} & \sigma^{PP} \end{Bmatrix} \quad W^{-1} = \begin{Bmatrix} \underline{W}^{11} & \underline{W}^{12} \\ \underline{W}^{21} & W^{PP} \end{Bmatrix}$$

Jvf. opg. 9.4: $\sigma^{PP} = (\sigma_{PP} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12})^{-1}$

$$W^{PP} = (W_{PP} - \underline{W}_{21} \underline{W}_{11}^{-1} \underline{W}_{12})^{-1} \quad (*)$$

$$\frac{\sigma^{PP}}{W^{PP}} = \frac{W_{PP} - \underline{W}_{21} \underline{W}_{11}^{-1} \underline{W}_{12}}{\sigma_{PP} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12}}$$

Idet $W_{PP} - \underline{W}_{21} \underline{W}_{11}^{-1} \underline{W}_{12} \sim W_1(\sigma_{PP} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12}, f - (p-1))$

ifølge sætn. 9.29 følger af def. 9.22 (og lemma 9.21 (3)) at

$$\frac{\sigma^{PP}}{W^{PP}} \sim W_1(1, f - (p-1)) \sim \chi^2(f - (p-1)) \quad \text{jvf. opg. 9.21}$$

Af sætn. 9.29 følger desuden at $(*) \perp \underline{W}_{11} = \{W_{ij}\}_{i,j=1}^{p-1}$

□

Påstand:

$$\forall \underline{a} \in \mathbb{R}^p \setminus \{\underline{0}\} : \frac{\underline{a}^* \Sigma^{-1} \underline{a}}{\underline{a}^* W^{-1} \underline{a}} \sim \chi^2(f - (p-1))$$

Beweis:

Lad $\underline{a} \in \mathbb{R}^p \setminus \{\underline{0}\}$ være givet

Vælg en invertibel matrix A med $\underline{a}$ som første søjle
 $\underline{a} = A \underline{e}_p$, idet $A^{-1} W (A^{-1})^* \sim W_p(A^{-1} \Sigma (A^{-1})^*, f)$
ifølge o.j. 9.21, fås af ovenstående argument, at

$$\frac{\underline{a}^* \Sigma^{-1} \underline{a}}{\underline{a}^* W^{-1} \underline{a}} = \frac{\underline{e}_p^* A^* \Sigma^{-1} A \underline{e}_p}{\underline{e}_p^* A^* W^{-1} A \underline{e}_p} \sim \chi^2(f - (p-1))$$

□

opgave 9.24

$$W \sim W_p(\Sigma, f), \quad \Sigma \in GL_p(\mathbb{R}), \quad f \geq p$$

Påstand:

$$|W| \sim |\Sigma| \chi^2(f) \cdot \chi^2(f-1) \cdots \chi^2(f-p+1), \text{ og}$$

$\chi^2(f), \dots, \chi^2(f-p+1)$ er uafh.

Beweis:

Jvf. opg. 9.4:

$$\frac{|W|}{|\Sigma|} = \frac{|\Sigma^{-1}|}{|W^{-1}|} = \frac{\sigma^{pp} |\tilde{\Sigma}_{(p-1)}^{-1}|}{W^{pp} |\tilde{W}_{(p-1)}^{-1}|}, \text{ hvor } \tilde{\Sigma}_{(p-1)}^{-1}, \tilde{W}_{(p-1)}^{-1} \text{ er}$$

passende $p-1$ kvadratiske matricer og $\tilde{W}_{(p-1)}^{-1} \sim W_{p-1}(\tilde{\Sigma}_{(p-1)}^{-1} f$

(se sætn. 9.29 for de præcise udtryk)

Jvf. sætn. 9.29 er $W^{pp} \perp \tilde{W}_{(p-1)}^{-1}$ (*)

Således fortsættes indtil $\tilde{W}_{(1)}^{-1}(\tilde{\Sigma}_{(1)}^{-1} f) \sim \chi^2(f)$

og jvf. opg. 9.23 følger, at

$$\frac{|W|}{|\Sigma|} \sim \chi^2(f) \cdots \chi^2(f-p+1)$$

og i tråd med sætn. 9.29 (*) er

$\chi^2(f), \dots, \chi^2(f-p+1)$ uafh.

□

opgave 9.25

$$W \sim W_p(\Sigma, f) \quad , \quad \Sigma \in GL_p(\mathbb{R}) \quad , \quad f \geq p+2$$

$$\text{Påstand:} \quad E[W^{-1}] = \frac{1}{f-p-1} \Sigma^{-1}$$

Bevis:

Da Σ er symmetrisk og invertibel $\exists$ O ortogonalmatrix og D diagonalmatrix med pos. indgange, så

$$O^T D O = \Sigma$$

Antag at $\Sigma = I_p$

Jvf. opgave 9.23: $W^{ii-1} \sim \chi^2(f-p+1)$

$$\begin{aligned} E[W^{ii}] &= \int \frac{1}{x} f \chi^2(f-p+1)(x) \lambda_1(dx) \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{x} \frac{(1/2)^{(f-p+1)/2}}{\Gamma((f-p+1)/2)} x^{\frac{f-p+1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} \lambda_1(dx) \\ &= \int_0^\infty \frac{(1/2)^{(f-p-1)/2}}{\Gamma((f-p-1)/2)} x^{\frac{f-p-1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} \lambda_1(dx) = \frac{1}{f-p-1} \end{aligned}$$

Lad $\bar{O}$ være ortogonal

Juf. opg. 9.21 $O^* W O \sim W$ og dermed
 $O W^{-1} O^* \sim W^{-1}$

$$E[W^{-1}] = E[O W \bar{O}^*] = \frac{1}{f-p-1} I_p$$

Lad nu $\Sigma = O \bar{N} \bar{D} I_p \bar{N} \bar{D} O^*$ af de ovenstående
betragtninger følger at

$$E[W^{-1}] = \frac{1}{f-p-1} O^* \bar{N} \bar{D}^{-1} \bar{N} \bar{D} O = \frac{1}{f-p-1} \Sigma^{-1}$$

□

opgave 9.26

$$W \sim W_p(\Sigma, f), \quad f \geq p, \quad \Sigma \in GL_p(\mathbb{R})$$

$$\mathbf{Y} \sim N_p(\mathbf{0}, \Sigma), \quad W \perp \mathbf{Y}$$

$$\text{Påstand: } \frac{f-(p-1)}{p} \mathbf{Y}^* W^{-1} \mathbf{Y} \sim F(p, f-(p-1))$$

Beweis:

$$\exists O \text{ orthogonal, } \mathbf{D} \text{ diagonal: } \mathbf{O}^* \mathbf{D} \mathbf{O} = \Sigma$$

$$\mathbf{Y}^* \Sigma^{-1} \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^* \mathbf{O}^* \mathbf{D}^{-1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{Y} = \|\mathbf{D}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{Y}\|^2$$

$$\mathbf{D}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{Y} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{D}^{-1} \mathbf{O} \Sigma \mathbf{O}^* \mathbf{D}^{-1}) \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$$

$$\text{Dermed er } \|\mathbf{D}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{Y}\|^2 \sim \chi^2(p)$$

$$\text{Jvf. opg. 9.23: } (\mathbf{Y}^* W^{-1} \mathbf{Y} | \mathbf{Y}) \sim \chi^2(f-(p-1))$$

Dermed pr. def. af F fordelingen får vi

$$\frac{f-(p-1)}{p} \mathbf{Y}^* W^{-1} \mathbf{Y} \sim F(p, f-(p-1))$$

□

(2)

Udregninger er analoge med de ovenstående, idet $(\bar{X} - \mu_0) \sim N(0, k^{-1}\Sigma)$ under hypotesen og idet $f \cdot S \sim W(\Sigma, f)$, dvs.

$$\frac{f - (p - 1)}{p} \frac{T^2}{f} \sim F(p, f - (p - 1))$$

opgave 9.27

$$R \sim W_p(\Sigma, n), \quad U \sim N_p(0, \Sigma)$$

$$R \perp U, \quad n \geq p, \quad \Sigma \in GL_p(\mathbb{R})$$

(1)

$$\text{Påstand: } \frac{|R|}{|R+UU^*|} = \frac{1}{1+U^*R^{-1}U}$$

Bevis:

$$\begin{aligned} \frac{|R|}{|R+UU^*|} &= \frac{|R^{-1}| |R|}{|R^{-1}| |R+UU^*|} = \frac{1}{|I+R^{-1}UU^*|} \\ &\stackrel{\text{opg. 9.5}}{=} \frac{1}{1+U^*R^{-1}U} \quad \square \end{aligned}$$

(2)

Påstand:

$$U^*R^{-1}U \sim F(p, n-p+1) \quad a)$$

$$\frac{|R|}{|R+UU^*|} \sim B\left(\frac{n-p+1}{2}, \frac{p}{2}\right) \quad b)$$

Beweis:

a) er en direkte konsekvens af opg. 9.26 (1)

b) :

$$\begin{aligned}\frac{|R|}{|R+UU^*|} &\stackrel{(i)}{=} \frac{1}{1+U^*R^{-1}U} = \frac{1/U^*R^{-1}U}{1/U^*R^{-1}U + 1} \\&= \frac{P/(n-(p-1))U^*R^{-1}U}{P/(n-(p-1))U^*R^{-1}U - P/(n-(p-1))} \\&= \frac{(n-(p-1)) P/(n-(p-1))U^*R^{-1}U}{(n-(p-1)) P/(n-(p-1))U^*R^{-1}U - P} \sim B\left(\frac{n-p+1}{2}, \frac{p}{2}\right)\end{aligned}$$

J.f. (3.92) og (3.84)

□

opgave 9.36

(1)

$\exists C \in GL_p(\mathbb{R})$; D diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$; $|C| = |C^{-1}| = 1$

$E^{-1}H = C^{-1}DC$, idet egenverdier af den inverse matrix er de inverse egenverdier f.å.s

$$\begin{aligned} |I_p + E^{-1}H|^{-1} &= |C^{-1}C + C^{-1}DC|^{-1} = |I_n + D|^{-1} \\ &= \prod_{i=1}^p \frac{1}{1 + \lambda_i} \end{aligned}$$

(2)

λ_i egenverdi for $E^{-1}H$, idet

$$|(E+H)^{-1}H| = \frac{|E^{-1}H|}{|I_p + E^{-1}H|} = \prod_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i} \quad \checkmark$$

$\frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1}, \dots, \frac{\lambda_p}{1 + \lambda_p}$ egenverdier for $(E+H)^{-1}H$, dvs.

$$\text{tr}((E+H)^{-1}H) = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i}$$

Meddelelse 22

Forelæsningerne i sidste uge

(Onsdag den 5. marts): Afsluttede *Lineære normale modeller* og gennemgik Afsnit 9.7 *Estimation af partielle kovarianser og partielle korrelationer*. Omtalte også Eksempel 9.31 (i den fortløbende nummerering).

(Fredag den 7. marts): Blev færdig med teorien om den flerdimensionale normalfordeling, men nåede ikke at begynde på omtalen af den flerdimensionale normalfordeling i SAS.

Forelæsningerne i denne uge

(Onsdag den 12. marts): Afsluttede Kapitel 9 om den flerdimensionale normalfordeling med gennemgang af Anneks til Kapitel 9 om den flerdimensionale normalfordeling i SAS.

(Fredag den 14. marts): Begynder på Kapitel 10 om varianskomponentmodeller.

Øvelserne i de næste uger

(Uge 12: 17. marts - 23. marts): 9.23, 9.24, 9.25, 9.26 9.27 9.36.

Bemærkninger til opgaverne: I (3) i Opgave 9.27 henvises I til at bruge en „Basu's Sætning“. Den lærer man først om i Statistik 2, så I må nøjes med at tage resultatet i (3) til efterretning.

Opgave 9.36 står sidst i listen af opgaver. Det vil være en god idé starte med den opgave, så I er sikre på at nå den.

(Uge 13: 24. marts - 30. marts): 9.7, 10.2, 10.7, 10.10, 10.1

Afleveringsopgaver

(Uge 12: 17. marts - 23. marts): Ingen på grund af den obligatoriske opgave. Med den ihærdighed hvormed I plejer at lave og aflevere de opgaver, må det være en betydelig aflastning.

(Uge 13: 24. marts - 30. marts): 10.10

2. obligatoriske opgave afleveres på Informationskontoret inden klokken 15 mandag den 24. marts.

STAT1, TD nr. 21

opgave 9.18

$$\perp\!\!\!\perp \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n, \quad i=1, \dots, n: \mathbf{z}_i \sim N_p(\mu_i, \Sigma_i)$$

$$\mathbf{Z} := \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{z}_n \end{pmatrix} \right\}^*$$

(1)

Påstand:

$$\text{Hvis } \Sigma_1 = \dots = \Sigma_n, \quad \mathbf{M} = \left\{ \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \right\}^*$$

$$\text{Da gælder } \mathbf{Z} \sim N_{n \times p}(\mathbf{M}, \mathbf{I}_n \otimes \Sigma)$$

Bevis:

Juf. prop. 9.4

$$\begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{z}_n \end{pmatrix} \sim N_{np} \left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Sigma \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Idet } \begin{pmatrix} \Sigma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Sigma \end{pmatrix} = \mathbf{I}_n \otimes \Sigma \quad \text{ses juf def. 9.19}$$

$$\mathbf{Z} \sim N_{n \times p}(\mathbf{M}, \mathbf{I}_n \otimes \Sigma)$$

□

(2)

Påstand:

$$\mathbf{X} \sim N_{n \times p}(\mathbf{M}, \mathbf{\Phi} \otimes \mathbf{\Sigma}) \iff \mathbf{X}' \sim N_{p \times n}(\mathbf{M}', \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{\Phi})$$

Bewis:

Det er klart, at $\mathbb{R}^n$ er N -om fordelt, idet vi kun ombytte koordinater i n -vektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Def. definitionen (9.19) so li'

M^* er middelværdivektor og

$$\{\sigma(s_{ij})(r_{ii})\}_{i,s=1}^p \quad i,j=1}^n = \Sigma^* \otimes \Phi^* = \Sigma \otimes \Phi \quad \text{e}$$

covariance matrix

(3)

Pastand:

$$\Sigma \sim N_{n \times p} (M, \Phi \otimes \Sigma), \quad A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R}), \quad B \in \text{Mat}_{p \times q}(\mathbb{R})$$

Da geld:

$$A \Sigma B \sim N_{m \times q}(A \mu B, (A \Phi A') \otimes (B \Sigma B'))$$

Basis:

Idet $\Sigma^V \sim N_{hp}(M^V, \Phi \otimes \Sigma)$ square transformationen

$A \otimes B$ til transformationen $(A \otimes B^*) \otimes V$

Dvs. j.f. def. 9.19 og prop. 9.3 samt lemma 9.20 (5) fås

$$A \otimes B \sim N_{m \times q}(AMB, (A \oplus A') \otimes (B' \Sigma B))$$

(4)

$$I_n \otimes b^* \Sigma b = b^* \Sigma b I_n \quad \text{j.f. Lemma 9.20 (8)}$$

(5)

$$a^* a \otimes \Sigma = \underbrace{a^* a}_{\text{Lemma 9.20 (8)}} \Sigma = \|a\|^2 \Sigma$$

(6)

triviert ud fra (3)

(7)

Da rækkeene i Σ er uafh. f. Σ j.f. prop. 9.8

$$(\underline{X}^{(1)} \mid \underline{X}^{(2)} = x^{(2)})$$

$$\sim N_{n \times k} (M' - (M^{(2)} - x^{(2)}) \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}, I_n \otimes (\Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}))$$

$$\text{idet } (\Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1})^* = \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}$$

At $\underline{X}^{(2)} \sim N_{n \times (p-k)} (M^{(2)}, I_n \otimes \Sigma_{22})$ er en direkte konsekvens af prop. 9.6 (1)

opgave 9.19

$$\Sigma \sim N_{n \times p}(M, \Phi \otimes \Sigma)$$

$$Y = A \Sigma B, Z = C \Sigma D, A \in \text{Mat}_{a \times n}, B \in \text{Mat}_{p \times b}, C \in \text{Mat}_{c \times n}, D \in \text{Mat}_{p \times d}$$

Påstand:

$$Y \perp\!\!\!\perp Z \iff A \Phi C^* = 0 \vee B^* \Sigma D = 0$$

Beweis:

Juf. lemma 9.21 (3)

$$Y \sim N_{a \times b}(AMB, (A \Phi A^*) \otimes (B^* \Sigma B))$$

$$Z \sim N_{c \times d}(CMD, (C \Phi C^*) \otimes (D^* \Sigma D))$$

$$Y = (A \otimes B^*) \Sigma^\vee, Z = (C \otimes D^*) \Sigma^\vee$$

Juf. sætn. 9.17 (5) gælder

$$Y \perp\!\!\!\perp Z \iff (A \otimes B^*)(\Phi \otimes \Sigma)(C \otimes D^*)^* = 0$$

$$(A \otimes B^*)(\Phi \otimes \Sigma)(C \otimes D^*)^* \stackrel{\text{lemma 9.20 (7)}}{=} (A \otimes B^*)(\Phi \otimes \Sigma)(C^* \otimes D)$$

$$\stackrel{\text{lemma 9.20 (5)}}{=} (A \Phi C^*) \otimes (B^* \Sigma D) \iff A \Phi C^* = 0 \vee B^* \Sigma D = 0$$

□

opgave 9.20

Ved at betragte størrelser på form $(ax+bx)^2$ ses, at W er positiv semidefinit, hvis W er invertibel $\Leftrightarrow$ fuld rang, da er W positiv definit.

Påstand: $W \in GL_p(\mathbb{R})$, hvis $\Sigma \in GL_p(\mathbb{R})$ $n \geq p$

Bevis:

$$\mathbf{X} \sim N_{n \times p}(\mathbf{M}, \Sigma), \quad \mathbf{X} = (\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_p)$$

Lad $i = (1, \dots, p)$

Da $(\mathbf{X}_i \mid \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{i-1})$ er normalfordelt med invertibel covariansmatrix, da $\Sigma \in GL_p(\mathbb{R})$ jvf. lemma 9.20 og opg. 9.4.

Dvs. $\mathbf{X}_i \notin \text{sp}(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{i-1})$ n.o.

Altså er $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p$ lin. uafh. n.o.

Dvs. $\mathbf{X}$ har fuld rang, dermed også $W = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$

□

opgave 9.21

$$W \sim W_p(\Sigma, f) \quad B \in \text{Mat}_{p \times q}(\mathbb{R})$$

(1)

$$\text{Påstand: } B^* W B \sim W_q(B^* \Sigma B, f)$$

Beweis:

$$\exists Z \sim N_{f \times p}(0, I_f \otimes \Sigma) : W = Z^* Z \sim W_p(\Sigma, f)$$

$$B^* W B = (ZB)^* (ZB)$$

$$ZB \sim N(0, I_f \otimes B^* \Sigma B) \quad \text{jvf. Lemma 9.21 (3)}$$

$$\text{Dvs. } B^* W B = (ZB)^* (ZB) \sim W_q(B^* \Sigma B, f)$$

□

(2)

$$\text{Påstand: } \forall a \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\} : \frac{a^* W a}{a^* \Sigma a} \sim \chi^2(f)$$

Beweis:

$$\exists Z \sim N_{f \times p}(0, I_f \otimes \Sigma) : W = Z^* Z$$

$$\frac{a^* W a}{a^* \Sigma a} = \frac{(Za)^* (Za)}{\sqrt{a^* \Sigma a} \sqrt{a^* \Sigma a}} \quad \frac{Za}{\sqrt{a^* \Sigma a}} \sim N_{f \times 1}(0, \Phi)$$

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{a^* \Sigma a}} I_f \frac{1}{\sqrt{a^* \Sigma a}} \otimes a^* \Sigma a = I_f$$

$\uparrow$
 Lemma 9.21
 (3)

Pr. def. af χ^2 -fordelingen ser vi dermed, idet koordinaterne i $Za/\sqrt{a^*Za}$ er uafh. jvf. sætn. 9.17 (E)+(F) at $\frac{a^*Wa}{a^*Za} \sim \chi^2(f)$

□

(3)

Ved at sætte $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ← i'ke rækker og gennemfører ovenstående udregninger, ser vi, at $W_{ii} \sim \chi^2(1)$

opgave 9.22

$$W_1 \perp W_2 \quad W_1 \sim W_p(\Sigma, f_1), \quad W_2 \sim W_p(\Sigma, f_2)$$

Påstand: $W_1 + W_2 \sim W_p(\Sigma, f_1 + f_2)$

Beris:

$$\exists Z_1, Z_2 \quad Z_1 \sim N_{f_1 \times p}(0, I_{f_1} \otimes \Sigma)$$

$$Z_2 \sim N_{f_2 \times p}(0, I_{f_2} \otimes \Sigma) \quad \text{sa}$$

$$W_1 = Z_1^* Z_1, \quad W_2 = Z_2^* Z_2$$

$$W_1 + W_2 = Z_1^* Z_1 + Z_2^* Z_2 = Z^* Z \quad Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

hvor $Z \sim N_{(f_1+f_2) \times p}(0, I_{f_1+f_2} \otimes \Sigma)$ idet $W_1 \perp W_2$

Det enskede følger derfor af def. 9.22

□

Meddelelse 21

Forelæsningerne i sidste uge

(Onsdag den 26. februar): Begyndte på Afsnit 9.6 *Lineære normale modeller*, hvor jeg nåede frem til øverst på side 9.24.

(Fredag den 28. februar): Fortsætter med lineære normale modeller, hvor jeg slap onsdag. Jeg nåede et stykke ind i Eksempel 9.4 (Eller 9.28 i den fortløbende nummerering).

Forelæsningerne i denne uge

(Onsdag den 5. marts): Afsluttede *Lineære normale modeller* og gennemgik Afsnit 9.7 *Estimation af partielle kovarianser og partielle korrelationer*. Omtalte også Eksempel 9.31 (i den fortløbende nummerering).

(Fredag den 7. marts): Bliver omtrent færdig med teorien den flerdimensionale normalfordeling og når måske at begynde omtalen af den flerdimensionale normalfordeling i SAS.

Øvelserne i de næste uger

(Uge 11: 10. marts - 16. marts): 9.18 (Gengivet på Meddelelse 19), 9.19, 9.20, 9.21, 9.22, samt manglende opgaver fra sidste uge.

(Uge 12: 11. marts - 23. marts): 9.23, 9.24, 9.25, 9.26 9.27 9.36 (Alle gengivet på Meddelelse 19)

Afleveringsopgaver

(Uge 11: 10. marts - 16. marts): 9.20 (På Meddelelse 20)

(Uge 12: 17. marts - 23. marts): Ingen på grund af den obligatoriske opgave. Med den ihærdighed hvormed I plejer at lave og aflevere de opgaver, må det være en betydelig aflastning.

Udleveret materiale

Obligatorisk opgave 2.

Resten af den teoretiske del af Kapitel 9. (Hvis vi får løst de tekniske problemer med konvertering fra postscript til pdf, vil Bind 3 kunne købes i bogladen i vandrehallen fredag den 7. marts)

pdf version af bind3 ligger på

http://home.imf.au.dk/statbib/atiskurser/stat1/noter/bind3/main_bind3.pdf

og postscript version af bind 3 ligger på

http://home.imf.au.dk/statbib/atiskurser/stat1/noter/bind3/main_bind3.ps

opgave 9.8

1)

Det er klart, at $\forall i=1, \dots, k \quad \bar{X}_i - \beta_i \cdot \bar{X}^{(2)} \perp \bar{X}^{(2)}$
 hvis

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 - \beta_1 \bar{X}^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{X}_k - \beta_k \bar{X}^{(2)} \end{pmatrix} \perp \bar{X}^{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{Y} \\ \bar{X}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -\Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}^{(1)} \\ \bar{X}^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{idet } (\Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21})^* = \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1}$$

$\begin{pmatrix} \bar{Y} \\ \bar{X}^{(2)} \end{pmatrix}$ er normalfordelt med kovariansmatrix (jvf. prop. 9.3)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} I & -\Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}^* \\ &= \begin{pmatrix} \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} & \Sigma_{12} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{22} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{idet } (\Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1})^* = \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}) \end{aligned}$$

Jvf. prop. 9.6 er $\bar{Y} \perp \bar{X}^{(2)}$

2)

Da $\mu=0$ fås

$$\begin{aligned}\text{Var}(X_i - \alpha^* X^{(2)}) &= E[(X_i - \alpha^* X^{(2)})^2] \\&= E[(X_i - \beta^* X^{(2)}) + (\beta^* - \alpha^*) X^{(2)}]^2 \\&= E[(X_i - \beta^* X^{(2)})^2] + E[(\beta^* - \alpha^*)^2 X^{(2)2}] \\&\quad + E[(X_i - \beta^* X^{(2)})(\beta^* - \alpha^*) X^{(2)}] \\&= \text{Var}(X_i - \beta^* X^{(2)}) + (\beta^* - \alpha^*) E[X^{(2)} X^{(2)*}] (\beta - \alpha) \\&\quad + (\beta^* - \alpha^*) E[X^{(2)} (X_i - \beta^* X^{(2)})] \\&= \text{Var}(X_i - \beta^* X^{(2)}) + (\beta^* - \alpha^*) \Sigma_{22} (\beta - \alpha)\end{aligned}$$

idet $(X_i - \beta^* X^{(2)}) \perp X^{(2)}$ og $\mu=0$, dvs.

$$\text{Cov}(X^{(2)}, X_i - \beta^* X^{(2)}) = E[X^{(2)} (X_i - \beta^* X^{(2)})] = 0$$

Σ_{22} er invertibel og er covariansmatrix for $X^{(2)}$

$$(\beta^* - \alpha^*) \Sigma_{22} (\beta - \alpha) \geq 0 \quad \forall \alpha, = \text{hvis } \alpha = \beta$$

Dermed følger af ovenstående, at $\beta = \Sigma_{22}^{-1} \sigma_{(i)}$

minimerer variansen af $X_i - \alpha X^{(2)}$

3)

$$\forall c, \alpha \in \mathbb{R}^n$$

$$E[(X_1 - \beta^* X^{(2)})^2] \leq E[(X_1 - c \alpha^* X^{(2)})^2]$$

$$E[X_1^2] + E[(\beta^* X^{(2)})^2] - 2E[X_1 \beta^* X^{(2)}] \leq E[X_1^2] + c^2 E[(\alpha^* X^{(2)})^2] - 2c E[X_1 \alpha^* X^{(2)}]$$

$\Downarrow$

$$2c E[X_1 \alpha^* X^{(2)}] - c^2 E[(\alpha^* X^{(2)})^2] \leq 2E[X_1 \beta^* X^{(2)}] - E[(\beta^* X^{(2)})^2]$$

$\Downarrow$

$$2c \frac{E[X_1 \alpha^* X^{(2)}]}{\sqrt{\sigma_{11}} \sqrt{E[(\alpha^* X^{(2)})^2]}} - c^2 \frac{E[(\alpha^* X^{(2)})^2]}{\sqrt{\sigma_{11}} \sqrt{E[(\alpha^* X^{(2)})^2]}} \leq 2 \frac{E[X_1 \beta^* X^{(2)}]}{\sqrt{\sigma_{11}} \sqrt{E[(\beta^* X^{(2)})^2]}} - \frac{E[(\beta^* X^{(2)})^2]}{\sqrt{\sigma_{11}} \sqrt{E[(\beta^* X^{(2)})^2]}}$$

$$c := \frac{\sqrt{E[(\beta^* X^{(2)})^2]}}{\sqrt{E[(\alpha^* X^{(2)})^2]}}$$

$\Downarrow$

$$2 \frac{E[X_1 \alpha^* X^{(2)}]}{\sqrt{\sigma_{11}} \sqrt{E[(\alpha^* X^{(2)})^2]}} - \frac{\sqrt{E[(\beta^* X^{(2)})^2]}}{\sqrt{\sigma_{11}}} \leq 2 \frac{E[X_1 \beta^* X^{(2)}]}{\sqrt{\sigma_{11}} \sqrt{E[(\beta^* X^{(2)})^2]}} - \frac{\sqrt{E[(\beta^* X^{(2)})^2]}}{\sqrt{\sigma_{11}}}$$

$\Downarrow$

$$\frac{E[X_1 \alpha^* X^{(2)}]}{\sqrt{\sigma_{11}} \sqrt{E[(\alpha^* X^{(2)})^2]}} \leq \frac{E[X_1 \beta^* X^{(2)}]}{\sqrt{\sigma_{11}} \sqrt{E[(\beta^* X^{(2)})^2]}}$$

Dvs. korrelationen mellem X_i og $\alpha^* X^{(2)}$ er størst
for $\alpha = \beta$ (Husk $\mu = 0$, samt dinne def.)

4)

Pr. def. 9.13 og 3) ses

$$\begin{aligned} \overline{R}_{i, k+1, \dots, p} &= \frac{E[X_i \beta^* X^{(2)}]}{\sqrt{\sigma_{ii}} \sqrt{E[(\beta^* X^{(2)})^2]}} \\ &= \frac{E[\sigma_{(i)}^* \Sigma_{22}^{-1} X^{(2)} X_i]}{\sqrt{\sigma_{ii}} \sqrt{E[\sigma_{(i)}^* \Sigma_{22}^{-1} X^{(2)} X^{(2)*} \Sigma_{22}^{-1} \sigma_{(i)}]}} \\ &= \frac{\sigma_{(i)}^* \Sigma_{22}^{-1} E[X^{(2)} X_i]}{\sqrt{\sigma_{ii}} \sqrt{\sigma_{(i)}^* \Sigma_{22}^{-1} E[X^{(2)} (X^{(2)})^*] \Sigma_{22}^{-1} \sigma_{(i)}}} \\ &= \frac{\sigma_{(i)}^* \Sigma_{22}^{-1} \sigma_{(i)}}{\sqrt{\sigma_{ii}} \sqrt{\sigma_{(i)}^* \Sigma_{22}^{-1} \sigma_{(i)}}} = \frac{\sqrt{\sigma_{(i)}^* \Sigma_{22}^{-1} \sigma_{(i)}}}{\sqrt{\sigma_{ii}}} \end{aligned}$$

5)

$$\text{Juf. 5.6: } \sigma_{ii, k+1, \dots, p} = \sigma_{ii} - \sigma_{(i)}^* \Sigma_{22}^{-1} \sigma_{(i)}$$

Af 4) ses

$$\begin{aligned} 1 - \overline{R}_{i, k+1, \dots, p}^2 &= 1 - \frac{\sigma_{(i)}^* \Sigma_{22}^{-1} \sigma_{(i)}}{\sigma_{ii}} \\ &= \frac{\sigma_{ii} - \sigma_{(i)}^* \Sigma_{22}^{-1} \sigma_{(i)}}{\sigma_{ii}} = \frac{\sigma_{ii, k+1, \dots, p}}{\sigma_{ii}} \end{aligned}$$

opgave 9.12

I grundmodellen har vi (jvf. s. 16)

$$L(\underline{\mu}, \underline{\Sigma}) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{p/2} \frac{1}{|\underline{\Sigma}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_i - \underline{\mu})^* \underline{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}_i - \underline{\mu})}$$

$$\text{og (jvf. s. 18)} \quad \hat{\underline{\mu}} = \overline{\mathbf{x}}., \quad \hat{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{x}}.) (\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{x}}.)^*$$

$$H_0: \overline{R}_{1,2,\dots,p} = 0$$

$$\overline{R}_{1,2,\dots,p} = 0 \quad \xLeftrightarrow[\text{opg. 9.8}]{\sigma_{(1)}^* \Sigma_{22}^{-1} \sigma_{(1)} = 0} \sigma_{(1)} = 0 \quad \xLeftrightarrow[\substack{\Sigma_{22}^{-1} \text{ pos. def.} \\ \text{(symmetrisk invertibel)}}]{\sigma_{(1)} = 0}$$

Vi ser

$$L(\underline{\mu}, \underline{\Sigma} \mid \sigma_{(1)} = 0) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{p/2} \frac{1}{|\underline{\Sigma}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_i^{(1)} - \mu_1)^* \frac{1}{\sigma_{11}}(\mathbf{x}_i^{(1)} - \mu_1)} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{p/2} \frac{1}{|\Sigma_{22}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_i^{(2)} - \underline{\mu}^{(2)})^* \Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x}_i^{(2)} - \underline{\mu}^{(2)})}$$

$$\text{; hvor } \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \underline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \underline{\mu}^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{og jvf. opg. 9.4}$$

$$= L(\mu_1, \sigma_{11}) L(\underline{\mu}^{(2)}, \underline{\Sigma}_{22}) \quad \text{dermed}$$

$$\hat{\underline{\mu}} = \begin{pmatrix} \overline{x}_{1\cdot} \\ \overline{x}_{p\cdot} \end{pmatrix}, \quad \hat{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \overline{x}_{1\cdot})^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^n (x_i^{(2)} - \overline{x}^{(2)}) (x_i^{(2)} - \overline{x}^{(2)})^* & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Dermed er

$$\begin{aligned}
 Q(x) &= \frac{\max_{H_0} L}{\max L} \\
 &\stackrel{(9.17)}{=} \frac{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\hat{\sigma}_{11}^{n/2}} e^{-\eta/2} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{n(p-1)/2}} \frac{1}{|\hat{\Sigma}_{22}|^{n/2}} e^{-n(p-1)/2}}{\frac{1}{(2\pi)^{np/2}} \frac{1}{|\hat{\Sigma}|^{n/2}} e^{-np/2}} \\
 &= \left(\frac{|\hat{\Sigma}|}{\hat{\sigma}_{11} |\hat{\Sigma}_{22}|} \right)^{n/2} \quad (*)
 \end{aligned}$$

Juf. opgave 9.4 (9.56): $|\Sigma_{11.2}| = \frac{|\Sigma|}{|\Sigma_{22}|}$

og idet $\Sigma_{11.2}$ er en 1×1 matrix har vi $\sigma_{11.2, \dots, p} = |\Sigma_{11.2}|$

$$(*) = \left(\frac{\hat{\sigma}_{11.2, \dots, p}}{\hat{\sigma}_{11}} \right)^{n/2} = \left(1 - \hat{R}_{1.2, \dots, p}^2 \right)^{n/2}$$

opgave 9.13

1)

$$\begin{aligned} j=1, \dots, q: \quad \langle u_j, e \rangle &= \langle t_j - \bar{E}_j e, e \rangle \\ &= \langle t_j, e \rangle - \bar{E}_j \langle e, e \rangle \\ &= t_{\cdot j} - t_{\cdot j} = 0, \text{ dus } u_j \perp e \end{aligned}$$

Pr. def. af u_j er det klart $\text{span}(e, t_{(1)}, \dots, t_{(q)}) \supseteq \text{span}(e, u_{(1)}, \dots, u_{(q)})$,
men $e, u_{(1)}, \dots, u_{(q)}$ er uafh. og deres antal er $q+1$,
dus. $\text{span}(e, t_{(1)}, \dots, t_{(q)}) = \text{span}(e, u_{(1)}, \dots, u_{(q)})$

2)

$$\begin{aligned} \text{Betragt } \alpha e + \beta_1 t_{(1)} + \dots + \beta_q t_{(q)} &= \alpha^u e + \beta_1^u u_{(1)} + \dots + \beta_q^u u_{(q)} \\ &= \alpha^u e + \beta_1^u (t_{(1)} - \bar{E}_1 e) + \dots + \beta_q^u (t_{(q)} - \bar{E}_q e) \\ &= (\alpha^u - \beta_1^u \bar{E}_1 - \dots - \beta_q^u \bar{E}_q) e + \beta_1^u t_{(1)} + \dots + \beta_q^u t_{(q)} \end{aligned}$$

Dus. da de indgående vektorer er lineært uafh.:

$$\alpha^u = \alpha + \beta_1^u \bar{E}_1 + \dots + \beta_q^u \bar{E}_q, \quad \beta_i^u = \beta_i$$

3)

Jvf. s. 30 er maks. likelihood est. $T(T^*T)^{-1}T^*X$ (lin algebra)

For at få de interessante koordinater med hensyn til vektorerne $e, u_1, \dots, u_q$, dvs. $\hat{\theta}$ skal vi løse

$$\tilde{T}\hat{\theta} = \tilde{T}(\tilde{T}^*\tilde{T})^{-1}\tilde{T}^*X \Rightarrow \hat{\theta} = (\tilde{T}^*\tilde{T})^{-1}\tilde{T}^*\tilde{T}(\tilde{T}^*\tilde{T})^{-1}\tilde{T}^*X \\ = (\tilde{T}^*\tilde{T})^{-1}\tilde{T}^*X$$

Under grundmodellen: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \sim N_n(\mu, \sigma^2 I_n)$

Af prop. 9.3 følger, at $\hat{\theta} \sim N_n((\tilde{T}^*\tilde{T})^{-1}\tilde{T}^*\mu, (\tilde{T}^*\tilde{T})^{-1}\sigma^2)$ idet $(\tilde{T}^*\tilde{T})^{-1}\tilde{T}^*\sigma^2 I_n ((\tilde{T}^*\tilde{T})^{-1}\tilde{T}^*)^* = \sigma^2(\tilde{T}^*\tilde{T})^{-1}$

4)

$$\tilde{T}^*\tilde{T} = (e \ U)^* (e \ U) \stackrel{(1)}{=} \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & U^*U \end{pmatrix}$$

Jvf. opg. 9.4 (9.52):

$$(\tilde{T}^*\tilde{T})^{-1} = \begin{pmatrix} 1/n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (U^*U)^{-1} \end{pmatrix}$$

Jvf. prop. 9.6 gælder, idet $\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}^u \\ \hat{\beta} \end{pmatrix}$,

at $\hat{\alpha}^u \perp \hat{\beta}$ og udfr. def. på $\tilde{T}$ ses, at

$$\hat{\alpha}^u = \bar{X}_\cdot \sim N(\alpha^u, \sigma^2/n)$$

$$\hat{\beta} = (U^*U)^{-1}U^*X \sim N_q(\beta, \sigma^2(U^*U)^{-1})$$

5)

Jvf. kap. 4 (4.4) fås

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \|\mathbf{X} - \mathbf{P}_1(\mathbf{X})\|^2, \quad \mathbf{P}_1 = \tilde{\mathbf{T}}(\tilde{\mathbf{T}}^* \tilde{\mathbf{T}})^{-1} \tilde{\mathbf{T}}^*$$

Satn. 4.1: $n\hat{\sigma}^2 \sim \sigma^2 \chi^2(n - (q+1))$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \mathbf{X}^* (\mathbf{I}_n - \tilde{\mathbf{T}}(\tilde{\mathbf{T}}^* \tilde{\mathbf{T}})^{-1} \tilde{\mathbf{T}}^*) \mathbf{X}$$

$$\sim \sigma^2 \chi^2(n - (q+1)) / n \sim W_1(\frac{1}{n} \sigma^2, n - (q+1))$$

(Jvf. s. 26-27)

6)

Projektionsmatricen ned på L_2 er $\mathbf{P}_2 = \mathbf{e}(\mathbf{e}^* \mathbf{e})^{-1} \mathbf{e}^* = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

$$H_2: \beta_1 = \dots = \beta_q = 0$$

Under H_2 :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X} - \mathbf{P}_1(\mathbf{X})\| &= \|\mathbf{X} - \mathbf{T} \hat{\boldsymbol{\theta}}\|^2 = \|\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{e} - \mathbf{U} \hat{\boldsymbol{\beta}}\|^2 \\ &= \|\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{e}\|^2 - \|\mathbf{U} \hat{\boldsymbol{\beta}}\|^2 \quad \text{pga. ortogonalitet (Jvf. (1) + kap 4)} \end{aligned}$$

Jvf. s. 26

$$Q = \left(\frac{\|\mathbf{X} - \mathbf{P}_1(\mathbf{X})\|^2}{\|\mathbf{X} - \mathbf{P}_2(\mathbf{X})\|^2} \right)^{1/2} = \left(\frac{SSD_{\mathbf{X}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^* \mathbf{U}^* \mathbf{U} \hat{\boldsymbol{\beta}}}{SSD_{\mathbf{X}}} \right)^{1/2} = (1 - R^2)^{1/2}$$

(og store værdier af R^2 er kritiske jvf. likelihood teorien)

$$\|\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{e}\|^2 = SSD_{\mathbf{X}}$$

7)

Juf. sætn. 4.1: (idet $(n - (q+1)) - (n-1) = q$)

$$\frac{R^2}{1+R^2} \cdot \frac{n-(q+1)}{q} = \frac{1-(1-R^2)}{(1-R^2)} \cdot \frac{n-(q+1)}{q}$$

$$= \frac{1-Q^{\frac{2}{n}}}{Q^{\frac{2}{n}}} \cdot \frac{n-(q+1)}{q} \sim F(q, n-(q+1))$$

Meddelelse 20

Forelæsningerne i sidste uge

(Onsdag den 19. februar): Jeg fortsatte med Kapitel 9 om den flerdimensionale normalfordeling, hvor jeg nåede til side 9.15 lige før Afsnit 9.4.

(Fredag den 21. februar): Gennemgik Afsnit 9.5 (Estimation i en stikprøve fra N_p) og 9.6 (Hotelling's T^2 for simpel hypotese i N_p) af den flerdimensionale normalfordeling.

Forelæsningerne i denne uge

(Onsdag den 26. februar): Begyndte på Afsnit 9.6 *Lineære normale modeller*, hvor jeg nåede frem til øverst på side 9.24.

(Fredag den 28. februar): Fortsætter hvor jeg slap onsdag.

Øvelserne i de næste uger

(Uge 10: 3. marts - 9. marts): 9.8, 9.12, 9.13 (på Meddelelse 19.)

Bemærkninger til opgaverne på Meddelelse 19.

(Uge 11: 10. marts - 16. marts): 9.18 (Gengivet på Meddelelse 19), 9.19, 9.20, 9.21, 9.22, 9.23

Afleveringsopgaver

(Uge 9: 24. februar - 2. marts): De tre første spørgsmål af opgave 9.3 (gengivet på Meddelelse 18)

(Uge 10: 3. marts - 9. marts): De tre første spørgsmål af opgave 9.8 (gengivet på Meddelelse 19)

(Uge 11: 10. marts - 16. marts): 9.20 (På Meddelelse 20)

Udleveret materiale

Side 9.25-9.32 fra Kapitel 9 om den flerdimensionale normalfordeling.

Opgave 9.19

Lad X være $n \times p$ dimensionalt normalfordelt

$$X \sim N_{n \times p}(M, \Phi \otimes \Sigma),$$

og lad $Y = AXB$ og $Z = CXD$, hvor A , B , C og D er henholdsvis $a \times n$, $p \times b$, $c \times n$ og $p \times d$ matricer.

Vis, at Y og Z er uafhængige hvis og kun hvis enten $A\Phi C^* = 0$ eller $B^*\Sigma D = 0$.

Opgave 9.20

Lad $X_1, \dots, X_n$ være uafhængige og identisk regulært normalfordelt $N_p(\mu, \Sigma)$. Vis, at hvis $n > p$ er

$$W = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^*$$

positiv definit med sandsynlighed 1.

En alternativ formulering, som vi ofte benytter er følgende:

Hvis $W \sim W_p(\Sigma, f)$ og Σ er positiv definit, så er W positiv definit med sandsynlighed 1, hvis $f \geq p$.

Opgave 9.21

Lad $W = \{W_{ij}\}_{i,j=1}^p$ være Wishart fordelt $W_p(\Sigma, f)$ og lad B være en $p \times q$ matriks.

(1) Vis, at

$$B^*WB \sim W_q(B^*\Sigma B, f).$$

(2) Vis, at for enhver vektor $a \in \mathbb{R}^p$, $a \neq 0$, er

$$\frac{a^*Wa}{a^*\Sigma a} \sim \chi^2(f).$$

(3) Hvad er fordelingen til W_{ii} ?

Opgave 9.22 Lad W_1 og W_2 være uafhængige og Wishart fordelt

$$W_1 \sim W_p(\Sigma, f_1) \text{ og } W_2 \sim W_p(\Sigma, f_2).$$

Vis, at

$$W_1 + W_2 \sim W_p(\Sigma, f_1 + f_2).$$

Opgave 9.23 Lad $S \sim W_p(\Sigma, f)$ med Σ invertibel og $f \geq p$. Lad $\Sigma^{-1} = \{\sigma^{ij}\}_{i,j=1}^p$ og $S^{-1} = \{s^{ij}\}_{i,j=1}^p$, når S er invertibel. (Det er S med sandsynlighed 1 når $f \geq p$ ifølge Opgave 9.20.)

Vis, at

$$\frac{\sigma^{pp}}{W^{pp}} \sim \chi^2(f - (p - 1)), \text{ samt at } W^{pp} \text{ er uafhængig af } \{W_{ij}\}_{i,j=1}^{p-1}$$

og

$$\frac{a^*\Sigma^{-1}a}{a^*W^{-1}a} \sim \chi^2(f - (p - 1)) \text{ for enhver fast vektor } a \in \mathbb{R}^p, \quad a \neq 0.$$

Opgave 9.24 Lad W være Wishart fordelt $W_p(\Sigma, f)$ med Σ invertibel og $f \geq p$.

Vis, at

$$|W| \sim |\Sigma| \chi^2(f) \cdot \chi^2(f-1) \cdots \chi^2(f-p+1),$$

hvor $\chi^2(f), \dots, \chi^2(f-p+1)$ er indbyrdes uafhængige og $\chi^2(f-i+1)$ er χ^2 -fordelt med $f-i+1$ frihedsgrader, $i = 1, \dots, p$.

Opgave 9.25 Lad W være Wishart fordelt $W_p(\Sigma, f)$ med Σ invertibel og $f \geq p+2$.

Vis, at

$$EW^{-1} = \frac{1}{f-p-1} \Sigma^{-1}.$$

Opgave 9.26 (Hotellings T^2)

Lad W være Wishart fordelt $W \sim W_p(\Sigma, f)$ med $f \geq p$ og Σ regulær, og lad Y være normalfordelt $Y \sim N_p(0, \Sigma)$. Antag Y og W er uafhængige.

(1) Vis, at

$$\frac{f-(p-1)}{p} Y^* W^{-1} Y \sim F(p, f-(p-1)).$$

Ofte har man en estimator X for en parameter μ , hvor $X \sim N_p(\mu, k^{-1}\Sigma)$, og man har et skøn, S , over Σ som er $W_p(f^{-1}\Sigma, f)$ fordelt og uafhængigt af X . En naturlig teststørrelse for hypotesen $H_0: \mu = \mu_0$ er Hotellings

$$T^2 = k(X - \mu_0)^* S^{-1} (X - \mu_0).$$

(2) Vis, at

$$\frac{f-(p-1)}{p} \frac{T^2}{f} \sim F(p, f-(p-1)).$$

Opgave 9.27 Lad R være $W_p(\Sigma, n)$ og $U \sim N_p(0, \Sigma)$. Antag R og U er uafhængige, $n \geq p$ og Σ regulær.

(1) Vis ved hjælp af Opgave 9.5, at

$$\frac{|R|}{|R + UU^*|} = \frac{1}{1 + U^* R^{-1} U}.$$

(2) Vis ved hjælp af Opgave 9.26, at

$$U^* R^{-1} U \frac{n-p+1}{p} \sim F(p, n-p+1)$$

og

$$\frac{|R|}{|R + UU^*|} \sim B\left(\frac{n-p+1}{2}, \frac{p}{2}\right).$$

(3) Vis ved hjælp af Basu's sætning, at

$$\frac{|R|}{|R + UU^*|} \text{ og } R + UU^*$$

er uafhængige.

Opgave 9.36

Formålet med denne opgave er at definere nogle tests, som udskrives af statistiske programpakker i forbindelse med analyse af lineære normale modeller for den flerdimensionale normalfordeling.

Vi har set Wilks test for reduktion fra underrummet L_1 af dimension d_1 til underrummet L_2 af dimension d_2 i en flerdimensional lineær normal model som

$$W = \frac{|SSD_1|}{|SSD_1 + SSD_2|},$$

hvor $SSD_1 \sim W(\Sigma, n - d_1)$ og $SSD_2 \sim W(\Sigma, d_1 - d_2)$ er uafhængige. For bekvem sammenligning med SAS skifter vi notation til

$$W = \frac{|E|}{|E + H|},$$

hvor $E \sim W(\Sigma, n - d_1)$ og $H \sim W(\Sigma, d_1 - d_2)$ er uafhængige. Desuden antages, at $n - d_1 \geq p$. Her står E for *Error* og H for *Hypothesis*. Wilks test og mindst tre andre test kan udtrykkes ved egenverdierne for matricen $E^{-1}H$.

(1) Vis, at

$$W = \frac{|E|}{|E + H|} = |I_p + E^{-1}H|^{-1} = \prod_{i=1}^p (1 + \lambda_i)^{-1},$$

hvor λ_i , $i = 1, \dots, p$, er egenverdierne for $E^{-1}H$.

(2) Vis, at hvis λ er en egenverdi for $E^{-1}H$, så er $\lambda/(1 + \lambda)$ en egenverdi for $(E + H)^{-1}H$, så

$$\text{tr}(E + H)^{-1}H = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i}.$$

Dette test kaldes *Pillai's trace*.

De to sidste er *Hotelling-Lawley's trace*

$$\text{tr}E^{-1}H = \sum_{i=1}^p \lambda_i$$

og *Roy's maximum root test*

$$\lambda_{\max} = \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}.$$

STAT 1, TØ nr. 19

opgave 9.1

1)

Påstand:

Antag B har en højreinvert H , da gælder
 $r(B) = r(H) = r$ (dim af vektorrummet)

Beweis:

Antag $r(B) < r$ eller $r(H) < r$, da gælder
 $r(BH) < r$, men $BH = I_r$. $\leadsto$

Påstand:

Antag $r(B) = r$, da har B en højreinvert

Beweis:

En konsekvens af lineær algebra, at $\exists H : BH = I_r$ $\square$

opgave 9.2

$$A \in GL_p(\mathbb{R}), B \in \text{Mat}_{p \times n}(\mathbb{R}), C \in GL_n(\mathbb{R}), D \in \text{Mat}_{n \times p}(\mathbb{R})$$

$$\text{Påstand: } (A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$$

hvis $(C^{-1} + DA^{-1}B)$ er invertibel

Beweis:

$$(A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1})(A + BCD)$$

$$= I + A^{-1}BCD - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}D - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}BCD$$

$$= I + A^{-1}B(I - (C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}C^{-1} - (C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}B)CD$$

$$= I + A^{-1}B(I - (C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}(C^{-1} + DA^{-1}B))CD$$

$$= I$$

□

opgave 9.3

1)

Påstand: $\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$

Beweis: Folgt direkt af def. af sum af matricer. $\square$

2)

$A \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$, $B \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$

Påstand: $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

Beweis:

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot b_{ji} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_{ji} \cdot a_{ij} = \text{tr}(BA) \quad \square$$

3)

Påstand: $\text{tr}(B^{-1}AB) = \text{tr}(A)$

Beweis:

$$\text{tr}(B^{-1}AB) \underset{2)}{=} \text{tr}(ABB^{-1}) = \text{tr}(A) \quad \square$$

4)

Paßstand:

Huis $A^2 = A$, da gælden $\text{tr}(A) = r(A)$

Bæis:

Antag $r = r(A)$, $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$

$\exists B \in \text{Mat}_{n \times r}(\mathbb{R}), C \in \text{Mat}_{r \times n}(\mathbb{R}) : A = BC, I_r = CB$

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(A^2) = \text{tr}(BCBC) \stackrel{2)}{=} \text{tr}(CB CB) = \text{tr}(I_r) = r$$

□

5)

x spæktor

Paßstand: $x^* A x = \text{tr}(x x^* A)$

Bæis:

$$x^* A x = \text{tr}(x^* A x) \stackrel{2)}{=} \text{tr}(x x^* A)$$

□

opgave 9.5

$$A \in \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R}), B \in \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$$

$$\text{Påstand: } |I_n + AB| = |I_k + BA|$$

Bevis:

$$C := \begin{Bmatrix} I_n & -A \\ B & I_k \end{Bmatrix}$$

I notationen fra opg. 9.4 : $A_{11} = I_n, A_{22} = I_k$

$A_{12} = -A, A_{21} = B$ jvf. (9.55) og (9.56) har vi

$$\begin{aligned} |I_n + AB| &= |A_{22}| |A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}| \\ &= |A_{11}| |A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}| = |I_k + BA| \end{aligned}$$

□

opgave 9.6

1)

Påstand: Hvis Σ er regulær er både Σ_{11} , Σ_{22} regulære

Beweis:

Antag at Σ_{11} ikke er regulær, dvs. ikke invertibel, dvs. $r(\Sigma_{11}) < k$, da $\exists B_1 \in \text{Mat}_{k \times r(\Sigma_{11})}(\mathbb{R})$

og $\exists U_1 \sim N_{r(\Sigma_{11})}(0, I_{r(\Sigma_{11})})$: $\underline{X}^{(1)} = \underline{\mu}_1 + B_1 U_1$ (prop. 9.14)

Tilsvarende $\exists B_2 \in \text{Mat}_{(p-k) \times r(\Sigma_{22})}(\mathbb{R})$, $U_2 \sim N_{r(\Sigma_{22})}(0, I_{r(\Sigma_{22})})$

$\underline{X}^{(2)} = \underline{\mu}_2 + B_2 U_2$ (prop. 9.14)

Alt i alt: $\underline{X} = \begin{pmatrix} \underline{X}^{(1)} \\ \underline{X}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \underline{\mu}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$,

men $r\left(\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}\right) < p$, da $r(\Sigma_{11}) < k$, altså er

Σ ikke regulær $\leadsto$ dermed er $r(\Sigma_{11}) = k$ og

Σ_{11} er invertibel. Et analogt argument gælder for Σ_{22} . $\square$

opgave 9.17

(1)-(4) er triviale

(5)

$$A_1 A_2 \otimes B_1 B_2 = \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} a_{ji}^{(2)} B_1 B_2 \right\}$$
$$= \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} B_1 a_{ji}^{(2)} B_2 \right\} = (A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2)$$

B_1	B_1
B_1	B_1

B_1	B_2	B_2
B_1	B_2	B_2

(6)

A, B invertible

$$(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) \stackrel{(5)}{=} (AA^{-1}) \otimes (BB^{-1}) = I, \text{ dvs. } (A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

(7)

$$(A \otimes B)^* = \{a_{ij} B_j^*\} = \{a_{ji} B_i^*\} = A^* \otimes B^*$$

(8)-(9) triviale

(10)

$$|A \otimes B| \stackrel{(5)}{=} |A \otimes I_p| |I_n \otimes B| = |A|^p |B|^n$$

jvf. række id. sgl udvikling af determinanter

Meddelelse 19

Forelæsningerne i sidste uge

(Onsdag den 12. februar): Jeg fortsatte med Kapitel 9 om den flerdimensionale normalfordeling, hvor jeg nåede til side 9.4 lige før Proposition 9.6.

(Fredag den 14. februar): Jeg fortsatte gennemgangen af den flerdimensionale normalfordeling og nåede til definition af en $n \times p$ dimensional normalfordeling side 9.11.

Forelæsningerne i denne uge

(Onsdag den 19. februar): Jeg fortsatte med Kapitel 9 om den flerdimensionale normalfordeling, hvor jeg nåede til side 9.15 lige før Afsnit 9.4.

(Fredag den 21. februar): Fortsætter gennemgangen af den flerdimensionale normalfordeling og begynder med Afsnit 9.4.

Forelæsningerne i næste uge

ONSDAG DEN 26. FEBRUAR 2003 11-12 ER FORELÆSNINGEN I AUDITORIEHUSET Aud 3

Øvelserne i de næste uger

(Uge 9: 24. februar - 2. marts): 9.1, 9.2, 9.3 spørgsmål 4) og 5), 9.4, 9.5, 9.6, 9.17

Bemærkninger til opgaverne:

9.4: En liste af nyttige resultater, som vi ofte bruger.

(Uge 10: 3. marts - 9. marts): 9.8, 9.12, 9.13 (på denne meddelelse.)

Bemærkninger til opgaverne:

Der er et tydeligt tema for opgaverne: Den multiple korrelationskoefficient. Opgave 9.13 indeholder nyttige oplysninger om multipel regression og den i den sammenhæng meget anvendte R^2 . Desuden tjener opgaven til at lette overgangen til flerdimensional multipel regression, som vi benytter som et bevisteknisk redskab.

I (4) i Opgave 9.13 vises iøvrigt uafhængigheden mellem $\bar{X}$ og $\hat{\beta}$, som blev postuleret og anvendt i Kapitel 3.

Afleveringsopgaver

(Uge 9: 24. februar - 2. marts): De tre første spørgsmål af opgave 9.3 (gengivet på Meddelelse 18)

(Uge 10: 3. marts - 9. marts): De tre første spørgsmål af opgave 9.8 (gengivet på denne meddelelse)

Udleveret materiale

Om karakteristiske funktioner: Side 100-107 fra G.R. Grimmett & D.R. Stirzaker: *Probability and Random Processes*, Oxford Science Publications, 1983.

Side 9.9-9.24 fra Kapitel 9 om den flerdimensionale normalfordeling.

Opgave 9.8

(Multipel korrelationskoefficient)

Lad $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ og lad $X^{(1)}, X^{(2)}$ være en k henholdsvis $p - k$ dimensional opdeling af X , med tilsvarende opdelinger af kovariansen

$$\Sigma = \begin{Bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{Bmatrix}.$$

Vi antager, at $\mu = 0$ da vi kun vil interessere os for spørgsmål om kovariansen. Yderligere antages, at Σ_{22} er invertibel.

Lad X_i være en komponent af $X^{(1)}$, og lad $\sigma_{(i)}$ være den i 'te søjle i Σ_{21} og lad β være den i 'te søjle i $\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$ det vil sige

$$\beta = \Sigma_{22}^{-1}\sigma_{(i)}$$

β er regressionskoefficienterne for regressionen af X_i på $X^{(2)}$.

- (1) Vis, at $X_i - \beta \cdot X^{(2)}$ og $X^{(2)}$ er uafhængige.
- (2) Vis, at det lineære funktional $\alpha \cdot X^{(2)}$ af $X^{(2)}$ for hvilket $X_i - \alpha \cdot X^{(2)}$ har mindst varians er $\beta \cdot X^{(2)}$.
- (3) Vis, at den størst mulige korrelation mellem X_i og lineære funktioner $\alpha \cdot X^{(2)}$ af $X^{(2)}$ fås for $\alpha = \beta$.

Denne størst mulige korrelation er *den multiple korrelationskoefficient* mellem X_i og $X^{(2)}$. Den betegnes med $\bar{R}_{i \cdot k+1, \dots, p}$.

- (4) Vis, at

$$\bar{R}_{i \cdot k+1, \dots, p} = \frac{\sqrt{\sigma_{(i)}^* \Sigma_{22}^{-1} \sigma_{(i)}}}{\sqrt{\sigma_{ii}}}.$$

- (5) Vis, at

$$1 - \bar{R}_{i \cdot k+1, \dots, p}^2 = \frac{\sigma_{ii \cdot k+1, \dots, p}}{\sigma_{ii}},$$

hvor $\sigma_{ii \cdot k+1, \dots, p}$ er den partielle kovarians for $X_{k+1}, \dots, X_p$ fast. $\bar{R}_{i \cdot k+1, \dots, p}^2$ har altså en fortolkning som den del af variansen på X_i som forklares af variationen af $X^{(2)}$.

Opgave 9.12

(Multipel korrelationskoefficient)

Lad $X_1, \dots, X_n$ være indbyrdes uafhængige og identisk regulært normalfordelt, $X_i = (X_{i1}, \dots, X_{ip})^* \sim N_p(\mu, \Sigma)$, $i = 1, \dots, n$. Vis, at likelihood ratio testoren Q for hypotesen, at den multiple korrelationskoefficient mellem X_{i1} og $X_i^{(2)} = (X_{i2}, \dots, X_{ip})^*$ er 0, det vil sige $\bar{R}_{1 \cdot 2, \dots, p} = 0$, er

$$Q = (1 - \bar{R}_{1 \cdot 2, \dots, p}^2)^{\frac{n}{2}},$$

hvor $R_{1.2,\dots,p}$ er defineret som den multiple korrelationskoefficient i (9.9) side 9.6, men ud fra den estimerede kovariansmatriks, det vil sige

$$R_{1.2,\dots,p} = \frac{\sqrt{\hat{\sigma}_{(1)}^* \hat{\Sigma}_{22}^{-1} \hat{\sigma}_{(1)}}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{ii}}}. \quad (1)$$

Bemærkning til Opgave 9.12 Det vises i Afsnit 9.8 at under hypotesen er fordelingen til $R_{1.2,\dots,p}$ i (1) givet ved

$$\frac{R_{1.2,\dots,p}^2}{1 - R_{1.2,\dots,p}^2} \cdot \frac{n-1-(p-1)}{p-1} \sim F(p-1, n-1-(p-1)). \quad (2)$$

Opgave 9.13

(Multipel regression)

Lad $X_1, \dots, X_n$ være indbyrdes uafhængige og endimensionalt normalfordelt, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$. Til hvert i er givet værdierne af q forklarende variable $t_{i1}, \dots, t_{iq}$, og vi betragter hypotesen

$$H_1: \mu_i = \alpha + \beta_1 t_{i1} + \dots + \beta_q t_{iq}, \quad i = 1, \dots, n,$$

eller, med andre ord, den lineære normale model M_1 specificeret ved at middelværdivektoren $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^*$ tilhører det lineære underrum

$$L_1 = \text{span}(e, t_{(1)}, \dots, t_{(q)}),$$

hvor $e = (1, \dots, 1)^* \in \mathbb{R}^n$ og $t_{(j)} = (t_{1j}, \dots, t_{nj})^* \in \mathbb{R}^n$ er alle n værdier af den j te forklarende variabel. Antag, at $e, t_{(1)}, \dots, t_{(q)}$ er lineært uafhængige. Lad T være $n \times q$ matricen hvis j te søjle er $t_{(j)}$. For de følgende beregninger er det en stor fordel at betragte de forklarende variable $u_{(1)}, \dots, u_{(q)}$, hvor

$$u_{(j)} = t_{(j)} - \bar{t}_{.j} e, \quad j = 1, \dots, q.$$

(1) Vis, at u_j er ortogonal på e , $j = 1, \dots, q$, og at

$$\text{span}(e, t_{(1)}, \dots, t_{(q)}) = \text{span}(e, u_{(1)}, \dots, u_{(q)}),$$

Vi formulerer altså samme model med de to sæt regressionsvariable og kan efter behag betragte hypotesen

$$H_1: \mu = \alpha e + \beta_1 t_1 + \dots + \beta_q t_q.$$

eller hypotesen

$$H_1: \mu = \alpha'' e + \beta_1'' u_1 + \dots + \beta_q'' u_q.$$

(2) Vis, at sammenhængen mellem regressionsparametrene svarende til de to sæt forklarende variable er

$$\alpha'' = \alpha + \beta_1 \bar{t}_{.1} + \dots + \beta_q \bar{t}_{.q}$$

$$\beta_j'' = \beta_j, \quad j = 1, \dots, q$$

Som nævnt er det mest bekvemt at betragte de forklarende variable u_j , så lad U være $n \times q$ matricen hvis j te søjle er $u_{(j)}$, og lad $\tilde{T}$ være $n \times (q+1)$ matricen

$$\tilde{T} = \{ \begin{matrix} e & U \end{matrix} \}$$

- (3) Vis, at maksimum likelihood estimatoren for $\theta = (\alpha'', \beta)$, hvor $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_q)^*$ er

$$\hat{\theta} = (\hat{\alpha}'', \hat{\beta}) = (\tilde{T}^* \tilde{T})^{-1} \tilde{T}^* X$$

og angiv fordelingen for $\hat{\theta}$.

- (4) Vis, at $\hat{\alpha}''$ og $\hat{\beta}$ er uafhængige, samt at

$$\hat{\alpha}'' = \bar{X} \cdot \sim N(\alpha'', \sigma^2/n)$$

$$\hat{\beta} = (U^* U)^{-1} U^* X \sim N_q(\beta, \sigma^2 (U^* U)^{-1})$$

- (5) Angiv maksimum likelihood estimatoren for σ^2 under H_1 , og dennes fordeling.

Sæt $L_2 = \text{span}(e)$ og betragt modellen

$$M_2: \mu \in L_2,$$

det vil sige $\beta_1 = \dots = \beta_q = 0$.

- (6) Vis, at likelihood ratio testoren for reduktionen fra M_1 til M_2 er

$$Q = (1 - R^2)^{\frac{n}{2}},$$

hvor

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}^* U^* U \hat{\beta}}{SSD_X}, \quad (3)$$

og store værdier af R^2 er kritiske.

- (7) Vis at i modellen M_2 er

$$\frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - (q+1)}{q} \sim F(q, n - (q+1)). \quad (4)$$

- (8) Sammenlign resultaterne (3) og (4) her i Opgave 9.13 med resultaterne i (1) og (2) i Opgave 9.12. Overvej, at det er præcis samme analogi mellem testet for ingen korrelation i den todimensionale normalfordeling og testet for hældning 0 i lineær regression, som vi kender fra Kapitel 8.

Bemærkning til Opgave 9.13

I Tabel 1 er gengivet variansanalysetabellen for modellen M_1 i en *PROC GLM* udskrift. Bemærk, at $M_2 = M_\infty$ og dermed $P_2 = P_\infty$, så R^2 i (3) fås som forholdet mellem Sum of Squares i Model og Corrected Total linjerne, som er markeret med $\rightarrow$.

I udskrifter fra *PROC GLM* er R^2 i (3) angivet som R-square i linjen umiddelbart under variansanalysetabellen.

Tabel 1: Variansanalysetabellen fra modellen M_1

The GLM Procedure					
Model M ₁					
Dependent Variable: X					
Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
→ Model	q	$\ P_1(\mathbf{x}) - P_\infty(\mathbf{x})\ ^2$	$s_{1\infty}^2$	$s_{1\infty}^2/s_{01}^2$	$p_{obs}(\mathbf{x})$
Error	$n - q - 1$	$\ \mathbf{x} - P_1(\mathbf{x})\ ^2$	s_{01}^2		
→ Corrected Total	$n - 1$	$\ \mathbf{x} - P_\infty(\mathbf{x})\ ^2$			

Opgave 9.18 ($n \times p$ dimensional normalfordeling)

Når vi har n uafhængige p -dimensionalt normalfordelte stokastiske variable $X_i \sim N_p(\mu_i, \Sigma_i)$ kan det være bekvemt at opfatte dem som én $n \times p$ dimensionalt normalfordelt stokastisk variabel. I stedet for at skrive den som en lang vektor, vil det være praktisk at skrive den som en $n \times p$ matriks

$$X = \begin{pmatrix} X_1^* \\ \vdots \\ X_n^* \end{pmatrix}.$$

Vi skal her betragte $n \times p$ dimensionalt normalfordelte stokastiske variable

$$X \sim N_{n \times p}(M, \mathbb{F}),$$

hvor $M = \{\mu_{ij}\}_{i=1, j=1}^{n, p}$ er $n \times p$ matricen af middelværdier, og

$$\mathbb{F} = \{\sigma_{(i,r),(j,s)}\}_{i,j=1, r,s=1}^{n, p}$$

er en $np \times np$ matriks, så

$$\text{Cov}(X_{ir}, X_{js}) = \sigma_{(i,r),(j,s)}.$$

Specielt gælder, at hvis

$$X \sim N_{n \times p}(M, \Phi \otimes \Sigma),$$

hvor $\Phi = \{\phi_{ij}\}$ er en symmetrisk $n \times n$ matriks, og $\Sigma = \{\sigma_{rs}\}$ er en symmetrisk $p \times p$ matriks, vil

$$\text{Cov}(X_{ir}, X_{js}) = \phi_{ij} \cdot \sigma_{rs}.$$

(1) Vis, at hvis $X_1, \dots, X_n$ er indbyrdes uafhængige, $X_i \sim N_p(\mu_i, \Sigma)$, $i = 1, \dots, n$ vil

$$X = \begin{pmatrix} X_1^* \\ \vdots \\ X_n^* \end{pmatrix} \sim N_{n \times p}(M, I_n \otimes \Sigma)$$

hvor $M^* = \{\mu_1 \dots \mu_n\}$.

Vis følgende transformationsformler.

(2) $X \sim N_{n \times p}(M, \Phi \otimes \Sigma)$ hvis og kun hvis $X^* \sim N_{p \times n}(M^*, \Sigma \otimes \Phi)$.

(3) Hvis $X \sim N_{n \times p}(M, \Phi \otimes \Sigma)$, A er en $m \times n$ matriks, og B er en $p \times q$ matriks vil

$$AXB \sim N_{m \times q}(AMB, (A\Phi A^*) \otimes (B^*\Sigma B)).$$

Vis følgende specialtilfælde af (3).

(4) Hvis $X \sim N_{n \times p}(M, I_n \otimes \Sigma)$ og b er en p -dimensional søjlevektor er

$$Xb \sim N_{n \times 1}(Mb, I_n \otimes b^*\Sigma b) = N_n(Mb, (b^*\Sigma b)I_n).$$

(5) Hvis $X \sim N_{n \times p}(M, I_n \otimes \Sigma)$ og a er en n -dimensional søjlevektor er

$$a^*X \sim N_{1 \times p}(a^*M, a^*a \otimes \Sigma) = N_p(a^*M, \|a\|^2 \Sigma).$$

(6) Hvis $X \sim N_{n \times p}(M, I_n \otimes \Sigma)$ og A er en $m \times n$ matriks er

$$AX \sim N_{m \times p}(AM, AA^* \otimes \Sigma).$$

Lad $X \sim N_{n \times p}(M, I_n \otimes \Sigma)$ og betragt en opdeling af X og M så

$$X = \{X^{(1)}X^{(2)}\} \text{ og } M = \{M^{(1)}M^{(2)}\},$$

hvor $X^{(1)}$ og $M^{(1)}$ er $n \times k$ matricer, og $X^{(2)}$ og $M^{(2)}$ er $n \times (p-k)$ matricer. Tilsvarende opdeles

$$\Sigma = \begin{Bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{Bmatrix}$$

hvor Σ_{11} er en $k \times k$ matriks.

(7) Vis, at den betingede fordeling af $X^{(1)}$ givet $X^{(2)} = x^{(2)}$ er

$$N_{n \times k}(M^{(1)} - (M^{(2)} - x^{(2)})\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}, I_n \otimes (\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})),$$

samt at den marginale fordeling for $X^{(2)}$ er

$$N_{n \times (p-k)}(M^{(2)}, I_n \otimes \Sigma_{22}).$$

STAT1, TØ nr. 18

opgave 8.9

se udskifte


```

OPTIONS PS=45 PAGENO=1;
DATA storke;
INPUT county kvinder storke nyfoedte @@;
f_rate=nyfoedte/kvinder;
st_rate=storke/kvinder;
kv_f=kvinder/nyfoedte;
kv_st=kvinder/storke;
DATALINES;
  1 1  2 10  2 1  2 15  3 1  2 20
  4 1  3 10  5 1  3 15  6 1  3 20
  7 1  4 10  8 1  4 15  9 1  4 20

10 2  4 15 11 2  4 20 12 2  4 25
13 2  5 15 14 2  5 20 15 2  5 25
16 2  6 15 17 2  6 20 18 2  6 25

19 3  5 20 20 3  5 25 21 3  5 30
22 3  6 20 23 3  6 25 24 3  6 30
25 3  7 20 26 3  7 25 27 3  7 30

28 4  6 25 29 4  6 30 30 4  6 35
31 4  7 25 32 4  7 30 33 4  7 35
34 4  8 25 35 4  8 30 36 4  8 35

37 5  7 30 38 5  7 35 39 5  7 40
40 5  8 30 41 5  8 35 42 5  8 40
43 5  9 30 44 5  9 35 45 5  9 40

46 6  8 35 47 6  8 40 48 6  8 45
49 6  9 35 50 6  9 40 51 6  9 45
52 6 10 35 53 6 10 40 54 6 10 45
RUN;

```

```

PROC PLOT DATA=storke;
PLOT nyfoedte*storke;
RUN;

```

```

PROC PLOT DATA=storke;
PLOT f_rate*st_rate;
RUN;

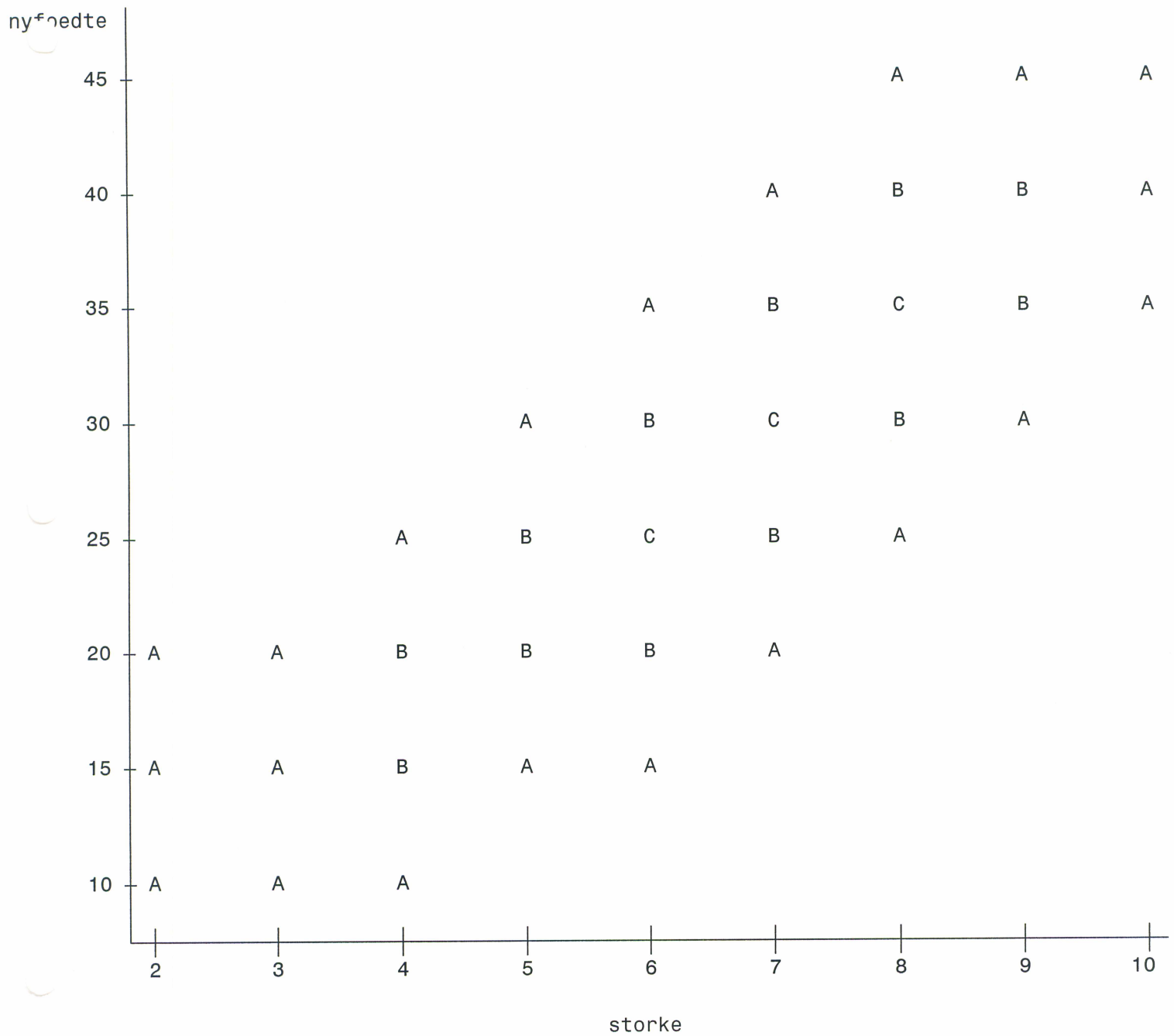
```

```

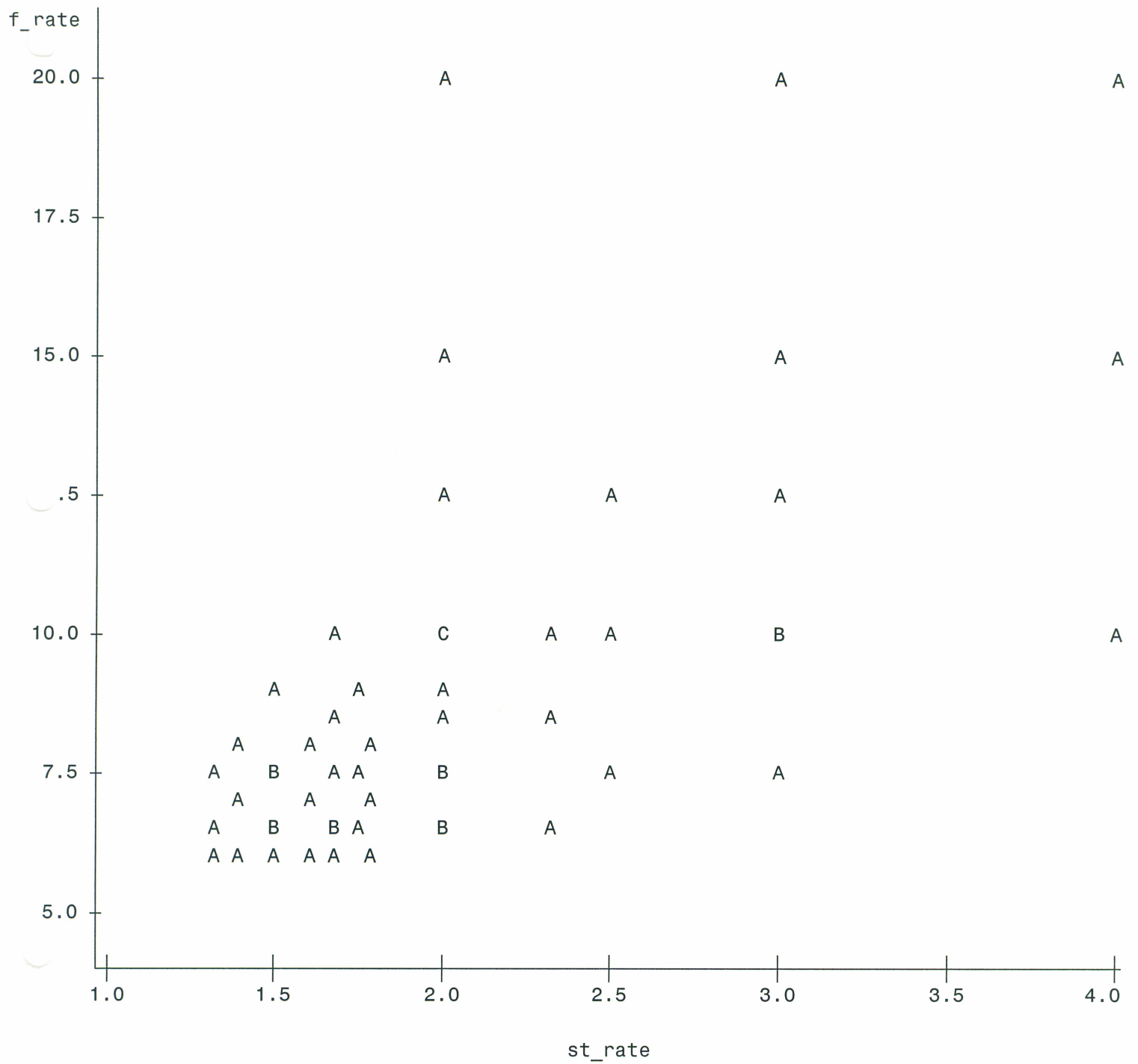
PROC PLOT DATA=storke;
PLOT kv_f*kv_st;
RUN;

```

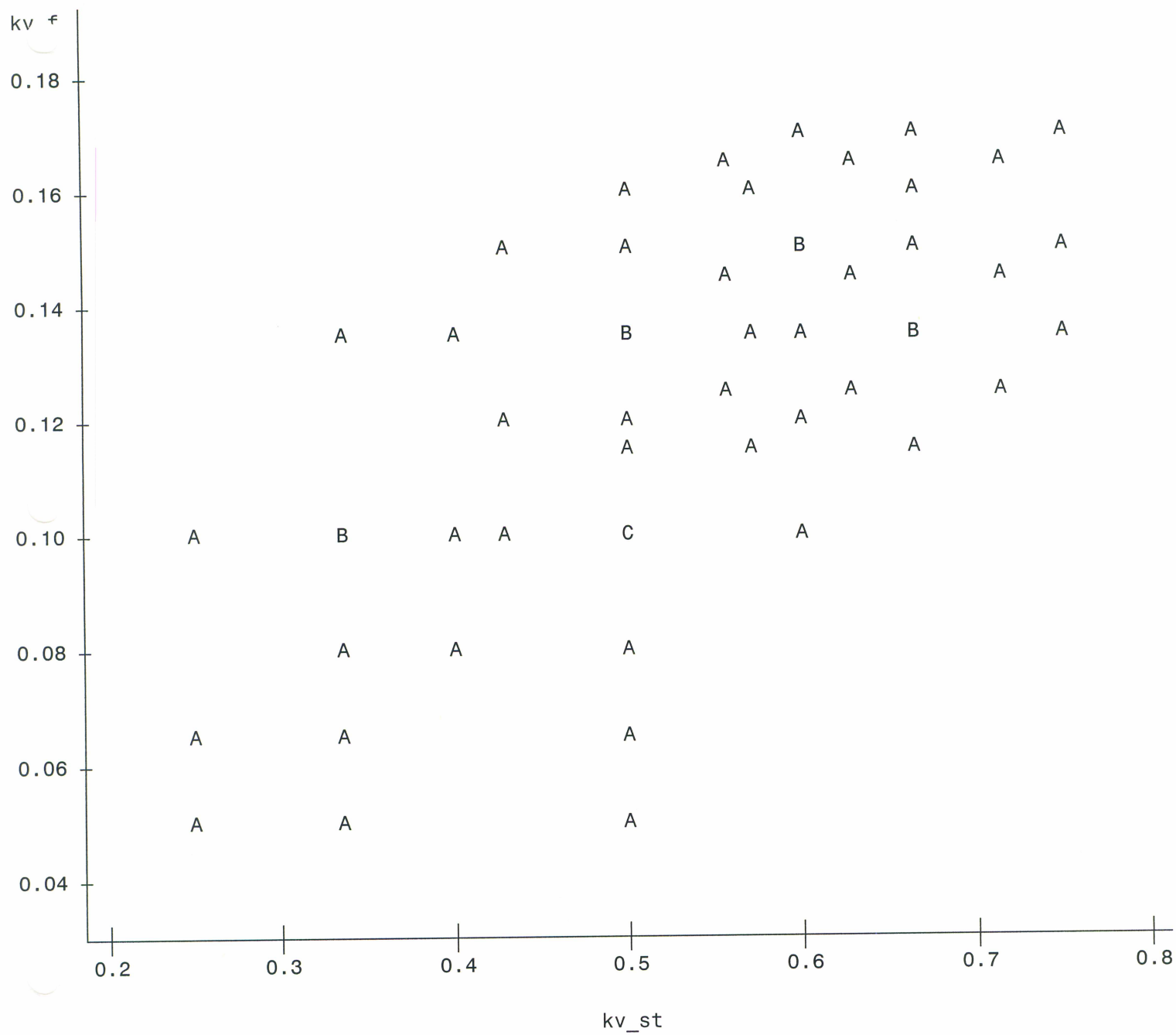
Plot of nyfoedte*storke. Legend: A = 1 obs, B = 2 obs, etc.



Plot of f_rate*st_rate. Legend: A = 1 obs, B = 2 obs, etc.



Plot of kv_f*kv_st. Legend: A = 1 obs, B = 2 obs, etc.



oppgave 8.10

1)

Se opg. 4.9

2)

Se bm. på s. 454

oppgave 8.11

Påstand:

$$U \perp V \quad U \sim B(a, b) \quad , \quad V \sim B(a+b, c)$$

Da gælder $U \cdot V \sim B(a, b+c)$

Bevis:

Lad X_1, X_2, X_3 være uafh. $X_1 \sim \Gamma(a, b)$, $X_2 \sim \Gamma(b, \beta)$, $X_3 \sim \Gamma(c, \beta)$

$$\text{Jf. opg. 8.9: } \frac{X_1}{X_1 + X_2} \sim B(a, b) \sim U$$

$$\frac{X_1 + X_2}{X_1 + X_2 + X_3} \sim B(a+b, c) \sim V$$

$$U \cdot V \sim \frac{X_1}{X_1 + X_2} \cdot \frac{X_1 + X_2}{X_1 + X_2 + X_3} = \frac{X_1}{X_1 + X_2 + X_3}$$

$X_2 + X_3 \sim \Gamma(b+c, \beta)$ og $X_1 \perp X_2 + X_3$, dvs.

$$U \cdot V \sim \frac{X_1}{X_1 + X_2 + X_3} \sim B(a, b+c)$$

□

opgave 8.12

Detta er en direkte konsekvens af prop. 9.16

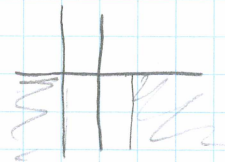
Opgave 8.13

Hvis kontrollen på s. 8.15-8.17 skulle udføres skulle vi også teste normalitet af de marginale μ 's og lin. af reg. linierne, samt at variansen i de betragtede μ 's er den samme.

Opgave 8.14

$$P(Z_1 \leq z) = P(Z_1 \leq z, Z_2 \in \mathbb{R})$$

$$z < 0$$



$$= P(X \leq z, Y \in \mathbb{R}_-) + P(X \geq -z, Y \in \mathbb{R}_-) = P(X \leq z)$$

$$z \geq 0:$$



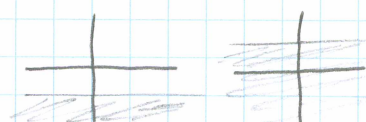
$$= P(X \in \mathbb{R}, Y \in \mathbb{R}_-) + P(X \in [z, z], Y \in \mathbb{R}_+)$$

$$= 1/2 + 1/2 \cdot 2P(X \in [0, z]) = P(X \leq z)$$

$$\text{Dus } Z_1 \sim X \sim N(0, 1)$$

$$P(Z_2 \leq z) = P(Z_1 \in \mathbb{R}, Z_2 \leq z)$$

$$= P(X \in \mathbb{R}, Y \in (-\infty, z]) = P(Y \leq z)$$



$$\text{Dus } Z_2 \sim Y \sim N(0, 1)$$

Det er klart at $(Z_1, Z_2)^T$ ikke er N_2 -fordelt

$$P((Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-) = 1/2, \text{ men}$$

$$P((Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+) = P((Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-) = 0$$

opgave 9.4

1)

At $A+B = \begin{Bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{Bmatrix}$ følger direkte af def. på sum af matricer.

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

pr. def. af de indgående matricer og def. på produkt af matricer.

2)

J.f. 1):

$$A A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}A^{11}+A_{12}A^{21} & A_{11}A^{12}+A_{12}A^{22} \\ A_{21}A^{11}+A_{22}A^{21} & A_{21}A^{12}+A_{22}A^{22} \end{pmatrix} \stackrel{(*)}{=} I_2$$

Antag A_{11} er invertibel.

$$\text{J.f. } (*): A^{12} = -(A_{11})^{-1} A_{12} A^{22}, \text{ dvs.}$$

$$I_{p-k} = A_{21}A^{12}+A_{22}A^{22} = (A_{22}-A_{21}(A_{11})^{-1}A_{12})A^{22} = A_{22,1}A^{22}$$

Dvs. A^{22} er invertibel og $(A^{22})^{-1} = A_{22,1}$

3)

Jvf. udregningene i 2) : $A_{11} A^{11} = I_k$, $A_{22} A^{22} = I_{p-k}$

dvs. A_{11} og A_{22} er invertible og $A^{11} = A_{11}^{-1}$, $A^{22} = A_{22}^{-1}$

Desuden ser vi, at $A^{12} = 0$, $A^{21} = 0$, dvs.

$$A^{-1} = \begin{Bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{Bmatrix}$$

4)

$$\text{Jvf. 1) : } \begin{Bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & I \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I & 0 \\ 0 & A_{22} \end{Bmatrix}$$

Pr. def. af determinant (evt. v. rækkeudvikling) ses

$$\begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}| |A_{22}| \quad (\text{idet } |AB| = |A| |B|)$$

$$\text{Igen jvf. 1) : } \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I & 0 \\ 0 & A_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & I \end{Bmatrix}$$

Jvf. regneregler for determinant og simpel rækkeudvikling

$$\text{ses } \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{22}| |A_{11}|$$

Antag A_{11} er invertibel

$$A \begin{pmatrix} I & -A_{11}^{-1} A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \end{pmatrix}$$

Dvs.

$$|A| = |A_{11}| |A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}| = |A_{11}| |A_{22}|$$