

V2001 / 2002 SS2

opgave 2 , 4) + 6) + 7)

opgave 3 , 5)

S2002 SS2 / STAT1

opgave 1 5)

opgave 2 4) + 5) + 6)

Opgave 3

Lad $X_1, X_2, \dots$ være en følge af uafhængige stokastiske variable, så X_k er uniformt fordelt over $[0, 2k^p]$ for $k \geq 1$, hvor $p > 0$ er givet og fast; d.v.s. X_k har for ethvert k tæthedsfunktion givet ved

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2k^p}, & \text{hvis } 0 \leq x \leq 2k^p \\ 0, & \text{hvis } x < 0 \text{ eller } x > 2k^p. \end{cases}$$

Vis, at

(1) $E(X_k) = k^p$, $E|X_k - k^p|^\alpha = \frac{k^{\alpha p}}{\alpha+1}$, $Var(X_k) = \frac{k^{2p}}{3}$ ($\forall \alpha > 0$).

(2) Hvis $0 < p < \frac{1}{2}$, så gælder

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - k^p) \rightarrow 0 \quad P\text{-a.s. og i } \alpha\text{-middel} \quad (\forall \alpha > 0)$$

for $n \rightarrow \infty$.

(3) For alle $p > 0$ har vi, at

$$\frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^n k^{2p}}} \sum_{k=1}^n (X_k - k^p) \xrightarrow{\sim} N(0, \frac{1}{3})$$

for $n \rightarrow \infty$.

(4) Hvis $0 < p < \frac{1}{2}$, så er

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(X_k - k^p)}{k}$$

summabel P -a.s. og i 2-middel.

(5) Hvis X er en stokastisk variabel som opfylder $L_X(t) = \frac{e^{2t}-1}{2t}$ for alle $t \in \mathbf{R}$, hvor L_X betegner Laplace transformationen af X , så er $X \sim X_1$.

Opgave 4

Lad $X_1, X_2, \dots$ være en følge af uafhængige identisk fordelte stokastiske variable, så X_k 'erne er eksponentialt fordelt med parametre $\lambda > 0$; d.v.s. X_k har for ethvert k tæthedsfunktion givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{hvis } x \geq 0 \\ 0, & \text{hvis } x < 0. \end{cases}$$

Lad $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$; sæt

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{og} \quad M_n = S_n - \frac{n}{\lambda}.$$

Vis, at

- (1) $\{M_n, \mathcal{F}_n \mid n \geq 1\}$ er en martingal.
- (2) $E(M_n) = 0 \quad (\forall n \geq 1)$.

For $\beta > 0$ givet og fast, lad

$$\tau = \inf \{k \geq 1 \mid X_k > \beta\}.$$

Vis, at

- (3) τ er en stoptid for $\{\mathcal{F}_n \mid n \geq 1\}$.
- (4) $P(\tau > n) = (1 - e^{-\beta\lambda})^n \quad (\forall n \geq 1)$.
- (5) $E(\tau) = e^{\beta\lambda}$.
- (6) $|M_{\tau \wedge n}| \leq S_\tau + \frac{\tau}{\lambda}, \quad S_\tau \leq (\tau - 1)\beta + X_\tau, \quad E(X_k^2) = \frac{2}{\lambda^2} \quad (\forall k \geq 1)$.
- (7) $E(X_\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} E(X_k 1_{\{\tau \geq k\}}) \leq \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{P(\tau \geq k)} < \infty$.
- (8) $E(S_\tau) = \frac{e^{\beta\lambda}}{\lambda}$.

opgave 3

1)

$$E[X_k] = \int_0^{2k^p} \frac{1}{2k^p} x dx = \frac{1}{4k^p} (2k^p)^2 = k^p$$

$$\begin{aligned} E|X_k - k^p|^\alpha &= \left(\int_0^{k^p} (k^p - x)^\alpha dx + \int_{k^p}^{2k^p} (x - k^p)^\alpha dx \right) / 2k^p \\ &= \left(-\int_{k^p}^0 t^\alpha dt + \int_0^{k^p} t^\alpha dt \right) / 2k^p = \left(-\left[\frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1} \right]_{k^p}^0 + \left[\frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1} \right]_0^{k^p} \right) / 2k^p \\ &= \frac{1}{\alpha+1} (k^{p(\alpha+1)} + k^{p(\alpha+1)}) / 2k^p = \frac{k^{\alpha p}}{\alpha+1} \end{aligned}$$

$$\text{Var}(X_k) = E|X_k - E[X_k]|^2 = \frac{k^{2p}}{3}$$

2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} E|X_n - E[X_n]|^\alpha / n^{1+\alpha/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha p - 1 - \alpha/2} < \infty$$

da $\alpha p - 1 - \alpha/2 = \alpha(p - 1/2) - 1 < -1$, da $0 < p < 1/2$

Af De Store Tals lov (L^α -udg. s. 124 i SEGs note) følger

den ensbunde konvergens i n.o. og L^α , $\alpha \geq 2$

og dermed også (jf. prop. 10.4) s. 52) i L^α $0 < \alpha \leq 2$

3)

Lad S_n være def. som i Lyapounovs sætn. s. 144

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_n^\alpha} \sum_{j=1}^n E |X_j - EX_j|^\alpha &= \frac{1}{S_n^\alpha} \sum_{j=1}^n \frac{j^{\alpha p}}{\alpha+1} \\ &= \left(\sum_{j=1}^n \frac{j^{2p}}{3} \right)^{-\frac{\alpha}{2}} \sum_{j=1}^n \frac{j^{\alpha p}}{\alpha+1} \leq \frac{3^\alpha}{\alpha+1} n^{-\frac{\alpha}{2}+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \alpha > 2 \end{aligned}$$

pht. 3)
på US UGE 7
'øvrige medd.'

Det ønskede er dermed en konsekvens af
Lyapounovs sætn. s. 144 (+ Portmanteau Sætn. II s. 134
idet vi ganger følge i Lyapounovs sætn. med $\frac{1}{\sqrt{3}}$)

4)

$$E \left| \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - iP)}{i} \right|^2 \stackrel{\text{uafh.}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} i^{2p-2} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n i^{2(p-1)} \quad (*)$$

Da vi ser, at $\left(\sum_{i=1}^n \frac{X_i - iP}{i} \right)_{n \geq 1}$ er en Cauchy-følge i L^2
er følge konvergent i L^2 (L^2 er et Banachrum)
Dvs. række er summabel i L^2 og P-u.o., if.
kollaret s. 113n

5)

$$E[e^{tX_1}] = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{tx} dx = \frac{1}{2t} [e^{tx}]_0^{\infty} = \frac{e^{2t} - 1}{2t}$$

Laplacetransform har vi ikke nogen entydighedsætn. for
i uænderende SSZ-pensum, men det er en side
som skal benyttes for at konkludere $X \sim X_1$

opgave 4

1)

$$E[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = E[X_{n+1}] + M_n + \frac{1}{\lambda} = M_n$$

Juf. Bm 10+12 s. 156 . Bemerk $M_n \in \mathcal{U}(P)$

Juf. def. s. 166 (M_n) ein martingal $(\mathcal{F}_n)$ -tilpasset

irf def. p1 M_n + faktorisierungssatz, exercise 7 s. 21)

2)

$$E[M_n] = E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] - \frac{n}{\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \frac{n}{\lambda} = 0, n \geq 1$$

$X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$

3)

$$\{\tau > n\} = \bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq \beta\} \in \mathcal{F}_n, \text{ d.h. } \tau \text{ stopptid}$$

(def. s. 162)

4)

$$P(\tau > n) = P\left(\bigcap_{i=1}^n X_i \leq \beta\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq \beta) = (P(X_1 \leq \beta))^n$$

$X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$

$$= (1 - e^{-\beta\lambda})^n$$

5)

$$E[\tau] = \sum_{n=0}^{\infty} P(\tau > n) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - e^{-\beta\lambda})^n = \frac{1}{1 - (1 - e^{-\beta\lambda})} = e^{\beta\lambda}$$

opg. 1
TB 16
+ (+) uniform

Konvergenz-
rechner

6)

$$\begin{aligned}
 |M_{T \wedge n}| &= \sum_{i=1}^{n-1} |M_i| 1_{\{T=i\}} + |M_n| 1_{\{T \geq n\}} \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \left| S_i - \frac{i}{\lambda} \right| 1_{\{T=i\}} + \left| S_n - \frac{n}{\lambda} \right| 1_{\{T \geq n\}} \\
 &\stackrel{\substack{\text{Pythagoras} \\ S_i \geq 0}}{\leq} \sum_{i=1}^{n-1} S_i 1_{\{T=i\}} + S_n 1_{\{T=n\}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{\lambda} 1_{\{T=i\}} + \frac{n}{\lambda} 1_{\{T \geq n\}} \\
 &\leq S_T + \frac{T}{\lambda} \quad \left(\frac{n}{\lambda} \leq \frac{T}{\lambda} \text{ für } \{T \geq n\}, S_T \geq S_n \text{ da } X_i \geq 0 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_T 1_{\{T < \infty\}} &= \sum_{n=1}^{\infty} S_n 1_{\{T=n\}} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{def } p_i T}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} ((n-1)\beta + X_n) 1_{\{T=n\}} \\
 &= ((T-1)\beta + X_T) 1_{\{T < \infty\}}
 \end{aligned}$$

$$P(T = \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - e^{-\beta \lambda})^n = 0 \quad (4) \quad (+)$$

Dus: $S_T \leq (T-1)\beta + X_T$

$$E[X_k^2] = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\infty} t^2 e^{-t} dt = \frac{2}{\lambda^2}$$

7)

$$E[X_T] \stackrel{(+)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n 1_{\{T=n\}}] \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{E[X_n^2]} \sqrt{P(T=n)} \stackrel{6)}{=} \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{P(T=n)}$$

+ monoton konvergenz

$$< \infty, \text{ da } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{P(T=n)} \stackrel{4)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{(1 - e^{-\beta \lambda})^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1 - e^{-\beta \lambda}})^n < \infty$$

(sidste rekhne er en kvadratrekhne som er konvergent fordi $\sqrt{1 - e^{-\beta \lambda}} < 1$)

8)

Juf (5) + (6) + (7) er T optional for (M_n) *

Af optional sampling (seetning Mas s. 170) følger

$$E[M_\tau] = E[S_\tau - \frac{c}{\lambda}] = E[M_0] = 0$$

↓

$$E[S_\tau] = \frac{1}{\lambda} E[\tau] = \frac{e^{B\lambda}}{\lambda}$$

* Da (M_{t_n}) uniform er begrebet af en L' fkt.

Opgave 1

Lad $X_1, X_2, \dots$ være en følge af uafhængige stokastiske variable, så X_k er eksponentialfordelt med parameter $\lambda_k > 0$ for alle $k \geq 1$; d.v.s. X_k har for ethvert k tæthedsfunktion givet ved

$$f_k(x) = \begin{cases} \lambda_k e^{-\lambda_k x}, & \text{hvis } x \geq 0 \\ 0, & \text{hvis } x < 0. \end{cases}$$

Vis, at

(1) $E(X_k) = \frac{1}{\lambda_k}$, $E(X_k^m) = \frac{m!}{(\lambda_k)^m}$ ($\forall m \geq 1$), $Var(X_k) = \frac{1}{(\lambda_k)^2}$.

(2) Hvis $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\lambda_k)^2} < \infty$, så gælder

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \frac{1}{\lambda_k}) \rightarrow 0 \text{ } P\text{-a.s. og i 2-middel}$$

for $n \rightarrow \infty$.

(3) Hvis $\lambda_k = \frac{1}{k}$ for alle $k \geq 1$, så gælder

$$\frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^n k^2}} \sum_{k=1}^n (X_k - k) \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

for $n \rightarrow \infty$.

(4) Hvis $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\lambda_k)^2} < \infty$, så er

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (X_k - \frac{1}{\lambda_k})$$

summabel P -a.s. og i 2-middel.

(5) Hvis X er en stokastisk variabel som opfylder $\varphi_X(t) = \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 - it)}$ for alle $t \in \mathbb{R}$, hvor φ_X betegner den karakteristiske funktion af X , så er $X \sim X_1$.

Opgave 2

Lad $X_1, X_2, \dots$ være en følge af uafhængige identisk fordelte stokastiske variable, så X_k 'erne er uniformt fordelt over $[1, 9]$; d.v.s. X_k har for ethvert k tæthedsfunktion givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{hvis } 1 \leq x \leq 9 \\ 0, & \text{hvis } x < 1 \text{ eller } x > 9. \end{cases}$$

Lad $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, og sæt

$$M_n = \prod_{k=1}^n \left(\frac{X_k}{5} \right) = \frac{1}{5^n} \prod_{k=1}^n X_k.$$

Vis, at

- (1) $E(X_k) = 5$ ($\forall k \geq 1$).
- (2) $\{M_n, \mathcal{F}_n \mid n \geq 1\}$ er en martingal.
- (3) $E(M_n) = 1$ ($\forall n \geq 1$).

For $1 < \alpha < 9$ givet og fast, lad

$$\tau = \inf\{k \geq 1 \mid X_k > \alpha\}.$$

Vis, at

- (4) τ er en stoptid for $\{M_n \mid n \geq 1\}$.
- (5) $P(\tau > n) = \left(\frac{\alpha-1}{8}\right)^n$ ($\forall n \geq 1$).
- (6) $E(\tau) = \frac{8}{9-\alpha}$.
- (7) Hvis $\alpha \leq 5$, så er τ optional for $\{M_n\}$, og

$$E\left(\prod_{k=1}^{\tau} \left(\frac{X_k}{5}\right)\right) = 1.$$

opgave 1

1)

$$E[X_k] = \int_0^{\infty} x \lambda_k e^{-\lambda_k x} dx = \frac{1}{\lambda_k} \int_0^{\infty} t e^{-t} dt = \frac{1}{\lambda_k}$$

$$E[X_k^m] = \int_0^{\infty} x^m \lambda_k e^{-\lambda_k x} dx = \frac{1}{\lambda_k^m} \int_0^{\infty} t^m e^{-t} dt = \frac{m!}{\lambda_k^m}$$

$$\text{Var}(X_k) = \frac{2!}{\lambda_k^2} - \left(\frac{1}{\lambda_k}\right)^2 = \frac{1}{\lambda_k^2}$$

2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}(X_n)/n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 1/(n\lambda_n)^2 < \infty$$

Af De Store Tals Lov (L^2 -udg.) s. 114 følger det ønskede

3)

Def. S_n som i Lyapounovs Sætning s. 144

$$\begin{aligned} S_n^{-m/2} \sum_{i=1}^n E|X_i - E[X_i]|^m &\leq 2^m \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2} \right)^{-m/2} \sum_{i=1}^n E[X_i^m] \\ &= 2^m \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2} \right)^{-m/2} \sum_{i=1}^n \frac{m!}{\lambda_i^m} \end{aligned}$$

uighed
s. 55 + Jensen's Uighed

$$\leq 2^m n^{-\frac{m}{2}+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad m \geq 2$$

Uighed 3)
p. 55 UGE 7

Af Lyapounovs Sætning s. 144 følger det ønskede

4)

$$E \left[\left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{X_i - \frac{1}{\lambda_i}}{i} \right|^2 \right] = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{E[(X_i - \frac{1}{\lambda_i})^2]}{i^2} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{(i\lambda_i)^2}$$

Af dette ses (da $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i\lambda_i)^2} < \infty$) at $(\sum_{i=1}^n \frac{X_i - \frac{1}{\lambda_i}}{i})_{n \geq 1}$

er en Cauchy-følge i L^2 , da L^2 er et Banach-rum er $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (X_k - \frac{1}{\lambda_k})$ summabel i L^2

Af korollar 5.113 n følger at rækkefølges er summabel P-n.o.

5)

$$\begin{aligned} \varphi_{X_1}(t) &= E[e^{itX_1}] = \int_0^{\infty} e^{itx} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx \\ &= \lambda_1 \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 - it)x} dx = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - it} [e^{-x}]_0^{\infty} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - it} \end{aligned}$$

Af entydighedssætn. for karakteristiske fkt. følger $X \sim X_1$ (KfG s. 104)

opgave 2

1)

$$E[X_1] = \int_1^9 x \cdot \frac{1}{8} dx = \frac{1}{16} (9^2 - 1^2) = \frac{80}{16} = 5$$

2)

Udfra Faktoriseringssætn. (øvelse 7 s. 21) + def. på $\mathcal{F}_n$ er det klart, at $(M_n) \subset (\mathcal{F}_n)$ -tilpasset

Da $|M_n| \leq \frac{1}{5^n} 9^n$ ses, at $M_n \in L^1(P)$ $n \geq 1$

$$E[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = E\left[\frac{X_{n+1}}{5}\right] M_n = M_n$$

J.f. Bm 11 + 12 s. 156

Af def. s. 166 følger at $(M_n, \mathcal{F}_n)$ er en martingal

3)

$$E[M_n] = \prod_{i=1}^n E[X_i] / 5 = 1$$

Tonelli-Fubini
+ uafh.

4)

$\{\tau > n\} = \bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq \alpha\} \in \mathcal{F}_n$, dvs. jvf. def. s. 162 er τ en stop tid

5)

$$\begin{aligned} P(\tau > n) &= P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq \alpha\}\right) \stackrel{\text{uafh. } i=1}{=} \prod_{i=1}^n P(X_i \leq \alpha) \stackrel{\text{i.i.d.}}{=} (P(X_1 \leq \alpha))^n \\ &\stackrel{1 < \alpha < 9}{=} \left(\int_1^{\alpha} \frac{1}{8} dx\right)^n = \left(\frac{\alpha-1}{8}\right)^n \end{aligned}$$

6)

$$E[\tau] = \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau > n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha-1}{8}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{\alpha-1}{8}} = \frac{8}{9-\alpha}$$

opg. 1
 10.16
 + $\tau < \infty$ n.o.
 j.f. 5) da
 $P(\tau = \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha-1}{8}\right)^n = 0$

Kettenbruch
 $|\frac{\alpha-1}{8}| < 1$

7)

$$E[M_{n\tau}] = E\left[\sum_{i=1}^{n-1} M_i 1_{\{\tau \geq i\}} + M_n 1_{\{\tau \geq n\}}\right]$$

$$\leq E\left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{8}{5} 1_{\{\tau \geq i\}} + \frac{8}{5} 1_{\{\tau \geq n\}}\right]$$

$$\leq E\left[\frac{9}{5}\right] = 9/5 < \infty$$

Dus. $(M_{n\tau})_{n \geq 1}$ v. U.I., dus. τ optional
f. (M_n)

Af Optional Sampling (Seth. Ma 5 s.170) folg

$$1 = E[M_1] = E[M_\tau] = E\left[\prod_{k=1}^{\tau} \left(\frac{X_k}{5}\right)\right]$$

Opgave 1

Lad $X_1, X_2, \dots$ være en følge af uafhængige stokastiske variable, så X_n for ethvert n har tæthedsfunktion givet ved

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{2}{n^2}(n-x), & \text{hvis } 0 \leq x \leq n \\ 0, & \text{hvis } x \notin [0, n]. \end{cases}$$

Vis, at

(1)

$$E(X_n) = \frac{n}{3}, \quad E(X_n)^2 = \frac{n^2}{6}, \quad \text{Var}(X_n) = \frac{n^2}{18}.$$

(2)

$$E|X_n - E(X_n)|^\alpha \leq 2^\alpha E|X_n|^\alpha \leq \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha+1} n^\alpha \quad (\forall \alpha \geq 1).$$

(3) Hvis $\beta > \frac{1}{2}$, så gælder

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{X_k}{k^\beta} - \frac{k^{1-\beta}}{3} \right) \rightarrow 0 \quad P\text{-a.s. og i } \alpha\text{-middel}$$

for $n \rightarrow \infty$ ($\forall \alpha > 0$).

(4) For $n \rightarrow \infty$ har vi,

$$\frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^n k^2}} \sum_{k=1}^n \left(X_k - \frac{k}{3} \right) \rightsquigarrow N\left(0, \frac{1}{18}\right).$$

(5) Hvis $\beta > \frac{3}{2}$, så er

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{X_k}{k^\beta} - \frac{k^{1-\beta}}{3} \right)$$

summabel P -a.s. og i 2-middel.

Opgaven fortsættes

(6) Hvis Z er en stokastisk variabel, som opfylder

$$E(Z^k) = \frac{2n^k}{(k+1)(k+2)} \quad (\forall k \geq 1),$$

hvor $n \geq 1$ er givet og fast, så er $Z \sim X_n$.

Opgave 2

Lad $X_1, X_2, \dots$ være en følge af uafhængige stokastiske variable, så X_n er eksponentialt fordelt med parameter $\lambda_n > 0$ for $n \geq 1$, d.v.s. X_n har for ethvert n tæthedsfunktion givet ved

$$f_n(x) = \begin{cases} \lambda_n e^{-\lambda_n x}, & \text{hvis } x \geq 0 \\ 0, & \text{hvis } x < 0. \end{cases}$$

Lad $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$; sæt

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(X_k - \frac{1}{\lambda_k} \right) \quad \text{og} \quad M_n = (S_n)^2 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(\lambda_k)^2}.$$

Vis, at

- (1) $\{M_n, \mathcal{F}_n \mid n \geq 1\}$ er en martingal.
- (2) $E(M_n) = 0 \quad (\forall n \geq 1)$.
- (3) Hvis $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_k)^2} < \infty$, så gælder $M_n \rightarrow M_{\infty}$ P -a.s. og $S_n \rightarrow S_{\infty}$ P -a.s. for $n \rightarrow \infty$.

For $\beta > 0$ givet og fast, lad

$$\tau = \inf \left\{ k \geq 1 \mid \sum_{j=1}^k X_j > \beta \right\} \quad (\inf \emptyset := \infty).$$

Vis, at

- (4) τ er en stoptid for $\{\mathcal{F}_n \mid n \geq 1\}$.
- (5)

$$P\{\tau > n\} \leq 1 - \exp \left(-\beta \min_{1 \leq k \leq n} \lambda_k \right).$$

opgave 1

1)

$$E[X_n] = \int_0^n x \frac{2}{n^2} (n-x) dx = n - \frac{2}{3n^2} n^3 = \frac{n}{3}$$

$$E[X_n^2] = \int_0^n x^2 \frac{2}{n^2} (n-x) dx = \frac{1}{3} n^3 \frac{2}{n^2} n - \frac{2}{n^2} \frac{1}{4} n^4 = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{4}\right) n^2 = \frac{n^2}{6}$$

$$\text{Var}(X_n) = \frac{n^2}{6} - \left(\frac{n}{3}\right)^2 = \frac{n^2}{18}$$

2)

$$E|X_n - E[X_n]|^\alpha \leq 2^\alpha (E|X_n|^\alpha + |E[X_n]|^\alpha) \leq 2^\alpha E|X_n|^\alpha$$

ulighed s. 45 Jensen's ulighed $\alpha \geq 1$

$$= 2^\alpha \int_0^n x^\alpha \frac{2}{n^2} (n-x) dx \leq 2^\alpha \int_0^n x^\alpha \frac{2}{n^2} n dx = \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha+1} n^\alpha$$

3)

$$\left(\frac{X_k}{k^\beta}\right)_{k \geq 1} \text{ er en fglg af uafh. s.v. } E\left[\frac{X_k}{k^\beta}\right] = \frac{k^{1-\beta}}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} E\left|\frac{X_k}{k^\beta} - \frac{k^{1-\beta}}{3}\right|^\alpha / k^{1+\alpha/2} = \sum_{k=1}^{\infty} E|X_k - E[X_k]| / k^{\alpha\beta+1+\alpha}$$

$$\leq \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha+1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha/2 - \alpha\beta - 1} < \infty, \text{ da } \frac{\alpha}{2} - \alpha\beta - 1 < -1 \quad (\beta > 1/2)$$

Af De Store Tals lov (L^α -udg. s. 124) fglg det ønskede!
(for $\alpha > 2$ og dermed også for $\alpha \leq 2$ jf. prop. 10.4) s. 52

4)

Lad S_n være som i Lyapounovs Sætn. s. 144

$$\begin{aligned} S_n^{-\alpha} \sum_{i=1}^n E[|X_i - E[X_i]|^\alpha] &\stackrel{2)}{=} S_n^{-\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha+1} i^\alpha \\ &\stackrel{1)}{=} 2^{\alpha+1}/\alpha+1 \left(\sum_{i=1}^n \frac{i^2}{18} \right)^{-\alpha/2} \sum_{i=1}^n i^\alpha \stackrel{3)}{\leq} \frac{2^{\alpha+1}}{18^{-\alpha/2}} \frac{1}{\alpha+1} n^{-\alpha/2+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \alpha > 2 \end{aligned}$$

ulighed 3)
p. i VS UGE 7

AF Lyapounovs Sætning s. 144 følger det ønskede.
(+ Portmantraus Sætn. II s. 134 idet vi gerne følger i Lyapounovs Sætning med $\frac{1}{\sqrt{18}}$)

5)

$$E \left| \sum_{i=n+1}^n \frac{X_i}{i^\beta} - \frac{i^{1-\beta}}{3} \right|^2 \stackrel{1)}{=} \sum_{i=n+1}^n \frac{1}{i^{2\beta}} \frac{i^2}{18} = \frac{1}{18} \sum_{i=n+1}^n i^{2(1-\beta)}$$

Da $\beta > \frac{3}{2} \Rightarrow 2(1-\beta) < 2(1-\frac{3}{2}) = -1$ ses at

$\left(\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{i^\beta} - \frac{i^{1-\beta}}{3} \right)_{n \geq 1}$ er en Cauchy-fg i L^2

da L^2 er et Banachrum følger det ønskede

(P.-u.o. summabilitet følger af korollar s. 113n)

6)

$$\begin{aligned} E[X_n^k] &= \int_0^n x^k \frac{2}{n^2} (n-x) dx = \frac{2}{n} \int_0^n x^k dx - \frac{2}{n^2} \int_0^n x^{k+1} dx \\ &= \frac{2}{n} \frac{1}{k+1} n^{k+1} - \frac{2}{n^2} \frac{1}{k+2} n^{k+2} = \frac{2n^k}{(k+1)(k+2)} \end{aligned}$$

At $Z \sim X_n$ er dermed en konsekvens af Mp 1 s. 107

$$\text{idet } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E[|X_n|^k]}{k!} p^k = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(np)^k}{(k+2)!} = \frac{2}{(np)^2} e^{np} < \infty, p > 0$$

opgave 2

1)

$$E[|M_n|] \leq E[S_n^2] + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{2}{\lambda_k^2} < \infty \quad (*)$$

og M_n er $\mathcal{F}_n$ måltlig jf. sætne 7 (Faktoriseringssætne s. 21)

$$\begin{aligned} E[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= E\left[\left(S_n + \left(X_{n+1} - \frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\right)^2 | \mathcal{F}_n\right] - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\lambda_i^2} \\ &= \underbrace{S_n^2}_{\substack{\text{Bm 10+11+12} \\ \text{s. 156} \\ X_i \sim E(\lambda_i)}} + \text{Var}(X_{n+1}) + 2S_n E\left[X_{n+1} - \frac{1}{\lambda_{n+1}}\right] - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\lambda_i^2} \\ &= S_n^2 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2} = M_n \end{aligned}$$

Jf. def. s. 166 m er $(M_n, \mathcal{F}_n)$ en martingal

2)

$$E[M_n] = E\left[S_n^2 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2}\right] = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2} = 0 \quad \substack{X_i \sim E(\lambda_i)}$$

3)

$$\left\| \sum_{i=1}^n \left(X_i - \frac{1}{\lambda_i}\right) \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2} \quad , \text{ dvs. } (S_n) \text{ er en Cauchy-flg}$$

i L^2 , som er et Banach-rum, (idet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty$)

Dvs. S_n er konvergent i L^2 og dermed jf. bekræftet s. 113n P-n.o. (Altså $S_n \xrightarrow{P-n.o.} S_{\infty}$)

Jf. (*) i 1) ses at $\sup E[|M_n|] \leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} < \infty$
af Martingal konv. sætne s. 174 følger at $M_n \xrightarrow{P-n.o.} M_{\infty}$ P-n.o.
og $M_{\infty} \in L^1$

4)

$$\{T > n\} = \bigcap_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^i X_j \leq \beta \right\} \in \sigma(X_1, \dots, X_n) = \mathcal{F}_n$$

(*)

Af def. s. 162 ses at T er en stop tid for $(\mathcal{F}_n)$

5)

$$P(T > n) \stackrel{(*)}{\leq} P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq \beta\}\right) \stackrel{\text{uafh.}}{=} \prod_{i=1}^n P(X_i \leq \beta) = \prod_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda_i \beta})$$

$X_i \sim E(\lambda_i)$

$$\leq 1 - e^{-\beta \cdot \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i}$$

6)

Af. 5) følger at $\lambda_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \Rightarrow \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

$$P(T > n) \leq 1 - e^{-\beta \cdot \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Dvs. $P(T = \infty) = 0$ og T er dermed en endelig stop tid (s. 162n)

7)

$$|M_n| \leq \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i}\right)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2}$$

Dvs.

$$|M_{n+T}| \leq |M_T| \leq (\beta + X_T)^2 + \left(\sum_{i=1}^T \frac{1}{\lambda_i}\right)^2 + \sum_{i=1}^T \frac{1}{\lambda_i^2}$$

$$\text{Idet } \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 \leq \begin{cases} \beta, & T > n \\ \beta + X_T, & T \leq n \end{cases} \quad \text{og} \quad M_{n+T} = M_T 1_{\{T \leq n\}} + M_n 1_{\{T > n\}}$$

8)

$$E[X_T] = E\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n 1_{\{T \geq n\}}\right] \stackrel{\substack{\text{Monoton} \\ \text{konvergens}}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$$

Af 7) følger at $|M_n|$ er domineret af en L^1 fkt. og dermed er M_n u.i., dvs. τ er optional for (M_n)

$$\text{Antag } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty$$

$$|M_n| \leq S_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \quad (*)$$

Da S_n^2 er konv. i L^1 (jvf. udregningen i 3))

Jvf. korollar 1+2 s. 53 og (*) er (M_n) u.i.

Jvf. korollar 2 s. 171 er τ optional for (M_n)

Opgave 1

Lad $(X_n)_{n \geq 1}$ være en følge af uafhængige stokastiske variable, så at X_n for ethvert $n \geq 1$ er $po(\lambda_n)$ -fordelt, hvor λ_n 'erne er strengt positive reelle tal, d.v.s. $\lambda_n > 0$ for alle n . For ethvert $n \geq 1$ gælder altså, at

$$P(X_n = k) = e^{-\lambda_n} \cdot \frac{\lambda_n^k}{k!} \quad k = 0, 1, \dots$$

Det oplyses, at hvis Y er en stokastisk variabel, som er Poisson fordelt med parameter $\lambda > 0$, d.v.s. Y er $po(\lambda)$ -fordelt, så er (dette skal **ikke** bevises)

$$E[Y] = \text{Var}(Y) = \lambda \quad \text{og} \quad E[|Y - \lambda|^4] = \lambda + 3\lambda^2.$$

(1) Vis at $|E[e^{it(X_1 - \lambda_1)}]| = e^{-\lambda_1(1 - \cos t)}$ for ethvert reelt tal t .

(2) Antag i dette delspørgsmål at $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n/n < \infty$. Vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - \lambda_n)/\sqrt{n}$$

er summabel (d.v.s. konvergent med en endelig værdi) P -n.o. samt konvergent i 2-middel.

(3) Antag i dette delspørgsmål at $0 < m < \lambda_n < M$ for alle $n \geq 1$, hvor m og M er givne reelle tal. Vis at

$$\frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^n (X_k - \lambda_k) \xrightarrow{\sim} N(0, 1) \quad \text{for } n \rightarrow \infty,$$

hvor $s_n := \sqrt{\sum_{k=1}^n \lambda_k}$ for alle $n \geq 1$.

(4) Antag i dette delspørgsmål at $\lambda_n = \lambda > 0$ for alle $n \geq 1$. Vis at

$$\frac{n^2 \cdot (S_n/n - \lambda)^2}{2S_n} \xrightarrow{\sim} \Gamma\left(\frac{1}{2}, 1\right) \quad \text{for } n \rightarrow \infty,$$

hvor $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ for alle $n \geq 1$.

(5) Vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} (X_n - \lambda_n) \text{ summabel } P\text{-n.o.}$$

Vink til $\iff$: Man kan f.eks. benytte kontinuitetssætningen for karakteristiske funktioner.

opgave 1

1)

$$|E[e^{it(X_1 - \lambda_1)}]| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} e^{it(n - \lambda_1)} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^n}{n!} \right|$$

$$= \left| e^{-it\lambda_1 - \lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 e^{it})^n}{n!} \right| = \left| e^{it\lambda_1 - \lambda_1} e^{\lambda_1 e^{it}} \right|$$

$$= \left| e^{it\lambda_1 - \lambda_1 + \lambda_1 (\cos t + i \sin t)} \right| = e^{-\lambda_1 (1 - \cos t)} \left| e^{i(t\lambda_1 + \lambda_1 \sin t)} \right|$$

$$= e^{-\lambda_1 (1 - \cos t)}$$

2)

$$\left\| \sum_{i=1}^n (X_i - \lambda_i) / \sqrt{n} \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) / i = \sum_{i=1}^n \lambda_i / i$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n / n < \infty$ er rækken konvergent i L^2

(da L^2 er et Banachrum) summabilitet P-u.a.
er dermed en konsekvens af korollar 5.113n

3)

$$\frac{1}{S_n^2} \sum_{k=1}^n E|X_k - \lambda_k|^4 \leq \frac{1}{n^2 n^2} n(M + 3M^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$(0 < m < \lambda_n < M, E|X_k - \lambda_k|^4 = \lambda_k + 3\lambda_k^2)$$

Af Lyapounovs sætn. s. 144 følger det ønskede.

4)

$$\frac{n^2 (S_n/n - \lambda)^2}{2 S_n} = \frac{(S_n - n\lambda)^2}{2 S_n}$$

$$= \frac{\left(\frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right)^2 n\lambda}{2 S_n}$$

$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda$ no jvf. Kolmogorovs store Tals lov.

Da $\left(\frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right)^2 \longrightarrow \chi^2(1)$ jvf. 3) + Portmanteaus Sætning II s. 134
 at $\frac{1}{2} \left(\frac{S_n}{n}\right)^{-1} \lambda \left(\frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right)^2 \implies \Gamma(1/2, 1)$
 (konv. n.o. $\implies$ konv. i fnd.)

5)

$\implies$

$$E \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} X_i - \lambda_i \right| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} E[|X_i|] + \lambda_i = \sum_{i=n+1}^{\infty} 2\lambda_i$$

Da L^1 er et Banachrum er rækken konvergent i L^1

da $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$. af konvergt s. 113 n følger konv. p-n.o.

$\Leftarrow$

Antag $\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - \lambda_n)$ summenkel p-n.o. og $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$

Konv. n.o. $\implies$ konv. i fordeling, dvs. $\varphi_{\sum_{i=1}^n X_i - \lambda_i}(t)$
 har en karakteristisk fkt. som grænseværdi
 (jvf. kont.sætn. for karakteriske fkt. s. 140n)

$$|\varphi_{\sum_{i=1}^n \lambda_i - \lambda_i}(t)| = \underset{\substack{\text{KFS} \\ \text{s. 103}}}{\prod_{i=1}^n} |\varphi_{\lambda_i - \lambda_i}| = \underset{1)}{\prod_{i=1}^n} e^{-\lambda_i (1 - \cos t)}$$

$$= e^{-(1 - \cos t) \sum_{i=1}^n \lambda_i} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 1, & t = k \cdot 2\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{ellus} \end{cases}$$

Man charakteristische fkt. erkont, auf KF 2 s. 102

$$\text{D.h. } \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$$

3

Opgave 2

Lad $(X_n)_{n \geq 0}$ være en følge af uafhængige stokastiske variable, som alle er $\Gamma(2, 1)$ -fordelte, d.v.s. X_n har for ethvert $n \geq 0$ tæthedsfunktion f givet ved

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Definer $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, \dots, X_n)$ for $n \geq 0$.

(1) Vis at $E[\lambda^2 \cdot e^{-(\lambda-1)X_n}] = 1$ for alle $\lambda > 0$ og alle $n \geq 0$.

Lad $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ betegne en reel talfølge, så at $\lambda_n > 0$ for alle n .

(2) Vis at $(L_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ er en ikke-negativ martingal, hvor for $n \geq 0$

$$L_n := \prod_{k=0}^n (\lambda_k^2 \cdot e^{-(\lambda_k-1)X_k}).$$

(3) Vis at $L_n \rightarrow L_\infty$ P -n.o. for $n \rightarrow \infty$, hvor

$$L_\infty := \begin{cases} \lim_n L_n & \text{hvis grænseværdien eksisterer i } \mathbf{R} \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

samt at $E[L_\infty] \leq 1$ og $E[L_\infty | \mathcal{F}_n] \leq L_n$ P -n.o. for alle $n \geq 0$.

(4) Vis for enhver $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -stoptid τ , at $L_{\tau \wedge n} \rightarrow L_\tau$ P -n.o. for $n \rightarrow \infty$, hvor

$$L_\tau := \begin{cases} \lim_n L_{\tau \wedge n} & \text{hvis grænseværdien eksisterer i } \mathbf{R} \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

og at τ er optional for $(L_n)_{n \geq 0}$ hvis $E[L_\tau] = 1$.

(5) Vis at $P(L_\infty = 0) = 0$ eller $P(L_\infty = 0) = 1$. Vink: Udnyt f.eks. at

$$\{\lim_n L_n = 0\} = \{\lim_n \frac{L_{n+k}}{L_k} = 0\} \text{ for alle } k \geq 0.$$

(6) Vis at for alle $n \geq 0$ er

$$E[L_\infty | \mathcal{F}_n] = L_n \cdot E\left[\frac{L_\infty}{L_n}\right] \text{ } P\text{-n.o.}$$

og udnyt dette til at vise, at $P(L_\infty > 0) = 1$ hvis og kun hvis $E[L_\infty] = 1$.

(7) Antag at $\lambda_n = 2$ for alle n . Vis at

$$\lim_n \frac{1}{n} \log L_n = 2 \log 2 - 2 \text{ } P\text{-n.o.}$$

og udnyt dette til at vise, at $P(L_\infty = 0) = 1$.

opgave 2

1)

$$\begin{aligned} E[\lambda^2 e^{-(\lambda-1)X_n}] &= \int_0^\infty \lambda^2 e^{-(\lambda-1)x} x e^{-x} dx \\ &= \int_0^\infty \lambda^2 x e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty t e^{-t} dt = 1 \end{aligned}$$

2)

Jvf faktoriseringssætningen er der 7 s. 21 er L_n $\mathcal{F}_n$ -målrig

$$E|L_n| = \prod_{n \text{ uafh. } k=0}^n E[\lambda_k^2 e^{-(\lambda_k-1)X_k}] = 1 < \infty$$

$$\text{Der } (L_n) \leq L^1$$

$$E[L_{n+1} | \mathcal{F}_n] = E[\lambda_{n+1}^2 e^{-(\lambda_{n+1}-1)X_{n+1}}] \underset{\substack{\text{Bm 11+12} \\ \text{s. 156}}}{=} L_n \underset{1)}{=} L_n$$

Af def. s. 166 har vi at (L_n) er en martingal mht $(\mathcal{F}_n)$ (Det er klart, at $L_n \geq 0$)

3)

$L_n \rightarrow L_\infty$ n.o., $n \rightarrow \infty$ jvf Martingalkonvergenssætning Ma 4 s 170 idet $\sup_n E[L_n] = 1 < \infty$

$$E[L_\infty] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E[L_n] = 1$$

$$E[L_\infty | \mathcal{F}_n] = \underset{\substack{\text{Bm 11+12} \\ \text{s. 156}}}{L_n E[\frac{L_\infty}{L_n}]} \leq L_n \quad \text{P-n.o.}$$

$$\text{Thi } E[L_\infty] = E[E[L_\infty | \mathcal{F}_n]] = E[L_n] E[\frac{L_\infty}{L_n}] = E[\frac{L_\infty}{L_n}] \leq 1$$

4)

Jvf. Sætn. Ma1 s. 169 er (L_n) en martingal

$$E[L_{n+1}] = E[L_n] \underset{\text{s. 171}}{=} E[L_0] = 1$$

Af sætn. Ma4 s. 170 følger, at $L_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L_\infty$ n.o.

Hvis $E[L_t] = 1$ er τ optional jvf. c) p. s. 178

5)

$$\text{Idet } \{\lim_n L_n = 0\} = \{\lim_n \frac{L_{n+k}}{L_n} = 0\} \text{ er}$$

$\{\lim_n L_n = 0\}$ en halvhændelse af Kolmogorovs

0-1 Lov følger at $P(\lim_n L_n = 0) \in \{0, 1\}$

6)

Jvf. udgørelsen i 3) : $E[L_\infty | \mathcal{F}_n] = L_n E[\frac{L_\infty}{L_n}]$

$$\text{og } E[\frac{L_\infty}{L_n}] = E[L_\infty]$$

$$P(L_\infty > 0) = 1 \iff E[L_\infty] = 1$$

$\Leftarrow$:

$$P(L_\infty = 0) = 1 \implies E[L_\infty] = 0 \neq 1$$

$\Rightarrow$:

Antag $E[L_\infty] < 1$ (wsk 3)

Da geldet $E[L_\infty | \mathcal{F}_n] > L_n$, men jrf. 3)

$$E[L_\infty | \mathcal{F}_n] \leq L_n \quad \text{wz.}$$

7)

$$\lim_n \frac{1}{n} \log L_n = \lim_n \frac{1}{n} (\log 2^{2^n} - \sum_{i=1}^n X_i)$$

$$= 2 \cdot \ln 2 - \lim_n \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = 2 \ln 2 - 2 \quad \text{P-n.o.}$$

idet $\lim_n \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = 2$ jrf. Kolmogorovs store tal, Lov

S. 112

$$\text{Vi ser, at } \lim_n L_n = \lim_n e^{n(2 \log 2 - 2)} = 0 \quad \text{P-n.o.}$$

$$\text{Der } P(L_\infty = 0) = 1$$

Opgave 1

Lad $(X_n)_{n \geq 1}$ betegne en følge af uafhængige stokastiske variable, så at $X_n \sim po(\lambda_n)$ for ethvert $n \geq 1$, hvor $\lambda_n > 0$, d.v.s. X_n er Poisson fordelt med parameter λ_n for alle n . Antag at $X_{2n} \sim X_{2n-1}$ for alle $n \geq 1$, d.v.s. $\lambda_{2n} = \lambda_{2n-1}$, og definer

$$Z_n := X_{2n} - X_{2n-1} \quad \text{for } n \geq 1.$$

Det oplyses, at hvis Y er en stokastisk variabel, som er Poisson fordelt med parameter $\lambda > 0$, d.v.s. $Y \sim po(\lambda)$, så er $E[Y^3] = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$. (dette skal **ikke** bevises)

- (1) Gør rede for at Z_1 er en symmetrisk stokastisk variabel og beregn $E[Z_1]$, $\text{Var}(Z_1)$ og $E[Z_1^3]$.
- (2) Gør rede for at $E[e^{itZ_1}] = e^{-2\lambda_2(1-\cos t)}$ for alle $t \in \mathbf{R}$.
- (3) Antag at $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{2i} = \infty$ samt at $\lambda_n \leq M < \infty$ for alle n . Vis at

$$\lim_n P \left(\frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_{2i}}} \in [a, b] \right) = \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot e^{-s^2/4} ds$$

for alle reelle tal $a < b$.

- (4) Antag at $\lambda_n = \lambda > 0$ for alle $n \geq 1$. Gør rede for at $(Q_n)_{n \geq 1}$ er konvergent i fordeling og bestem grænsefordelingen, hvor

$$Q_n := \frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n Z_i^2}} \quad n \geq 1.$$

- (5) Vis for enhver begrænset reel talfølge $(a_n)_{n \geq 1}$, at

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i Z_i \right)_{n \geq 1} \text{ er konvergent i fordeling } \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} a_i Z_i \text{ er summabel } P\text{-n.o.}$$

Det kan **uden** bevis benyttes, at $1 - \cos x \geq \frac{1}{4}x^2$ for $|x| \leq 1$.

S2001, SS2

opgave 1

1)

$Z_1 = X_2 - X_1 \sim X_1 - X_2 = -Z_1$, dvs. Z_1 symmetrisk

* (idet pgn. uafh. identisk ford. $(X_1, X_2) \sim (X_2, X_1)$)

$$E[Z_1] = E[X_2] - E[X_1] = \lambda_1 - \lambda_1 = 0$$

$$\text{Var}(Z_1) = \underset{\text{uafh.}}{\text{Var}(X_2)} + \text{Var}(X_1) = 2\lambda_1$$

$$E[Z_1^3] = 0 \quad (Z_1 \text{ symmetrisk})$$

2)

$$\begin{aligned} E[e^{itZ_1}] &= \underset{\substack{\text{kf 5} \\ \text{s. 103}}}{\varphi_{X_2}(t)} \underset{\substack{\text{US s. 6} \\ \text{opg. 2}}}{\varphi_{X_1}(-t)} = e^{\lambda_1(e^{it}-1)} e^{\lambda_1(e^{-it}-1)} \\ &= e^{\lambda_1(\cos t + i \sin t - 1 + \cos(-t) + i \sin(-t) - 1)} = e^{-2\lambda_2(1-\cos t)}, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3)

$$\underset{\substack{\text{2) +} \\ \text{kf 5}}}{\varphi_{\frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_{Z_i}}}}(t)} = e^{-2(\sum_{i=1}^n \lambda_{Z_i})(1-\cos(\frac{t}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_{Z_i}}}))}$$

$$\text{Set } x = \sum_{i=1}^n \lambda_{Z_i} \quad x(1-\cos(\frac{t}{\sqrt{x}})) \xrightarrow{\text{L'Hopital}} \frac{1}{2}t^2, \quad x \rightarrow \infty$$

$$\text{dvs. } \varphi_{\frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_{Z_i}}}}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-t^2/2}$$

Af Kont. setn. for karakteristiske fkt følger

at $\frac{\sum_{i=1}^n z_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_{z_i}}} \xrightarrow{d} N(0, 2)$, hvilket viser

det ønskede.

4)

Af Kolmogorovs Store Tals Lov s. 112 følger, at

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2 \xrightarrow{P-n.o.} E[z_i^2] = \text{Var}(z_i) = 2\lambda$$

Fra 3) har vi, at $\sum_{i=1}^n z_i / \sqrt{n\lambda} \xrightarrow{d} N(0, 2)$, $n \rightarrow \infty$

$$Q_n = \left[\left(\frac{\sum_{i=1}^n z_i / \sqrt{n\lambda}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n z_i^2 / n}} \right) \sqrt{2\lambda} \right] \sqrt{2\lambda}$$

Af Portmanteaus Sæt. II følger, at $Q_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$ (s. 134), idet konv. n.o. medfører konv. i ford.

5)

$\Leftarrow$: Tilnærm. idet konv. n.o. medfører konvergens i fordeling

$\Rightarrow$:

$$\varphi_{\sum_{i=1}^n a_i z_i} (t) = e^{-2 \sum_{i=1}^n \lambda_i (1 - \cos(t a_i))} \quad \text{konverger } n \rightarrow \infty$$

(2)
+ KFS

jvf. kant sætn. for karakteristiske fkt.

Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (1 - \cos(t a_n)) < \infty$ følger af uligheden

$$\frac{1}{4} x^2 \leq 1 - \cos(x), \text{ at } \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{1}{4} t^2 a_n^2 = \frac{1}{4} t^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n^2 < \infty$$

Idet en karakteristisk fkt. er kont. (Kf 2 s 102)

og 1 i $t=0$ (Kf 1 s 102) $\exists t \neq 0: \frac{1}{4} t^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n^2 < \infty$

dvs. $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n^2 < \infty$ og dermed idet

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i z_i \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \underset{\substack{\uparrow \\ E[a_i z_i] = 0}}{\text{Var}(a_i z_i)} = \sum_{i=1}^n a_i^2 \lambda_i \text{ og } L^2 \text{ er}$$

et Banachrum, at rækken er konvergent i L^2

og dermed summabel P-u.o. jf. korollaret s 113n.

Opgave 2

Lad $(X_n)_{n \geq 1}$ være en følge af uafhængige stokastiske variable, så at $X_n \sim N(0, 1)$ for alle $n \geq 1$, d.v.s. X_n er normalt fordelt med middelværdi 0 og varians 1 for alle n .

Definer

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n) \text{ for } n \geq 1 \text{ og } \mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$$

$$S_n := \sum_{i=1}^n X_i \text{ for } n \geq 1 \text{ og } S_0 := 0,$$

samt for alle $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ og $n \geq 0$ defineres $M_n^{a,b} := \exp(aS_n - bn)$,

d.v.s.

$$M_n^{a,b} = \prod_{i=1}^n \exp(aX_i - b) \text{ for } n \geq 1 \text{ og } M_0^{a,b} = 1.$$

Det kan i denne opgave **uden** bevis benyttes, at for ethvert $t \in \mathbf{R}$ er

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = e^{t^2/2}.$$

(1) Gør rede for at $E[M_n^{1,1}] = e^{-n/2}$ for alle $n \geq 1$, samt bestem de talpar (a, b) for hvilke

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n^{a,b} = 0 \text{ i } L^2.$$

(2) Bestem de $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ for hvilke $(M_n^{a,b}, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ er en supermartingal og vis, at

$$(M_n^{a,b}, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0} \text{ er en martingal} \Leftrightarrow a^2 = 2b.$$

(3) Vis at $(aS_n - bn)/n \rightarrow -b$ P -n.o. og i L^1 for alle $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, samt at

$$M_n^{a,b} \rightarrow 0 \text{ } P\text{-n.o.} \Leftrightarrow b > 0.$$

(4) Definer for $c > 0$

$$\tau_c := \inf\{n \geq 0 \mid M_n^{2,2} \geq c\} \quad (\inf(\emptyset) := \infty).$$

Vis at τ_c er en stoptid for filtret $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, og at τ_c er optional for $(M_n^{2,2})_{n \geq 0}$.

(5) Vis at hvis $c > 1$, så er

$$P(\tau_c = \infty) > 0 \text{ og } E[M_{\tau_c}^{2,2}; \tau_c < \infty] = 1.$$

opgave 2

1)

$$E[M_n^{a,b}] = (E[e^{aZ_1 - b}])^n = \left(e^b \int_{\mathbb{R}} e^{ax} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \right)^n = e^{-n} e^{n/2} = e^{-n/2}$$

uafh.
identisk
ford.

$$\|M_n^{a,b}\|_2^2 = (E[e^{2aZ_1 - 2b}])^n = \left(e^{-2b} \int_{\mathbb{R}} e^{2ax} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \right)^n$$

uafh.
identisk
ford.

$$= (e^{-2b} e^{(2a)^2/2})^n = e^{2(a^2 - b)n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{hvis } b > a^2$$

2)

$$E[M_{n+1}^{a,b} | \mathcal{F}_n] = E[e^{aZ_{n+1} - b} | \mathcal{F}_n] M_n^{a,b} \leq M_n^{a,b} \quad \text{når}$$

$B_{n+1}^{a,b} \leq 1$
s. 152

$$1 \geq E[e^{aZ_{n+1} - b}] = e^{-b} \int_{\mathbb{R}} e^{ax} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = e^{-b} e^{a^2/2} = e^{a^2/2 - b}$$

altså når $a^2/2 - b \leq 0$

Altså er $(M_n^{a,b})$ et supermartingal hvis $a^2/2 \leq b$

Vi ser ligeledes at $(M_n^{a,b})$ er et martingal når og kun når $a^2/2 = b$

(at $(M_n^{a,b}) \leq 1$ er klart og $(\mathcal{F}_n)$ tilpasset
følge af faktoriseringssætning, sætning 7 s. 21)

3)

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ n.o. og i } L^1 \quad (\text{Kolmogorovs Størte Test for s. 112})$$

$$\text{Dvs. } (aS_n - bn)/n = a \frac{S_n}{n} - b \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -b \text{ n.o. og i } L^1 \quad (*)$$

$$\left(\left\| a \frac{S_n}{n} - b - a \frac{S_n}{n} + b \right\|_1 = |a| \left\| \frac{S_n}{n} - \frac{S_n}{n} \right\|_1 \right)$$

$$M_n^{a,b} = \left(e^{(aS_n - b)/n} \right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \iff b > 0 \text{ jf. } (*)$$

Idet $e^{(aS_n - b)/n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-b}$ n.o. og jf. regneregler for konvergente følger.

4)

$$\{\tau > n\} = \bigcap_{i=1}^n \{M_n^{2,2} < c\} \in \mathcal{F}_n, \text{ dvs. } \tau \text{ er en stopetid jf. def s. 162}$$

$$|M_{n \wedge \tau}^{2,2}| = |M_\tau^{2,2}| 1_{\{\tau \leq n\}} + |M_n^{2,2}| 1_{\{\tau > n\}} \leq |M_\tau^{2,2}| + C \quad (**)$$

$$E[|M_{n \wedge \tau}^{2,2}|] = E[|M_{n \wedge \tau}^{2,2}|] = E[|M_0^{2,2}|] = 1$$

Sætn. Ma1
s. 169

og sætn. Ma1 giver ligeledes, at $(M_{n \wedge \tau})$ er martingal af Sætn. Ma 4 følger, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{n \wedge \tau}^{2,2} \in L^1, \text{ dvs. jf. def. p. } M_\tau^{2,2} \text{ s. 165,}$$

$$\text{at } M_\tau^{2,2} \in L^1$$

$$\text{Jf. a) s. 178 } \tau \text{ optional for } (M_n^{2,2})$$

5)

$$P(\tau \leq n) = P\left(\max_{1 \leq i \leq n} M_i \geq c\right) \leq \frac{1}{c} E[M_n] = \frac{1}{c}$$

jvf. Setn. Ma 2 s. 169, dus. $P(\tau = \infty) > 0$

Idet, $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n^{2,2} = 0$ n.o. er

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{T \wedge n}^{2,2} = M_T^{2,2} 1_{\{\tau < \infty\}} \quad (M_\infty^{2,2} 1_{\{\tau = \infty\}} = 0 \text{ n.o.})$$

Da $(M_{T \wedge n}^{2,2})$ er U.I. følger, at

$$E[M_T^{2,2}; \tau < \infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[M_{T \wedge n}^{2,2}] = \lim_{\text{Setn. Ma 5}} 1 = 1$$

Opgave 3

Lad $(X_n)_{n \geq 1}$ være en følge af uafhængige stokastiske variable, som er uniformt begrænsede, d.v.s. der findes et $K \in \mathbf{R}_+$, så at

$$P(|X_n| \leq K) = 1 \text{ for alle } n \geq 1.$$

Lad for alle n μ_n og σ_n^2 betegne h.h.v. middelværdi og varians for X_n .

(1) Vis at

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 < \infty \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} (X_i - \mu_i) \text{ summabel } P\text{-n.o. og konvergent i } L^2.$$

(2) Vis at

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = \infty \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \xrightarrow{\sim} N(0, 1).$$

(3) Vis f.eks. ved brug af (2) at hvis $\mu_n = 0$ for alle n , så gælder

$$\sum_{i=1}^{\infty} X_i \text{ summabel } P\text{-n.o.} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 < \infty.$$

(4) Vis f.eks. ved brug af Kolmogorov's 0 – 1 lov at hvis $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = \infty$, så er

$$P(\limsup_n \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i) = \infty) = P(\liminf_n \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i) = -\infty) = 1.$$

(5) Vis at hvis $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ er summabel i sandsynlighed, så er $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 < \infty$, og $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$ er konvergent med en endelig grænseværdi.

Lad $(Y_n)_{n \geq 1}$ betegne endnu en følge af uafhængige stokastiske variable.

(6) Vis f.eks. ved brug af Borel-Cantelli Lemmaet, at

$$\sum_{i=1}^{\infty} Y_i \text{ summabel } P\text{-n.o.} \Rightarrow \exists K \in \mathbf{R}_+ : \sum_{i=1}^{\infty} P(|Y_i| > K) < \infty.$$

(7) Vis at $\sum_{i=1}^{\infty} Y_i$ er summabel P -n.o., hvis og kun hvis der findes et $K \in \mathbf{R}_+$, så at flg. tre rækker er konvergente med endelig grænseværdi

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(|Y_i| > K), \quad \sum_{i=1}^{\infty} E[Y_i \cdot \mathbf{1}_{\{|Y_i| \leq K\}}] \quad \text{og} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \text{Var}(Y_i \cdot \mathbf{1}_{\{|Y_i| \leq K\}}).$$

Vink. Udnyt f.eks. at $Y_i = Y_i \cdot \mathbf{1}_{\{|Y_i| \leq K\}} + Y_i \cdot \mathbf{1}_{\{|Y_i| > K\}}$ for alle i og K .

opgave 3

1)

$$\|\sum_{i=n+1}^{\infty} X_i - \mu_i\|_2^2 \stackrel{\text{uafh.}}{=} \sum_{i=n+1}^{\infty} \text{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2$$

Da $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 < \infty$ og L^2 er et Banachrum ses

at rekken er konvergent i L^2 og
summabel p.u.o. jf. korollaret s.13n.

2)

Lad s_n være def. som i Lindbergs Sætning s.146

Lad $\varepsilon > 0$ være vilk.

Da $P(|X_n| \leq K) = 1, n \geq 1, s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad \exists N \geq 1 \forall n \geq N$

$P(|X_{nj} - \mu_{nj}| > \varepsilon s_n) = 0 \quad j=1, \dots, n$

Betingelserne i Lindberg er dermed (trivielt) opfyldt
hvoraf det ønskede følger.

3)

Antag $\mu_n = 0, n \geq 1$ og $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ summabel n.o.

samt $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = \infty$ af 2) følger at

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \Rightarrow N(0,1), \text{ men vi har ogs\aa at } \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ n.o.}$$

Alts\aa har vi en modstrid og $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 < \infty$

4)

J.f. Kolmogorovs 0-1 lov er

$$P(\limsup_n \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i) = \infty), P(\liminf_n \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i) = -\infty) \in \{0, 1\}$$

(der er tale om 'halvkendelser')

$$\text{J.f. 2)} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ : P\left(\frac{|\sum_{i=1}^n X_i - \mu_i|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x)$$

$$\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ des}$$

$$P(|\sum_{i=1}^n X_i - \mu_i| \leq x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+ \text{ dermed er}$$

$$P(\limsup_n \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i) = \infty) = P(\liminf_n \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i) = -\infty) = 1$$

5)

hvis $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ er summabel i ss. $\Rightarrow$ summabel P-n.o.

J.f. 'Konvergens af sum af uafh. var' s. 113 n

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 < \infty$$

3)

Af 1) følger at $\sum_{n=1}^{\infty} X_i - \mu_i$ er summabel n.o

des $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} X_i - \sum_{n=1}^{\infty} (X_i - \mu_i)$ er konvergent med endelig grænseværdi

6)

$$\text{Hvis } \forall k \in \mathbb{R}_+ : \sum_{i=1}^{\infty} P(|\Xi_i| > k) < \infty$$

$$\text{da er (Borel-Cantelli)} \quad P(\limsup \{|\Xi_i| > k\}) = 0$$

$$\text{dvs. for n.a. } \omega : \exists (i_n) \uparrow \infty : \Xi_{i_n}(\omega) > k$$

$$\text{derved er } \sum_{i=1}^{\infty} \Xi_i \text{ ikke summabel P-n.o.}$$

Derved har vi vist det ønskede.

7)

kun hvis:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(|\Xi_i| > k) < \infty \quad \text{jf. 6)}$$

$(\Xi_i 1_{\{|\Xi_i| \leq k\}})$ er en følge som vi så på i

spg. 1) - 5), $\sum_{i=1}^{\infty} \Xi_i$ summabel n.o. $\Rightarrow$

$\sum_{i=1}^{\infty} \Xi_i 1_{\{|\Xi_i| \leq k\}}$ summabel n.o. af 5)

følger at $\sum_{i=1}^{\infty} E[\Xi_i 1_{\{|\Xi_i| \leq k\}}] < \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} \text{Var}(\Xi_i 1_{\{|\Xi_i| \leq k\}}) < \infty$

hvis:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(|\Xi_i| > k) < \infty \quad \Rightarrow \quad P(\liminf_n \{|\Xi_n| \leq k\}) = 1$$

(Borel-Cantelli)

Dvs. fra et vist trin er $|\Xi_n(\omega)| \leq k$ for n.a. ω

Dvs. (jf. $\Xi_i = \Xi_i 1_{\{|\Xi_i| \leq k\}} + \Xi_i 1_{\{|\Xi_i| > k\}}$)

$\sum_{i=1}^{\infty} \Xi_i$ er summabel n.o., hvis $\sum_{i=1}^{\infty} \Xi_i 1_{\{|\Xi_i| \leq k\}}$ er

summabel n.o.

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}(\mathbb{I}_{n1_{\{|E_n| \leq K\}}}) < \infty$

u $\sum_{n=1}^{\infty} (\mathbb{I}_{n1_{\{|E_n| \leq K\}}} - E[\mathbb{I}_{n1_{\{|E_n| \leq K\}}})$ summabel n.o.
 j-f. 1) , men da $\sum_{n=1}^{\infty} E[\mathbb{I}_{n1_{\{|E_n| \leq K\}}}] < \infty$ ses at

$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{n1_{\{|E_n| \leq K\}}}$ er summabel n.o. (sum af to konvergente
 rekke).

Opgave 1

Lad $(X_n)_{n \geq 0}$ betegne uafhængige stokastiske variable, så at $X_n \sim U(-a_n, a_n)$ for $n \geq 1$, hvor $a_n > 0$, d.v.s. X_n er uniformt fordelt over intervallet $(-a_n, a_n)$ for alle n .

(1) Vis at $E[X_1] = 0$ og $Var(X_1) = a_1^2/3$ og bestem fordelingen for $\frac{X_1}{a_1}$.

(2) Vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n \cdot a_n}$$

er summabel P -n.o. og konvergent i middel, d.v.s. i $L^1(P)$.

(3) Antag i dette spørgsmål at $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq a_n \leq 1$ for alle $n \geq 1$. Vis at

$$\lim_n P \left(\left(\sum_{k=1}^n X_k \right)^2 \leq 4 \sum_{k=1}^n a_k^2/3 \right) = 2 \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt.$$

(4) Antag i dette spørgsmål at $a_n = a > 0$ for alle $n \geq 1$. Gør rede for at $(Q_n)_{n \geq 1}$ er konvergent i fordeling og bestem grænsfordelingen, hvor

$$Q_n := \frac{\sum_{i=1}^n (X_i^2 - a^2/3)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} \quad n \geq 1.$$

(5) Beregn den karakteristiske funktion for X_n , samt vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ summabel i sandsynlighed} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty.$$

Det kan her **uden** bevis benyttes at $t - \sin t \geq t^3/8$ for $0 \leq t < 1$.

opgave 1

1)

$$E[X_1] = \int_{-a_1}^{a_1} x \frac{1}{2a_1} dx = 0$$

$$Var(X_1) = E[X_1^2] = \int_{-a_1}^{a_1} x^2 \frac{1}{2a_1} dx = \frac{1}{a_1} \frac{1}{3} a_1^3 = \frac{a_1^2}{3}$$

$E[X_1] = 0$

$$P\left(\frac{X_1}{a_1} \leq x\right) = \begin{cases} \int_{-a_1}^{xa_1} \frac{1}{2a_1} dx = \frac{(x+1)a_1}{2a_1} = \frac{x+1}{2} & , xa_1 \geq -a_1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$f_{\frac{X_1}{a_1}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Dvs. $\frac{X_1}{a_1} \in$ uniformt fordelt på $[-1, 1]$

2)

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{X_i}{i \cdot a_i} \right\|_2^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \left\| \frac{X_i}{a_i} \right\|_2^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \frac{1}{3}$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ og L^2 er et Banach-rum samt

at konvergens i $L^2 \Rightarrow$ konvergens i L^1 (Prop 10 s. 52)

og konvergens af rækker i $L^1 \Rightarrow$ summabilitet P-n.s.

Jvf korollar s. 113n har vi vist det ønskede

3)

Sæt S_n som i Lyapounovs sætn. s. 144

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_n^\alpha} \sum_{i=1}^n E|X_i|^\alpha &= \frac{1}{S_n^\alpha} \sum_{i=1}^n \int_0^{a_i} 2x^\alpha \frac{1}{2a_i} dx = \frac{1}{S_n^\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha+1} a_i^\alpha \\ &= \frac{3^{\alpha/2}}{\alpha+1} \frac{\sum_{i=1}^n a_i^\alpha}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\alpha/2}} \leq \frac{3^{\alpha/2}}{\alpha+1} n^{1-\frac{\alpha}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \alpha > 2 \end{aligned}$$

$\uparrow$
 us use 7
 (ujæld 3)

Af Lyapounovs sætn. s. 144 følger at

$$\sum_{i=1}^n X_i / \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{3}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0,1)$$

$$\text{Dvs. } \left(\sum_{k=1}^n X_k\right)^2 / \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \chi^2(1) \text{ i.f.}$$

Portmanteau sætn. II s. 134. draf følger det
 enskude.

4)

Af Kolmogorovs stær tals lov s. 112

følger at $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - a^2/3) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ n.o.

$$\text{eller } \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a^2}{3} \quad \text{n.o.}$$

Af Den centrale grænsevædisætn. s. 143m. følger at

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - a^2/3) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, E|X_1^2 - a^2/3|^2)$$

$$\begin{aligned} E|X_1^2 - a^2/3|^2 &= E[X_1^4 + \frac{a^4}{3^2} - 2\frac{a^2}{3} X_1^2] = \frac{a^4}{5} + \frac{a^4}{3^2} - 2\frac{a^4}{3^2} \\ &= \frac{4a^4}{45} \end{aligned}$$

Af Portmantrau satn. II s. følger at

$$Q_n \Rightarrow N(0, \sigma^2) \quad \sigma^2 = \frac{4a^4}{45} \cdot \frac{3}{a^2} = \frac{12}{45} a^2$$

5)

$$\begin{aligned} \varphi_{Z_n}(t) &= E[e^{itZ_n}] = \int_{-a_n}^{a_n} e^{itx} \frac{1}{2a_n} dx \\ &= \int_{-a_n}^{a_n} (\cos tx + i \sin tx) \frac{1}{2a_n} dx \\ &= \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} \cos(tx) dx = \frac{1}{a_n t} \sin(a_n t) \quad \left(\frac{\sin(0)}{0} = 1 \right) \end{aligned}$$

$\Leftarrow$

$$\left\| \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \|\tilde{X}_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^n r_i^2$$

da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ er rekker konvergent i L^2 (L^2 Brachrum)

dermed summabel i ss jef. resultatet s. 113_n

$\Rightarrow$

summabel i ss $\Rightarrow$ rekker konvergent i fad.

$$\text{dvs. } \varphi_{\sum_{i=1}^n \tilde{X}_i}(t) = \prod_{i=1}^n \frac{\sin(a_i t)}{a_i t} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(a_i t)}{a_i t}$$

da $\varphi_{\tilde{X}}(0) = 1$ og $\varphi_{\tilde{X}}(t) \sim \text{kont}$ (kf 1+2) $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists t \in (0, 1) : 0 < 1 - \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(a_i t)}{a_i t} < \varepsilon, \text{ idet } (*)$$

$\frac{\sin x}{x} \in (0, 1)$, $x \in (0, 1)$ og $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, idet der ells

$$\exists \varepsilon > 0 : (n_k) \quad P(|Z_{n_k}| > \varepsilon/2) = \int_{\varepsilon/2}^{a_n} \frac{1}{2a_n} dx = \frac{1}{2a_n} (a_n - \frac{\varepsilon}{2}) \geq \frac{1}{4}$$

Hvilket medfører jvf. Borel-Cantelli, at

$P(\limsup \{ |X_n| > \varepsilon/2 \}) = 1$ og dermed, at
rækken ikke er summabel P-n.o. (i strid med
kalkylet s. 113n)

Af dette følger^(*), at $\exists t \in (0,1) : \sum_{n=1}^{\infty} 1 - \frac{\sin(q_n t)}{q_n t} < \infty$

Da $1 - \frac{\sin q_n t}{q_n t} \geq \frac{q_n^2 t^2}{8}$ er $\sum_{n=1}^{\infty} q_n^2 < \infty$

(*) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x_n}{x_n}$ konverger $\iff \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

jvf. 'Problems in Mathematical Analysis I', W.J. Kaczor

, M.T. Nowak' s. 116 + s. 367

Opgave 2

Lad $(X_n)_{n \geq 1}$ betegne uafhængige stokastiske variable, som alle er $E(\lambda)$ -fordelt, hvor $\lambda > 1$, d.v.s. X_n har for ethvert $n \geq 1$ tæthedsfunktion f givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Definer $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ og $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$ for $n \geq 1$.

(1) Beregn $E[X_1]$ og $E[e^{aX_1}]$ for alle $a \in \mathbf{R}$.

(2) Gør rede for at processerne

$$(S_n - n \cdot \lambda^{-1})_{n \geq 1} \quad \text{og} \quad \left(e^{S_n} \cdot \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda} \right)^n \right)_{n \geq 1}$$

er martingaler m.h.t. filtret $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$.

(3) Definer for $a > 0$

$$\tau_a := \inf\{n \geq 1 \mid S_n > a\}.$$

Vis at τ_a er en endelig stoptid m.h.t. filtret $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$.

✎ (4) Vis at τ_a er optional for $(S_n - n \cdot \lambda^{-1})_{n \geq 1}$ samt at $E[\tau_a] \geq a \cdot \lambda$.

(5) Antag i dette spørgsmål at $\lambda = 2$. Definer for $0 < b < 1$

$$\sigma_b := \inf\{n \geq 1 \mid e^{S_n}/2^n < b\}.$$

Vis at σ_b er en endelig stoptid, som ikke er optional for $(e^{S_n}/2^n)_{n \geq 1}$.

✎ (6) Angiv fordelingen for S_n og beregn $E[\tau_a]$ for ethvert $a > 0$.

✎ (7) Bestem fordelingen for $S_{\tau_a} - a$ for ethvert $a > 0$.

opg. 2

1)

$$E[X] = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} t e^{-t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

$$E[e^{ax}] = \int_0^{\infty} e^{ax} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-a)x} dx \\ = \begin{cases} a \geq \lambda: & \infty \\ a < \lambda: & \frac{\lambda}{\lambda-a} \end{cases}$$

2)

Juf. faktoriseringstr. giver $\sum_{i=1}^n X_i$ er processum
tilpasset $(\mathcal{F}_n)$

$$E|S_n - n/\lambda| \leq \sum_{i=1}^n E|X_i| + \frac{n}{\lambda} < \infty$$

$$E|e^{S_n} (\frac{\lambda-1}{\lambda})^n| = \prod_{i=1}^n E[e^{X_i} (\frac{\lambda-1}{\lambda})] < \infty \text{ af 1) da } \lambda > 1$$

D.s. processum er i U

$$E[S_{n+1} - \frac{(n+1)}{\lambda} | \mathcal{F}_n] = \underbrace{E[X_{n+1}]}_{\substack{\text{Bm 10-12} \\ \text{s. 156}}} + S_n - \frac{n+1}{\lambda} = S_n - \frac{n}{\lambda}$$

$$E[e^{S_{n+1}} (\frac{\lambda-1}{\lambda})^{n+1} | \mathcal{F}_n] = \underbrace{E[e^{X_{n+1}}]}_{\substack{\text{Bm 11+12} \\ \text{s. 156}}} e^{S_n} (\frac{\lambda-1}{\lambda})^{n+1}$$

$$= e^{S_n} (\frac{\lambda-1}{\lambda})^n$$

1)

Af def. s. 166m følger at processum er martingal
mht. $(\mathcal{F}_n)$

3)

$\{\tau_a > n\} = \bigcap_{i=1}^n \{S_i \leq a\} \in \mathcal{F}_n$, dvs. τ er en stopetid
jvf. s. 162

$$P(\tau_a > n) = P(S_n \leq a) = \int_0^a \frac{\lambda}{n} e^{-\frac{\lambda}{n}x} dx = [-e^{-\frac{\lambda}{n}x}]_0^a = 1 - e^{-\frac{\lambda}{n}a}$$

$S_n \sim E(\lambda/n)$
pg. 44th

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, dvs. $P(\tau_a < \infty) = 1$ altså er

τ_a en endelig stopetid.

4)

5)

$$\{\sigma_b > n\} = \bigcap_{i=1}^n \{e^{S_i}/2^i \geq b\} \in \mathcal{F}_n \text{ m.f. } \mathbb{Z}$$

Dus σ_b er en stopetid m.f. def. s. 162

Juf. Ma 1

$$\text{er } E[e^{S_{\sigma_b \wedge n}}/2^{\sigma_b \wedge n}] = E[e^{S_1}/2] = E[e^{X_1}/2] = 1$$

$$E[e^{S_{\sigma_b}}/2^{\sigma_b}] = \sum_{\substack{\sigma_b < \infty \\ \text{n.o.}}}^{\infty} e^{S_n}/2^n 1_{\{\sigma_b = n\}} < b < 1$$

Hvis σ_b er optional er $E[e^{S_{\sigma_b}}/2^{\sigma_b}] = 1$ m.f. sætning Ma 5, altså er σ_b ikke optional (for $(e^{S_n}/2^n)_{n \geq 1}$)

6)

$$S_n \sim E\left(\frac{1}{n}\right)$$

Opgave 3

Lad $(X_n)_{n \geq 1}$ betegne uafhængige stokastiske variable, så at $X_n \sim po(\lambda_n)$ for ethvert $n \geq 1$, hvor $\lambda_n > 0$, d.v.s. X_n er Poisson fordelt med parameter λ_n for alle n . Definer

$$S_n := \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{for } n \geq 1.$$

Det oplyses, at hvis Y er en stokastisk variabel, som er Poisson fordelt med parameter $\lambda > 0$, d.v.s. $Y \sim po(\lambda)$, så er $E[Y^3] = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$. (dette skal **ikke** bevises)

(1) Vis at $E[e^{-X_1}] = e^{-\lambda_1(1-e^{-1})}$ og angiv fordelingen for S_n .

(2) Vis at

$$\lim_n e^{-S_n} = 0 \text{ P-n.o.} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty.$$

(3) Vis at

$$\lim_n \lambda_n = 1 \Rightarrow S_n/n \rightarrow 1 \text{ i } L^2(P) \text{ og i sandsynlighed.}$$

(4) Vis at hvis $1 < \lambda_n < 2$ for alle n , så gælder

$$\lim_n P(S_n - \sum_{k=1}^n \lambda_k \geq 0) = 1/2.$$

✂ (5) Vis at hvis λ_n 'erne er begrænsede, så gælder

$$\lim_n e^{-S_n} \cdot \prod_{k=1}^n e^{\lambda_k(1-e^{-1})} = 0 \text{ P-n.o.} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty.$$

opgave 3

1)

$$E[e^{-Z_1}] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^n}{n!} = e^{-\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{-1} \lambda_1)^n}{n!} = e^{-\lambda_1} e^{e^{-1} \lambda_1} \\ = e^{-\lambda_1(1-e^{-1})}$$

$$S_n \sim \text{po} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)$$

2)

$$\|e^{-S_n}\|_1 = \prod_{i=1}^n \|e^{-Z_i}\|_1 = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i(1-e^{-1})} = e^{-(\sum_{i=1}^n \lambda_i)(1-e^{-1})} \quad (*)$$

idet $|e^{-S_n}| \leq |e^{-Z_i}|$ følger af Lebesgues sætn. om

dom. konvergens, at $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-S_n} = 0$ p.u.o. $\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \infty$

Hvis $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \infty$ følger af (*) at $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-S_n} = 0$ i L^1

Da $(e^{-S_n})_{n \geq 1}$ $\searrow$ aftagende og konv. i L^1

medfører konv. af en delflg. jfr. prop 10 s. 52

har vi at $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-S_n} = 0$ p.u.o.

3)

Idet $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 1$ er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(X_n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n^2} < \infty$

des. at $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \lambda_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ n.o. og i L^2

j.f. De Store Tals lov s. 114.

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ j.f. Cesàros Lemma

heraf ses at $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ n.o. og i L^2

Dermed også i ss. j.f. prop. 10 s. 52

4)

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \geq \sqrt{n}, \quad \lambda_i > 1$$

$$\begin{aligned} E|X_i - \lambda_i|^3 &\leq E[X_i^3 + \lambda_i^2 X_i + 3\lambda_i X_i^2 + \lambda_i^3] \\ &= \lambda_i^3 + 3\lambda_i^2 + \lambda_i + \lambda_i^3 + 3\lambda_i(\lambda_i^2 + \lambda_i) + \lambda_i^3 \\ &= 6\lambda_i^3 + 6\lambda_i^2 + \lambda_i \leq 68, \quad \lambda_i < 2. \end{aligned}$$

$$\text{Des. } \left(\sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)\right)^{3/2} \sum_{i=1}^n E|X_i - \lambda_i|^3 \leq \frac{n \cdot 68}{n^{3/2}} = 68 \cdot n^{-1/2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Dermed er Lyapunovs Sætning s. 144 opfyldt og dermed:

$$\frac{S_n - \sum_{i=1}^n \lambda_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i}} \Rightarrow N(0,1) \quad n \rightarrow \infty \quad \text{hvoraf det}$$

endnu følger idet $N(0,1)$ er symmetrisk omkring 0

5)

$$e^{-S_n} \prod_{k=1}^n e^{\lambda_k(1-e^{-1})} \underset{\substack{1) \\ + \text{unfh.}}}{=} e^{-S_n} (E[e^{-S_n}])^{-1}$$

$$\text{Hvis } \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty \text{ er } e^{-S_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{P-n.o. jvf. 2)}$$

Opgave 1

Lad $(X_n)_{n \geq 1}$ betegne en følge af uafhængige identisk fordelte stokastiske variable, så at $X_1 \sim N(0, 3)$, d.v.s. normalfordelt med middelværdi 0 og varians 3. Lad endvidere $(a_n)_{n \geq 1}$ betegne en reel talfølge.

Definer

$$\xi_n := 2 \cdot (\mathbf{1}_{\{X_n > 0\}} - \mathbf{1}_{\{X_n < 0\}}) \quad n \geq 1.$$

1) Beregn

$$E[\xi_1], \text{Var}(\xi_1) \text{ og } \text{Cov}(\xi_1, \xi_2).$$

2) Vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n \text{ summabel } P\text{-n.o.}$$

3) Angiv fordelingen for $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ og $E[S_n \mid \xi_1]$ samt beregn $t \mapsto E[e^{itS_n}]$.

4) Vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n \text{ konvergent i } L^1(P) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty.$$

5) Gør rede for at

$$\frac{(\sum_{i=1}^n \xi_i / \sqrt{i})^2}{\log n}$$

konvergerer i fordeling og angiv middelværdi og varians for grænsfordelingen.

6) Vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n \text{ konvergerer i sandsynlighed} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty.$$

Opgave 2

Lad $(X_n)_{n \geq 1}$ betegne en følge af uafhængige identisk fordelte stokastiske variable, så at $X_1 \sim po(1/2)$, d.v.s. Poisson fordelt med parameter $1/2$.

opgave 1

1)

$$E[\xi_1] = 2E[1_{\{X_1 > 0\}}] - 2E[1_{\{X_1 < 0\}}] = 0$$

$$\text{Var}(\xi_1) = E[\xi_1^2] = 4(E[1_{\{X_1 > 0\}}] + E[1_{\{X_1 < 0\}}]) = 4$$

$$\text{Cov}(\xi_1, \xi_2) = 0 \quad \xi_1 \perp \xi_2$$

2)

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i X_i \right\|_2^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^2 \|X_i\|_2^2 = 3 \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^2$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ og L^2 er et Banachrum er
 rekken konvergent i $L^2 \Rightarrow$ summabel P-n.o.
 Mf. kontrollert s. 113n

3)

$$S_n \sim N(0, 3n)$$

$$E[S_n | \xi_1] = E\left[\sum_{i=2}^n X_i\right] + E[X_1 | \xi_1] = E[X_1 | \xi_1]$$

Bm 10.12
s. 156

$$\sigma(\xi_1) = \{\emptyset, \Omega, \{X_1 > 0\}, \{X_1 < 0\}, \{0\}\}$$

$$\int_0^{\infty} x_1 dP = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} = - \int_{-\infty}^0 x_1 dP$$

Jvf. 151-152 c $E[X_1 | \mathcal{F}_1] = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} 1_{\{X_1 > 0\}} - \sqrt{\frac{2\pi}{3}} 1_{\{X_1 < 0\}}$

Dvs. $P(E[S_n | \mathcal{F}_1] = -\sqrt{\frac{2\pi}{3}}) = P(E[S_n | \mathcal{F}_1] = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}) = 1/2$

$$E[e^{its_n}] = \varphi_{S_n}(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2 \cdot 3n}$$

4)

Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty$, da gælder $\sum_{i=1}^n a_i X_i \sim N(0, 3 \sum_{i=1}^n a_i^2)$

$$\varphi_{\sum_{i=1}^n a_i X_i}(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2 \cdot 3 \cdot \sum_{i=1}^n a_i^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, t \neq 0$$

Dvs. at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n$ ikke konverger i fordeling
og dermed ikke i L^1

5)

$$\varphi_{\frac{\xi_j}{\sqrt{j \log n}}}(s) = \frac{1}{2} (e^{is^2/\sqrt{j \log n}} + e^{-is^2/\sqrt{j \log n}}) = \cos\left(\frac{zs}{\sqrt{j \log n}}\right)$$

$$\varphi_{\left(\sum_{i=1}^n \xi_i / \sqrt{i}\right)^2 / \log n}(t) = \prod_{j=1}^n \cos\left(\frac{zt}{\sqrt{j \log n}}\right)$$

11.

6)

⇐

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \xi_i \right\|_2^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^2 \text{Var}(\xi_i) = 4 \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^2$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ og L^2 er et Banachrum er rækken konvergent i L^2 og dermed, jvf. resultatene nedest s. 113, i ss.

⇒

Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty$:

$$\varphi_{\sum_{i=1}^n a_i \xi_i}(t) \stackrel{\text{KFS}}{=} \prod_{i=1}^n \varphi_{\xi_i}(a_i t) = \prod_{i=1}^n \cos(2a_i t)$$

$$\begin{aligned} \text{da } \varphi_{\xi_i}(s) &= E[e^{is\xi_i}] = e^{2is} P(X_n > 0) + e^{-2is} P(X_n < 0) \\ &= \frac{1}{2} (e^{2is} + e^{-2is}) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos(2s) = \cos(2s) \end{aligned}$$

Men $\prod_{i=1}^{\infty} \cos(2a_i t)$ er kun konvergent, hvis

$\sum_{n=1}^{\infty} 4a_n^2 t^2$ er konvergent, altså konvergerer

rækken ikke i fædeling og dermed heller ikke i ss.

(jvf. Fk4)

Definer

$$N_0 := 0 \text{ og } N_n := \sum_{i=1}^n X_i \quad n \geq 1,$$

samt

$$\mathcal{F}_n := \sigma(N_0, \dots, N_n) \quad n \geq 0,$$

og sæt $S_n := 10 + N_n - n$ for $n \geq 0$.

1) Gør rede for at

$(S_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ er en supermartingal, og $(S_n + n/2, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ er en martingal.

2) Vis at

$$\lim_n S_n/n = -1/2 \quad P\text{-n.o.}$$

3) Definer

$$\tau := \inf\{n \geq 0 \mid S_n \leq 0\}.$$

Vis at τ er en endelig $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -stoptid og beregn $P(\tau \leq 10)$.

✂ 4) Gør rede for at enhver $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -stoptid σ , som har endelig middelværdi, er optional for $(N_n - n)_{n \geq 0}$.

✂ 5) Beregn $E[\tau]$.

✂ 6) Vis f.eks. ved brug af Middelværdisætningen at

$$\lim_n \left(\sqrt{N_n} - \sqrt{n/2} \right)$$

eksisterer i fordeling og angiv grænsefordelingen.

Opgave 3

I papir teknologi er det væsentligt at have metoder til at vurdere fibrenes orienteringsfordeling. Orienteringsfordelingen kan bestemmes ved at tælle antal snitpunkter mellem fibre og

Opgavesættet fortsættes

opgave 2

1)

S_n er $\mathcal{F}_n$ -målbar jvf. faktoriseringssæt. vedse 7 s. 21

$$|S_n| \leq 10 + \sum_{i=1}^n |X_i| + n \in L^1$$

$$E[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] = E[X_{n+1}] + S_n - 1 = S_n - 1/2 \leq S_n$$

Bm 10+12
s. 156

Dvs. jvf def. s. 166 er $(S_n, \mathcal{F}_n)$ en supermartingal

$S_n + \frac{n}{2}$ er $\mathcal{F}_n$ -målbar (faktoriseringssæt.)

$$|S_n + \frac{n}{2}| \leq |S_n| + \frac{n}{2}, \text{ dvs. } S_n + \frac{n}{2} \in L^1$$

$$E[S_{n+1} + \frac{n+1}{2} | \mathcal{F}_n] = E[X_{n+1}] + N_n + 10 - n - 1 + \frac{n+1}{2}$$

Bm 10+12
s. 156

$$= N_n + 10 - n + \frac{n}{2} = S_n + \frac{n}{2}, \text{ dvs. jvf def.}$$

s. 166 er $(S_n + \frac{n}{2}, \mathcal{F}_n)$ en martingal.

2)

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{2} = E[X] \quad \text{P-u.o. ifølge Kolmogorovs}$$

Store Tals lov s. 112, idet $\frac{10}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ og

$$-\frac{n}{n} = -1 \text{ f. s. } \frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\frac{1}{2} \quad \text{P-u.o.}$$

3)

$\{\tau > n\} = \bigcap_{i=1}^n \{S_i > 0\} \in \mathcal{F}_n$, dus. τ is en stopped
(def. s. 162)

Af 2) volgt at $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$ P-n.o.

Dus. $P(\tau < \infty) = 1$

$$\begin{aligned} P(\tau \leq 10) &= P(\{X_1 > -9\} \cup \dots \cup \{X_1 + \dots + X_{10} > 0\}) \\ &= P(X_1 + \dots + X_{10} > 0) = 1 - P(X = 0), \quad X = X_1 + \dots + X_{10} \sim p_0(5) \\ &= 1 - e^{-5} \end{aligned}$$

4)

$$|N_{\sigma_1 n} - \sigma_1 n| \leq |N_{\sigma_1 n}| + |\sigma| = N_{\sigma_1 n} + \sigma \leq N_{\sigma} + \sigma$$

Opgave 1

Lad $(Y_n)_{n \geq 1}$ betegne uafhængige stokastiske variable, så at $Y_n \sim \Gamma(\alpha_n, 1)$ for et reelt tal $\alpha_n > 0$ for ethvert $n \geq 1$.

Definer for $n \geq 1$

$$S_n := \sum_{k=1}^n Y_k, \quad M_n := 2^{(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)} \cdot e^{-S_n} \quad \text{og} \quad \mathcal{F}_n := \sigma(Y_1, \dots, Y_n).$$

Det oplyses, at hvis Y er en $\Gamma(\alpha, 1)$ -fordelt stokastisk variabel, så er (dette skal **ikke** bevises)

$$E[(Y - \alpha)^4] \leq 6 \cdot (\alpha^2 + \alpha).$$

- 1) Vis at $E[e^{-Y_1}] = 2^{-\alpha_1}$ og angiv fordelingen for S_n .
- 2) Gør rede for at $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ er en martingal, og at $\lim_n M_n$ eksisterer P -n.o.
- 3) Antag at $0 < a < \alpha_n < b < \infty$ for alle $n \geq 1$. Vis at

$$\frac{S_n - \sum_{k=1}^n \alpha_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \alpha_k}} \xrightarrow{\sim} N(0, 1) \quad \text{og at} \quad \frac{S_n}{\sum_{k=1}^n \alpha_k} \rightarrow 1 \quad P\text{-n.o.}$$

- 4) Gør rede for at

$$\tau := \inf\{n \geq 1 \mid M_n \geq 10\} \quad \text{hvor} \quad \inf(\emptyset) := \infty$$

er en $(\mathcal{F}_n)$ -stoptid og vis at $P(\tau < \infty) < 1$.

- 5) Vis at $\tau + 1$ er optional for $(M_n)_{n \geq 1}$, hvis α_n 'erne er opad begrænset.

1)

$$E[e^{-\Xi}] = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha_1-1} e^{-x} e^{-x} dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha_1-1} e^{-2x} dx = 2^{-\alpha_1} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} 2^{\alpha_1} x^{\alpha_1-1} e^{-2x} dx = 2^{-\alpha_1}$$

$$S_n \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i, 1\right)$$

2)

M_n er F_n -målelig iflg. faktoriseringssætn. s. 21 (ovela 7)

og $|M_n| \leq 2^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}$, dvs. $M_n \in L^1$, $n \geq 1$

$$E[M_{n+1} | F_n] = \underset{\substack{\text{Bm 10.11} \\ \text{s. 156}}}{e^{\alpha_{n+1}}} E[e^{-\Xi_{n+1}}] M_n = M_n$$

Iflg. def. s. 166 er (M_n, F_n) en martingal

Idet $\sup_n E|M_n| = 1$ eksisterer $\lim_n M_n$ P-u.o. juf sætn. Ma 4

3)

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \geq \sqrt{n \cdot a}$$

$$\sum_{i=1}^n E|\Xi_i - \alpha_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n 6(\alpha_i^2 + \alpha_i) \leq n 6(b^2 + b)$$

Dvs

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 \sum_{i=1}^n E|\Xi_i - \alpha_i|^2 \leq n^{-1} \frac{6(b^2 + b)}{a^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

hvor vi af Lyapounovs sætning s. 144 får: $\frac{S_n - \sum_{i=1}^n \alpha_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$

$$\left\| \frac{S_n}{\sum_{k=1}^n \alpha_k} - 1 \right\|_2^2 \stackrel{\text{uafn}}{=} \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right)^{-2} \sum_{i=1}^n \| \mathbb{I}_i - \alpha_i \|_2^2 = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right)^{-1}$$

$$\leq \alpha^{-1} n^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Dvs. $\frac{S_n}{\sum_{k=1}^n \alpha_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ i L^2 og dermed også P -n.o

jf. korollar 1 + sætn. s. 113_n

4)

$$\{\tau > n\} = \bigcap_{i=1}^n \{M_i < 10\} \in \mathcal{F}_n, \text{ dvs. } \tau \text{ er en stopetid}$$

jf. def s. 162

$$P(\tau \leq n) = P\left(\max_{1 \leq i \leq n} M_i \geq 10\right)$$

$$\stackrel{\text{sætn. Ma2}}{\leq} \frac{1}{10} E[M_n] = \frac{1}{10} E[M_1] = \frac{1}{10}, \quad n \geq 1$$

$$\text{Dvs. } P(\tau < \infty) < 1$$

5)

$$|M_{(\tau+1) \wedge n}| = M_{(\tau+1) \wedge n} = M_{\tau+1} 1_{\{\tau+1 \leq n\}} + M_n 1_{\{\tau+1 > n\}} \quad (*)$$

Af sætn. Ma 1 følger at $\sup_n E|M_{\tau+1 \wedge n}| = 1$

dvs. jf. sætn. Ma 4 er $\mathbb{E}_{\tau+1} \in L^1$, dvs.

$$(*) \leq M_{\tau+1} + 10 \cdot 2^{\alpha_n} e^{-\mathbb{I}_n} \leq M_{\tau+1} + 10 \cdot 2^{\alpha_n} \leq M_{\tau+1} + 10 \cdot 2^k \quad \begin{matrix} (\alpha_i) \leq k \\ \uparrow \\ L^1 \end{matrix}$$

Dvs. $\tau+1$ er optional jf. korollar 1 s. 53

Opgave 2

Lad $(X_n)_{n \geq 1}$ betegne en følge af Poisson fordelte stokastiske variable, d.v.s. for alle $n \geq 1$ er $X_n \sim po(\lambda_n)$ for et reelt tal $\lambda_n > 0$.

1) Beregn

$$E[(2X_1 + 1)^2] \text{ og } E[e^{-2X_1}].$$

2) Vis at

$$\frac{X_n}{\lambda_n} \rightarrow 1 \text{ i sandsynlighed og i } L^2$$

hvis $\lambda_n \rightarrow \infty$.

3) Antag i dette delspørgsmål yderligere at X_n 'erne er uafhængige. Angiv for ethvert $n \geq 1$ den karakteristiske funktion for

$$\sum_{k=1}^n (X_k - \lambda_k),$$

og vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - \lambda_n) \text{ er summabel } P\text{-n.o.} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (X_n - \lambda_n) \text{ er konvergent i } L^1.$$

4) Gør rede for at $(X_n)_{n \geq 1}$ er stram (tight), hvis og kun hvis $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ er en begrænset talfølge.

5) Vis at hvis $X_n \xrightarrow{d} X$, så er X Poisson fordelt eller $P(X = 0) = 1$.

opgave 2

1)

$$E[(2X_1+1)^2] = E[4X_1^2 + 1 + 4X_1]$$

$$= 4(\lambda_1^2 + \lambda_1) + 1 + 4\lambda_1 = 4\lambda_1^2 + 8\lambda_1 + 1$$

$$E[e^{-2X_1}] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_1} \frac{(\lambda_1 e^{-2})^n}{n!} = e^{-\lambda_1} e^{\lambda_1 e^{-2}} \\ = e^{-\lambda_1(1+e^{-2})}$$

2)

$$\left\| \frac{X_n}{\lambda_n} - 1 \right\|_2^2 = \left\| \frac{X_n - \lambda_n}{\lambda_n} \right\|_2^2 = \frac{1}{\lambda_n^2} \lambda_n = \frac{1}{\lambda_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Dvs. vi har konvergens i L^2 og dermed også i SS
(prop 10 s. 52)

3)

$$\varphi_{X_n - \lambda_n}(t) = e^{-i\lambda_n t} \varphi_{X_n}(t) = e^{-i\lambda_n t} e^{\lambda_n(e^{it} - 1)} \\ \text{US UGE 51/6} \\ = e^{\lambda_n(e^{it} - it - 1)}$$

$$\text{Dvs. (KFS)} : \varphi_{\sum_{k=1}^n X_k - \lambda_k}(t) = e^{(e^{it} - it - 1) \sum_{k=1}^n \lambda_k}$$

⇐ Direkte konsekvens af sætningene s. 113 n. pga. uafh.

⇒

Idet summabilitet p.u.o. ⇒ konv. i fordeling

$$\text{er } \varphi_{\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - \lambda_n)}(t) = e^{(e^{it} - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n} \text{ en velf.}$$

karakteristisk fkt., des. da en sådan er kont. og i $t=0$ må gælde (idet $|\varphi| = e^{(\cos t - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n}$) at $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$

$$\text{men } \left\| \sum_{i=n}^m X_i - \lambda_i \right\|_1 \leq \sum_{i=n}^m \|X_i - \lambda_i\|_1 \leq 2 \sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i$$

og da L^1 er et Banachrum er viklun altså konvergent i L^1 .

4)

hvis:

Direkte konsekvens af resultatet s. 137, idet

$$\sup_n E[X_n] = \sup_n \lambda_n < \infty$$

kun hvis:

Antag λ_n er ubegrænset

Dvs. $\exists (n_k), \lambda_{n_k} \uparrow \infty$, X_{n_k} er stavn

Iflg. Helly-Brays sætn. s. 138 eksisterer $(n_{k\ell})$

sa $X_{n_{k\ell}} \Rightarrow P$ af b.m. s. 140 er

$\lim_{\ell} \varphi_{X_{n_{k\ell}}}(t)$ en karakteristisk fkt., men

$$\left| \varphi_{X_{n_{k\ell}}}(t) \right| = \left| e^{\lambda_{n_{k\ell}}(e^{it} - 1)} \right| = e^{\lambda_{n_{k\ell}}(\cos(t) - 1)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad t \neq 2\pi h, \quad h \in \mathbb{Z}$$

men jf. Kf 1+2 er en karakteristisk pkt.
1 i 0 og kont. Altså har vi en modstrid.

5)

Da $X_n \xrightarrow{d} X$ er (X_n) stram jf. s. 140
dvs. (λ_n) er begrænset, dvs. $\exists(n_k)$ så
 λ_{n_k} er konvergent

Vi har, at

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{X_n}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{X_{n_k}}(t) = \lim_{\substack{\text{us lgt} \\ \text{516}}} \lim_{k \rightarrow \infty} e^{\lambda_{n_k}(e^{it}-1)} \\ &= e^{\lambda(e^{it}-1)}, \text{ hvor } \lambda = \lim_k \lambda_{n_k}\end{aligned}$$

Af entydighedsætn. for karakteristiske fkt.
følger, at $X \sim \text{po}(\lambda)$, hvor $\text{po}(0)$ er
fordelingen bestemt ved $P(X=0)=1$