

Pensum i Sandsynlighedsteori 2 Sommer 2003 og Vinter 2003/2004

I det nedenstående refererer kapitel- og sektionnumre til J. Hoffmann-Jørgensen's bog *Probability with a view toward Statistics I*.

I årets løb er der udleveret flg. materiale: Notesæt (side 1-86), ugesedler til Ugerne 36-51 og Ugerne 6-21 samt tillæg (siderne 87-163) til flg. afsnit :

Kapitel 2 : Sektionerne 2.4 og 2.18. Kapitel 3 : Sektion 3.40.

Kapitel 4 : Sektionerne 4.7, 4.18, 4.34 og 4.36 samt en generel oversigt med titlen *De store tals love* I og II.

Kapitel 5 : Sektionerne 5.3, 5.4, 5.9, 5.16, 5.21 og 5.22 samt et notat vedrørende Sektionerne 5.5-5.8 og 5.10.

Kapitel 6 : Siderne 132-141 i tillægget, d.v.s. afsnittet med titlen *Betingede middelværdier*, indeholder udover en kort introduktion de resultater, som vi skal kende vedrørende begrebet 'betinget middelværdi'. Bemærk at der kun betragtes integrable variable, samt at eksistensen af en betinget middelværdi bevises ved hjælp af *Projektionssætningen*, d.v.s. Sætning 9 i noterne, og ikke som i bogen, hvor der i stedet gøres brug af *Radon-Nikodym's Sætning*.

Kapitel 7 : Sektionerne 7.8, 7.9, 7.10, 7.13, og 7.14 samt en generel oversigt med titlen *Martingaler*. Heri specificeres hvad vi skal koncentrere os om, blandt andet skal vi kun se på sub- og supermartingaler bestående af integrable variable, og desuden vil der kun kræves kendskab til teorien vedrørende tidsintervaller af formen $T = \{k, k+1, \dots\}$, hvor $k \in \mathbb{Z}$, hovedsageligt eksemplificeret gennem tilfældet $T = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$. Notatet indeholder iøvrigt et næsten komplet sæt af beviser for alle vigtige påstande.

Pensum er:

Kapitel 1 : Sektionerne 1.1-1.15, 1.19-1.28, 1.32-1.34, 1.37-1.46 og 1.48.

Stofmængden er dækket af noterne i afsnittene *Målelige rum*, *Borel σ -algebraer*, *Målelige funktioner*, *Mal*, *Mal på metriske rum*, *Konstruktion af mål* og *Lebesgue-Stieltjes mål på $\mathbb{R}$* .

Kapitel 2 : Sektionerne 2.1-2.14, 2.16-2.18 og 2.24.

Vedrørende sektionerne 2.4 og 2.18 henvises til de udleverede tillæg.

Kapitel 3 : Sektionerne 3.1-3.27, 3.29, 3.30, 3.31, 3.32, 3.37, 3.38 og 3.40.

Sektion 3.29 er dækket af afleveringsopgaven til Uge 50 og opgave 4 på samme ugeseddel. Sektion 3.31 er dækket af Øvelse nr. 1 Uge 49, og Øvelse nr. 1 og

Øvrige meddelelser til Uge 50 dækker sektion 3.37. Sektion 3.38 er dækket af Øvelse nr. 1 Uge 43.

Den resterende stofmængde er dækket af noterne i afsnittene *Integraler, konstruktion og egenskaber*, *Uligheder*, *Produktmål, eksistens og egenskaber*, *Konvergensformer*, L^p -rum og *Radon-Nikodym's Sætning* samt tillægget til Sektion 3.40. Hvad angår Radon-Nikodym's sætning kræves kun kendskab til formuleringen ikke beviset.

Kapitel 4 : Sektionerne 4.1-4.9, 4.11-4.13, 4.18, 4.22-4.24, (4.30.7), 4.31-4.34 og 4.36.

Vedrørende Sektionerne 4.7, 4.18, 4.34 og 4.36 henvises til de udleverede tillæg. Beviset for 4.36(3) kræves ikke kendt. Formel (4.30.7) er bevist i notatet *De store tals love* II.

Kapitel 5 : Sektionerne 5.1-5.10, 5.16, 5.21-5.23 og 5.26.

Vedrørende Sektionerne 5.3, 5.4, 5.9, 5.16, 5.21 og 5.22 henvises til de udleverede tillæg. Sektionerne 5.5-5.8 og 5.10 dækkes af det udleverede notat.

Kapitel 6 : Sektionerne 6.1, 6.4, 6.7-6.11.

Vedrørende Sektionerne 6.7-6.11 henvises til det udleverede notat angående *Betingede Middelværdier*. Sektion 6.4 er dækket ind af de to øvelser 7 og 8 i de udleverede noter.

Kapitel 7 : Sektionerne 7.1-7.16.

Her henvises til det udleverede oversigtsnotat angående martingaler, hvori det præciseres hvilken situation, vi skal betragte, samt hvilke resultater vi skal kende, (jævnfør bemærkningen ovenfor)

Vedrørende Sektionerne 7.7, 7.9, 7.10, 7.13 og 7.14 henvises til de udleverede tillæg.

Svend Erik Graversen

Sandsynlighedsteori 2

Uge 20.

Forelæsninger: Vi færdiggør martingalsnittet, og viser Radon-Nikodym's Sætning ved brug af konvergenssætningen for martingaler.

Øvelser: Lad $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ være en martingal. Vis at

$$\{M_n^+ | n \geq 1\} \text{ unif. integr.} \Leftrightarrow \exists M \in L^1(P) \ E[M | \mathcal{F}_n] \geq M_n,$$

$$\{M_n^- | n \geq 1\} \text{ unif. integr.} \Leftrightarrow \exists M \in L^1(P) \ E[M | \mathcal{F}_n] \leq M_n,$$

$$\{M_n | n \geq 1\} \text{ unif. integr.} \Leftrightarrow \exists M \in L^1(P) \ E[M | \mathcal{F}_n] = M_n,$$

samt at hvis M_n 'erne yderligere er ikke-negative, så gælder

$$M_n \rightarrow M_\infty \text{ } P\text{-n.o. og i } L^1(P) \Leftrightarrow E[M_n] = E[M_\infty] \text{ } n \geq 1.$$

2) Lad $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ være en uniformt integrabel integrabel martingal, d.v.s. en såkaldt Lévy martingal. Vis at enhver stoptid τ er optional for $(M_n)_{n \geq 0}$.

3) Lad $(X_n)_{n \geq 1}$ betegne en iid-følge, så at $X_1 \sim U(0, 1)$. Definér for $n \geq 1$

$$S_n := \sum_{i=1}^n X_i \text{ og } \mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n).$$

i) Bestem et reelt tal a , så at $(\exp(S_n - na), \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ er en martingal.

Lad i det flg. $(M_n)_{n \geq 1}$ betegne martingalen i i).

ii) Vis at $\tau_1 := \inf\{n \geq 1 | M_n > 5\}$ er en stoptid, som er optional for $(M_n)_{n \geq 1}$, men $P(\tau_1 < \infty) < 1$.

- iii) Gør rede for at $\lim_n M_n$ eksisterer P -n.o. og angiv grænsevariablen.
- iv) Vis at $\tau_2 := \inf\{n \geq 1 | M_n < 0, 5\}$ ikke er optional for $(M_n)_{n \geq 1}$, men $P(\tau_1 < \infty) = 1$.

4) Lad situationen være som i afleveringsopgaven. Definér for ethvert helt tal $b > 0$

$$\tau_b := \inf\{n \geq 0 | S_n \geq b\} \quad \inf(\emptyset) := \infty.$$

Vis at τ_b er en endelig stoptid, men at $E[\tau_b] = \infty$, samt at τ_b ikke er optional for nogen af de to martingaler.

c) Gør rede for at $\limsup_n S_n = \infty$ P -n.o. og $\liminf_n S_n = -\infty$ P -n.o.

5) Vis Kolmogorov's 0-1 lov ved brug af martingal konvergenssætningen. Vink. Lad situationen være som i sektion 2.13. Definér for $A \in \mathcal{F}^\infty$

$$M_n := E[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_n] \quad n \geq 1.$$

Beregn M_n og udyt at $M_n \rightarrow \mathbf{1}_A$ P -n.o.

Afleveringsopgave: Lad $(\epsilon_n)_{n \geq 0}$ være en følge af uafhængige Bernoulli variable. Definér

$$S_0 \equiv 0, \quad S_n := \sum_{j=1}^n \epsilon_j \quad n \geq 1, \quad \mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}, \quad \mathcal{F}_n := \sigma(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \quad n \geq 1.$$

a) Vis at $(S_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ og $(S_n^2 - n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ er martingaler.

Definér for givne hele tal $a < 0 < b$

$$\tau_{a,b} := \inf\{n \geq 0 | S_n \notin]a, b[\} \quad \inf(\emptyset) := \infty.$$

b) Vis at $\tau_{a,b}$ er en endelig stoptid. Vink: Man kan f.eks. vise og udytte at

$$P(\tau_{a,b} > n \cdot l) < \prod_{k=1}^n P(|S_{kl} - S_{(k-1)l}| < l) = P(|S_l| < l)^n \quad \text{hvor } l = b - a.$$

c) Vis at $\tau_{a,b}$ er optional for de to martingaler og bestem fordelingen for $S_{\tau_{a,b}}$ samt $E[\tau_{a,b}]$.

Øvrige meddelelser: Dette er den sidste ugeseddel, der kommer i år. Eventuel overskydende tid kan bruges til at afklare de spørgsmål, der måtte være.

Svend Erik Graversen

SS2, TØ nr. 28

1)

$(M_n, \mathcal{F}_n)$ martingal

Påstand:

(i) (M_n^+) U.I. $\iff \exists M \in \mathcal{U}(P): E[M | \mathcal{F}_n] \geq M_n, n \geq 1$

(ii) (M_n^-) U.I. $\iff \exists M \in \mathcal{U}(P): E[M | \mathcal{F}_n] \leq M_n, n \geq 1$

(iii) (M_n) U.I. $\iff \exists M \in \mathcal{U}(P): E[M | \mathcal{F}_n] = M_n, n \geq 1$

(iv) Hvis $(M_n) \subseteq \mathbb{R}_+$:

$M_n \rightarrow M_\infty$ n.o. og $i \mathcal{U}(P) \iff E[M_n] = E[M_\infty], n \geq 1$

Beris:

(i), (ii), (iii)

$(M_n^+, \mathcal{F}_n)$ er et submartingal, $(M_n^-, \mathcal{F}_n)$ er et supermartingal jvf. Ma 8 s. 166 (tbn s. 167)

$\implies$:

Jvf. lemma 10 s. 53 og Sætning Ma 4 s. 170 er hh.

$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n^+ = M_\infty^{(+)}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n^- = M_\infty^{(-)}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M_\infty$ n.o. og $M_\infty^{(+)}, M_\infty^{(-)}, M_\infty \in \mathcal{U}(P)$ Af korollært s. 174 følger det enskede.

$\longleftarrow$:

Idet $X \leq Y \implies X^+ \leq Y^+$, $X^- \geq Y^-$ følger det enskede (da $(E[M | \mathcal{F}_n])$ er U.I. jvf. Bm 16' s. 158) af korollar 1 s. 53

(iv)

$\Rightarrow$

Af sætn. 7 flg. det søkede idet $(M_n), M_\infty \geq 0$
og $n \mapsto E[M_n]$ er konstant jf. bm. s. 167e

$\Leftarrow$

$$\sup_n E[M_n] = \sup_n E[M_n] = E[M_\infty] < \infty$$

$$\xRightarrow[\text{Sætning Ma 4 s. 170}]{\text{Sætning Ma 4}} \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M_\infty$$

Af Sættn. 7 følger at $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M_\infty$ i $L^1(P)$ $\square$

2)

$(M_n, \mathcal{F}_n)$ U.I. martingal (Levy-martingal jf.
bm. s. 170 i forbindelse med Sætning Ma 4 + def. s. 167n)

Påstand: Enhver stoptid τ er optional for (M_n)

Beweis:

Jf. Sætning. Ma 1 s. 169: $M_{\tau \wedge n} = E[M_n | \mathcal{F}_{\tau \wedge n}]$

af Bm 16 s. 157 følger at τ er optional for (M_n) $\square$

3)

(X_n) iid. $X_i \sim U(0,1)$

$$S_n := \sum_{i=1}^n X_i, \quad \mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n), \quad n \geq 1$$

i)

$$E[e^{X_i - a}] = e^{-a} E[e^X] = e^{-a} (e-1) = 1 \Rightarrow a = -\log\left(\frac{1}{e-1}\right)$$

$$\forall i \text{ ser, at } (e^{S_n - na}) \in L^1(P, \mathcal{F}_n) \quad (E[e^{S_n - na}] = e^{-na} \prod_{i=1}^n (e-1) < \infty)$$

(X_n) uafh.
+ Tonelli-Fubini

Da $E[e^{S_{n+1} - (n+1)a} | \mathcal{F}_n] = \underset{\text{Bin 11+12 s. 156}}{e^{S_n - na}} E[e^{X_{n+1} - a}] = e^{S_n - na}$
 er $(e^{S_n - na}, \mathcal{F}_n)$ et martingal j.f. def. s. 166

ii)

$$\tau_1 := \inf \{n \geq 1 \mid M_n > 5\}, \quad M_n := e^{S_n - na}$$

Påstand: τ_1 er en stoptid, som er optional for (M_n)
 men $P(\tau_1 < \infty) < 1$

Beris:

$\{\tau_1 > n\} = \bigcap_{i=1}^n \{M_i \leq 4\} \in \mathcal{F}_n$, dvs. j.f. def. s. 162 er
 τ_1 en stoptid

$$M_{\tau_1 \wedge n} = M_\tau 1_{\{\tau \leq n\}} + M_n 1_{\{\tau > n\}}$$

$$\leq 5 + M_\tau \in L^1(P) \text{ j.f. Ma 7 s. 165}$$

J.f. Korollar 1 s. 53 er $(M_{\tau_1 \wedge n})$ U.I., dvs.

τ er optional for $(M_n, \mathcal{F}_n)$

$$P(\tau < \infty) = P(\sup_n M_n > 5) \underset{\substack{\text{Sætning Ma 2} \\ \text{s. 169}}}{\leq} \frac{3}{5} \sup_n E[M_n] = \frac{3}{5} < 1$$

Idet $E[M_n] = 1$, $n \geq 1$ (j.f. tidligere b.m.)

(iii)

Påstand: $M_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ eksisterer n.o.

Beris:

Konvergens af Sætning Ma 4 s. 170, da $\sup_n E[M_n] = 1 < \infty$

(Desuden gælder j.f. sætn. Ma 4 at $M_\infty \in L^1(P)$)

Jf. Kolmogorov's Store tals lov (s. 112) gælder (da $E[X_i] = \frac{1}{2}$)
 $S_n/n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1/2$ n.o. og i $L^1(P)$

Dvs. for n.a. $\omega \exists N \geq 1 \forall n \geq N: 0 \leq \frac{S_n}{n} < b < a \approx 0,54$
og dermed ses at $e^{S_n - na} \leq e^{-n(a-b)}$, $n \geq N$, dvs.
 $M_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ n.o.

(iv)

$$\tau_2 := \inf \{n \geq 1 \mid M_n < 0,5\}$$

$P(\tau_2 < \infty) \geq P(\limsup M_n < 0,5) = 1$, da $M_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ n.o.
Altså $P(\tau_2 < \infty) = 1$

Påstand: τ_2 er ikke optimal for $(M_n, \mathcal{F}_n)$

Basis:

$$1_{\{|M_{\tau \wedge n}| \geq K\}} |M_{\tau \wedge n}| = 1_{\{|M_n| \geq K\}} |M_n|, \quad K > 0,5, \text{ dvs.}$$

hvis (M_n) ikke er U.I. er $(M_{\tau \wedge n})$ ikke U.I. jf.
def. s. 53.

Antag at (M_n) er U.I.

Jf. bm. s. 170 og (iii) er $M_n = E[0 | \mathcal{F}_n] = 0$ $\leadsto$

□

4)

(ε_n) iid, $P(\varepsilon_n = -1) = P(\varepsilon_n = 1) = 1/2, n \geq 1$

$S_0 \equiv 0, S_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i, \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_n = \sigma(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), n \geq 1$

$T_b := \inf\{n \geq 0 \mid S_n \geq b\}, b \in \mathbb{Z}_+$

Påstand: T_b er en endelig stoptid

Beweis:

$\{T_b > n\} = \bigcap_{i=0}^n \{S_i < b\} \in \mathcal{F}_n$, dvs. jvf. def. s. 162 er T_b en stoptid, $b > 0$

Jvf. afbryringsopp. gælder, at $\lim_{a \rightarrow \infty} P(S_{Ta+b} = -a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{b}{a+b} = 0$

Dvs. $\lim_{a \rightarrow \infty} P(S_{Ta+b} = b) = 1$

$P(T_b < \infty) \geq P(S_{Ta+b} = b)$, dvs. $P(T_b < \infty) = 1$ □

Påstand: $E[T_b] = \infty$

Beweis:

Antag, $E[T_b] < \infty$

$S_{T \wedge n} = \sum_{i=1}^{n-1} S_i 1_{\{T \geq i\}} + S_n 1_{\{T \leq n\}} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i 1_{\{T \geq i-1\}} \Rightarrow$

$|S_{T \wedge n}| \leq \sum_{i=0}^{\infty} 1_{\{T \geq i\}}$

Da $E\left[\sum_{i=0}^{\infty} 1_{\{T \geq i\}}\right] = \sum_{i=0}^{\infty} P(T \geq i) \stackrel{\substack{\text{Monoton} \\ \text{konvergens}}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} P(T \geq i) \stackrel{\substack{\text{Ustb} \\ \text{oppil}}}{=} E[T_b] < \infty$

følge af korollar 1, s. 53 at $(S_{T \wedge n})$ er U.I.

Af Sætn. Ma 5 s. 170 følger, at $E[S_t] = E[S_0] = 0$

Men $P(\tau < \infty) = 1$, dvs. $S_\tau = b \Rightarrow E[S_\tau] = b > 0$ ∇ $\square$

Påstand: τ_b er ikke optional for hverken $(S_n, \mathcal{F}_n)$ el. $(S_n^2 - n, \mathcal{F}_n)$

Bevis:

Antag τ_b optional for $(S_n, \mathcal{F}_n)$ af Sætn. Ma 5 s. 170: $E[S_{\tau_b}] = E[S_0] = 0$

Men $E[S_{\tau_b}] = b$, da $P(\tau_b < \infty) = 1$

Antag τ_b optional for $(S_n^2 - n, \mathcal{F}_n)$ af Sætn. Ma 5 s. 170:

$E[S_{\tau_b}^2 - \tau_b] = E[S_0^2 - 0] = 0 \Rightarrow E[\tau_b] = E[S_{\tau_b}^2] = b^2 < \infty$,

da $P(\tau_b < \infty) = 1$ ∇ $\square$

Påstand: $P(\limsup S_n = \infty) = P(\liminf S_n = -\infty) = 1$

Bevis:

Pga. symmetri ($S_n \sim -S_n$): $P(\limsup S_n = \infty) = P(\liminf S_n = -\infty)$

Da $P(\tau_b < \infty) = 1 \ \forall b > 0$: er S_n opadtil ubegrænset (def. af τ_b)

n.o., dvs. $P(\limsup S_n = \infty) = 1$ $\square$

Påstand: Kolmogorovs 0-1 Lov: (X_n) uafh. s.v., $\mathcal{F}^\infty = \bigcap_{n=1}^\infty \sigma(X_j | j \geq n)$

$\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$: $\forall F \in \mathcal{F}^\infty$: $P(F) = 0 \cup P(F) = 1$

Bevis:

Lad $A \in \mathcal{F}^\infty$ være givet, $M_n := E[1_A | \mathcal{F}_n]$, $n \geq 1$

$E[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = E[E[1_A | \mathcal{F}_{n+1}] | \mathcal{F}_n] \stackrel{\text{Bn 15 s. 157}}{=} E[1_A | \mathcal{F}_n] = M_n$

Jf. Bn 16 s. 157 er (M_n) u.I. alt i alt gælder i hh. til def. s. 166 at $(M_n, \mathcal{F}_n)$ er et u.I. martingal og jf. bn. i forbindelse med

Sætn. Ma 4 s. 170 er $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M_\infty$ n.o. og $M_n = E[M_\infty | \mathcal{F}_n]$

Dus da $E[1_A | \mathcal{F}_n] = E[M_\infty | \mathcal{F}_n]$, $n \geq 1$ (*)
gælder at $1_A = M_\infty$ n.o., idet $1_A, M_\infty$ er $\mathcal{F}^\infty$
mælelige $\mathcal{F}^\infty \subseteq \sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n)$ og (*) giver

$$\int_{\mathbb{F}} 1_A dP = \int_{\mathbb{F}} M_\infty dP, \quad \mathbb{F} \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$$

hvor $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ er $\mathcal{P}$ -stabil og $\Omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$
(prop 2. s. 24)

$$(\mathcal{F}^\infty \subseteq \sigma((X_n)) \subseteq \sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n))$$

Men da (X_n) er uafh. er $\mathcal{F}_n \perp \mathcal{F}^\infty$, $n \geq 1$

Dus j'f. Bm 12 s. 156, at $E[1_A | \mathcal{F}_n] = P(A)$, $n \geq 1$

men des. $P(A) = E[1_A | \mathcal{F}_n] = M_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1_A \in \{0, 1\}$

Altså er $P(A) = 0$ v $P(A) = 1$

□

SS2, afleveringsopgave nr. 28, Gunna Hellemeund

(ε_n) iid $P(\varepsilon_n = -1) = P(\varepsilon_n = 1) = 1/2$, $n \geq 1$

$S_0 \equiv 0$, $S_n := \sum_{j=1}^n \varepsilon_j$, $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n := \sigma(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $n \geq 1$

a)

Påstand: $(S_n, \mathcal{F}_n)$, $(S_n^2 - n, \mathcal{F}_n)$ er martingaler

Beweis:

Da $|S_n| \leq n$, $|S_n^2 - n| \leq n^2$ er det klart

at $S_n, S_n^2 - n \in L^1(P, \mathcal{F}_n)$

$$E[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] = E[\varepsilon_{n+1} | \mathcal{F}_n] + S_n = S_n$$

$Bm 1 + Bm 10$
s. 154 o. 156 $Bm 12$
s. 156

$$E[S_{n+1}^2 - n - 1 | \mathcal{F}_n] = E[\varepsilon_{n+1}^2 + S_n^2 + 2\varepsilon_{n+1}S_n - n - 1 | \mathcal{F}_n]$$

$$= E[\varepsilon_{n+1}^2 - 1 | \mathcal{F}_n] + 2E[\varepsilon_{n+1}S_n | \mathcal{F}_n] + S_n^2 - n$$

$Bm 1 + Bm 10$
s. 154 s. 156

$$= 2S_n E[\varepsilon_{n+1}] + S_n^2 - n = S_n^2 - n$$

$Bm 11 + 12$
s. 156

Af def. s. 166 følger det ønsket

□

$\forall a, b \in \mathbb{Z} : a < 0 < b :$

$$\tau_{a,b} := \inf \{n \geq 1 \mid S_n \notin]a, b[\}$$

Påstand: $\tau_{a,b}$ er en endelig stoptid

Beweis:

$$\{\tau_{a,b} > n\} = \bigcap_{i=1}^n \{S_i \in]a, b[\} \in \mathcal{F}_n \text{ dvs. j.f. def s. 162}$$

er $\tau_{a,b}$ en stoptid.

$$\{\tau_{a,b} > n \cdot l\} \subseteq \bigcap_{k=1}^n \{|S_{k \cdot l} - S_{(k-1) \cdot l}| < l\}, \quad l = b-a$$

Thi hvis $\tau_{a,b}(\omega) > n \cdot l$ må forskellen mellem S og $S+l$ 'te skridt ($S \leq (n-1)l$) være mindre end l (ellers kommer vi uden for intervallet $[a,b]$)
 Specielt gælder dette for $s=1, \dots, n-1$ og der er $\omega \in \bigcap_{k=1}^n \{|S_{k \cdot l} - S_{(k-1) \cdot l}| < l\}$

$$|S_{k \cdot l} - S_{(k-1) \cdot l}| = \left| \sum_{i=(k-1)l+1}^{kl} \varepsilon_i \right| \text{ er iid } (k=1, \dots, n)$$

Dus.

$$P(\tau_{a,b} > n \cdot l) \leq P\left(\bigcap_{k=1}^n \{|S_{k \cdot l} - S_{(k-1) \cdot l}| < l\}\right)$$

$$= \prod_{k=1}^n P(|S_{k \cdot l} - S_{(k-1) \cdot l}| < l) = P(|S_l| < l)^n$$

$$P(\tau_{a,b} = \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\tau_{a,b} > n \cdot l)$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(|S_l| < l)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 2^{-l})^n = 0$$

Dus. $P(\tau_{a,b} < \infty) = 1$, dus. $\tau_{a,b}$ er endelig $\square$

Påstand: $\tau_{a,b}$ er optional for $(S_n, \mathcal{F}_n), (S_n^2, \mathcal{F}_n)$

Beweis:

$$S_{\tau \wedge n} = \sum_{i=1}^{n-1} S_i 1_{\{\tau \geq i+1\}} + S_n 1_{\{\tau \geq n+1\}}$$

$$= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i 1_{\{\tau > i-1\}}$$

$$|S_{\tau \wedge n}| \leq \sum_{i=1}^n 1_{\{\tau > i-1\}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{\tau > n\}}$$

$$E[\tau_{a,b}] \stackrel{\text{US 16}}{\stackrel{\text{opg. 1}}{=}} \sum_{n=0}^{\infty} P(\tau_{a,b} > n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2 P(\tau_{a,b} > n) \\ \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} (1-2^{-n})^n < \infty$$

Dvs., da $E[\tau_{a,b}] = E[\sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{\tau > n\}}]$ (Setn. om monotone konvergens),
er $(S_{\tau \wedge n})$ U.I., jvf. korollar 1 s. 53

$$M_n := S_n^2 - n$$

$$|M_{n \wedge \tau}| \leq \sum_{i=1}^{n-1} (i^2 + i) 1_{\{\tau \geq i\}} + (n^2 + n) 1_{\{\tau \geq n\}} \\ = i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i 1_{\{\tau \geq i\}} + n 1_{\{\tau \geq n\}} \leq i^2 + \sum_{i=1}^{\infty} i 1_{\{\tau \geq i\}} + n 1_{\{\tau \geq n-1\}} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ L(P) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ L(P) \\ \text{da } E[\tau_{a,b}] < \infty \end{matrix}$$

$$E[n 1_{\{\tau \geq n-1\}}] = n P(\tau \geq n-1) = n (1-2^{-n})^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Dvs. $(n 1_{\{\tau \geq n-1\}})$ er U.I. jvf. korollar 2 s. 53

Af (*) og korollar 1 s. 53 er $(M_{n \wedge \tau})$ U.I.

□

$$P(S_{\tau} \in \{a, b\}) = 1 \quad (P(\tau_{a,b} < \infty) = 1 \text{ i det flg. er } \tau \equiv \tau_{a,b})$$

Af Setn. Ma 5 s. 170: $0 = E[S_{\tau}] = -a P(S_{\tau} = -a) + b (1 - P(S_{\tau} = -a))$

$$\Rightarrow (a+b) P(S_{\tau} = -a) = b \Rightarrow P(S_{\tau_{a,b}} = -a) = \frac{b}{a+b}, P(S_{\tau_{a,b}} = b) = \frac{a}{a+b}$$

Af Setn. Ma 5 s. 170: $0 = E[M_{\tau}] = E[S_{\tau}^2] - E[\tau]$

$$\Rightarrow E[\tau_{a,b}] = a^2 \frac{b}{a+b} + b^2 \frac{a}{a+b} = ab$$

Sandsynlighedsteori 2

Uge 19.

Svend Erik Graversen

Forelæsninger: Vi fortsætter med emnet martingaler.

Øvelser: 1) 7.14.

2) Lad $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ være en uniformt integrabel martingal, i.e. $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ er en martingal, og $\{M_n \mid n \geq 0\}$ er uniformt integrabel. Vis at $\{M_{\tau \wedge n} \mid n \geq 0\}$ er en uniformt integrabel martingal for enhver stopetid τ .

Vink: Anvend f.eks. den 'skræbende' udgave af Optional sampling.

3) Lad $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ være en kvadratisk integrabel martingal, i.e. $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ er en martingal, og M_n er kvadratisk integrabel.

Vis at $(M_n - M_{n-1})_{n \geq 1}$ er parvis orthogonale i $L^2(P)$, og brug dette til at vise, at $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ eksisterer P -n.o. og i $L^2(P)$, hvis og kun hvis

$$\sup_n E[M_n^2] < \infty \text{ eller ækvivalent } \sum_{n=1}^{\infty} E[(M_n - M_{n-1})^2] < \infty.$$

4) Lad $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ være en kvadratisk integrabel martingal, så at $M_0 = 0$ P -n.o. Vis at

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \cdot E[(M_k - M_{k-1})^2] < \infty \Rightarrow M_n/n \rightarrow 0 \quad P\text{-n.o. og i } L^2(P).$$

Vink. Udnyt 3) og Kronecker's Lemma. Sammenlign med Sektion 4.11.

5) Exc. 7.18. Vink til iv): Vis at $\{M_{\tau \wedge n} \mid n \geq 0\}$ er uniformt integrabel ved brug af uligheden

$$M_{\tau \wedge n} = M_{\tau} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau \leq n\}} + M_n \cdot \mathbf{1}_{\{\tau > n\}} \leq M_{\tau} + \mathbf{1}_{\{\tau > n\}} \cdot \prod_{j=1}^n (1 + a_j).$$

6) Exc. 7.16. Ogaven viser, at konvergensforholdene for martingaler er anderledes end for summer af uafhængige variable.

Afleringsopgave: Exc. 7.20.

Øvrige meddelelser: Ingen.

SS2, 10 nr. 27

1)

Exc. 7.14

(ξ_n) uafh. ikke-neg. $\mu := E[\xi_n] > 1$, $n \geq 1$

$\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$, $X_1 := \xi_1$, $X_n := \xi_n X_{n-1} + \xi_n$, $n \geq 2$

$M_n := (1 - \frac{1}{\mu}) \mu^{-n} X_n + \mu^{-n} - 1$, $n \geq 1$

Det er klart (udfra def. på $\mathcal{F}_n$) at X_n, M_n er $\mathcal{F}_n$ mælbare

Påstand:

(i) $X_n \geq 0$, $E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mu X_n + \mu$, $E[X_n] = \mu \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1}$, $n \geq 1$

(ii) $(M_n, \mathcal{F}_n)$ er et martingal, $E[M_n] = 0$, $E[|M_n|] \leq 2$, $n \geq 1$

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M_\infty$ eksisterer n.o., $E[|M_\infty|] \leq 2$

Beris:

(i): $X_1 = \xi \geq 0$ Antag påstanden sand for $n \geq 1$

$X_{n+1} = \xi_{n+1} X_n + \xi_{n+1} = \xi_{n+1} (X_n + 1) \geq 0$ pr. induktion ses, at $X_n \geq 0$, $\forall n \geq 1$

$E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = E[\xi_{n+1} (X_n + 1) | \mathcal{F}_n] = (X_n + 1) E[\xi_{n+1}] = \mu X_n + \mu$ (*)

Idet $\xi_{n+1} \perp\!\!\!\perp X_1, \dots, X_n$, da $\begin{matrix} B_{n+1} \\ B_{n+2} \\ \text{s. 156} \end{matrix}$ (ξ_n) uafh.

$$E[X_n] \stackrel{(*)}{=} \mu \sum_{i=0}^{n-1} \mu^i = \mu \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1}$$

(ii): $E[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = (1 - \frac{1}{\mu}) \mu^{-(n+1)} E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] + \mu^{-(n+1)} - 1$

$$\stackrel{(i)}{=} (1 - \frac{1}{\mu}) \mu^{-n} X_n + (1 - \frac{1}{\mu}) \mu^{-n} + \mu^{-(n+1)} - 1 = (1 - \frac{1}{\mu}) \mu^{-n} X_n + \mu^{-n} - 1 = M_n$$

If. def. s. 166 er $(M_n, \mathcal{F}_n)$ et martingal

$$E[M_n] \stackrel{(i)}{=} (1 - \frac{1}{\mu}) \mu^{-n} \mu \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1} + \mu^{-n} - 1 = \mu^{-n} (\mu^n - 1) + \mu^{-n} - 1 = 0$$

$$E[|M_n|] \leq (1 - \frac{1}{\mu}) \mu^{-n} E[|X_n|] + 1$$

$$\stackrel{n \geq 0}{=} (1 - \frac{1}{\mu}) \mu^{-n} \mu \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1} + 1 = \mu^{-n} (\mu^n - 1) + 1 = 1 - \mu^{-n} + 1 \leq 2$$

(iii)

Da $\sup_n E[|M_n|] \leq 2$ er $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M_\infty$ n.o. jvf. Ma 4 s. 171

Des. $\lim_{n \rightarrow \infty} |M_n| = |M_\infty|$ n.o. af Fatous Lemma (s. 37)

$$E[|M_\infty|] \leq \liminf_n E[|M_n|] \leq 2$$

□

2)

$(M_n, \mathcal{F}_n)$ U.I. martingal

Påstand: $\forall \tau, \tau$ stop tid: $\{M_{\tau \wedge n} | n \geq 0\}$ U.I.

Beris:

Ifølge Sætning Ma 1 (s. 169) er (for τ stop tid)

$$E[M_n | \mathcal{F}_{\tau \wedge n}] = M_{\tau \wedge n} \text{ af Bm 16 (s. 157) følger}$$

at $\{M_{\tau \wedge n} | n \geq 0\}$ er U.I.

□

3)

$(M_n, \mathcal{F}_n)$ er et kvadratisk integrabelt martingal

Påstand: $(M_n - M_{n-1})_{n \geq 1}$ er parvis ortogonal i $L^2(P)$

Beris:

$$n > m: E[(M_n - M_{n-1})(M_m - M_{m-1})]$$

$$= E[M_n M_m] - E[M_n M_{m-1}] - E[M_{n-1} M_m] + E[M_{n-1} M_{m-1}]$$

$$= 0, \text{ idet}$$

$$E[M_n M_m] = E[E[M_n M_m | \mathcal{F}_{n-1}]] = E[M_{n-1} M_m]$$

Bm II s. 156
+ martingal
egenstab

$$\text{Tilsvarende ses at } E[M_n M_{m-1}] = E[M_{n-1} M_{m-1}]$$

□

Påstand: $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ eksisterer n.o. og i L^2

$$\iff \sup_n E[M_n^2] < \infty$$

$$\iff \sum_{n=1}^{\infty} E[(M_n - M_{n-1})^2] < \infty$$

Beweis:

$$M_n = (M_n - M_{n-1}) + (M_{n-1} - M_{n-2}) + \dots + (M_1 - M_0) + M_0$$

Pga. ortogonaliteten: (Bm $M_0 \perp M_1 - M_0$ jvf. ovenstående argument)

$$\|M_n\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \|M_i - M_{i-1}\|_2^2 + \|M_0\|_2^2, \text{ dvs.}$$

$$\sup_n E[M_n^2] < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} E[(M_n - M_{n-1})^2] < \infty$$

$$\iff \text{Lemma 3 s. 65 } (M_n) \text{ konvergent i } L^2$$

Af Sætning Ma 4 (s. 170) fås, at $\sup_n E[M_n^2] < \infty$

$$\implies \sup_n E[|M_n|] < \infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} M_n \text{ eksisterer n.o.}$$

($\|f\|_2^2 \geq 1 + \|f\|_1$)

□

4)

$(M_n, \mathcal{F}_n)$ kvadratisk integrabel martingal, $M_0 = 0$ n.o.

Påstand: $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} E[(M_k - M_{k-1})^2] < \infty \implies M_n/n \rightarrow 0$ n.o. og i $L^2(P)$

Beweis:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} E[(M_k - M_{k-1})^2] < \infty \implies n^{-2} \sum_{k=1}^n E[(M_k - M_{k-1})^2] = 0$$

Kroneiders Lemma 4.9.2

Dvs. (jvf. bm. om ortogonalitet i 3)) at

$$E[M_n^2]/n^2 \rightarrow 0, \text{ da } E[M_n^2]/n^2 = E[(M_n/n)^2]$$

ses, at (jvf. s. 51) $M_n/n \rightarrow 0$ i $L^2(P)$ (og dermed

også i $L^1(P)$) Da $(\frac{M_n}{n}, \mathcal{F}_n)$ dermed er et

supermartingal, som er begrænset i $L^1(P)$ følger

af Sætning. Ma 4 (s. 170), at $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{n} = 0$ n.o.

□

5)

Exc. 7.18

$(\mathbb{F}_n)$ uafh. s.v. $(a_n) \subseteq (0,1]$: $P(\mathbb{F}_n = a_n) = P(\mathbb{F}_n = -a_n) = 1/2$

$$\mathbb{F}_n := \sigma(\mathbb{F}_1, \dots, \mathbb{F}_n), \quad M_n = \prod_{i=1}^n (1 + \mathbb{F}_i), \quad n \geq 1$$

$$\tau := \inf \{n \geq 1 \mid \mathbb{F}_n = -a_n\}$$

Påstand: $(M_n, \mathbb{F}_n)$ er et ikke-neg. martingal

Bevis:

Det er klart at $M_n \geq 0$, M_n $\mathbb{F}_n$ -mælelig og da $|M_n| \leq 2^n$ er M_n P -integrabel, $n \geq 1$

$$E[M_{n+1} \mid \mathbb{F}_n] = \underset{\substack{\text{Bm. 11+12} \\ \text{s. 156}}}{M_n} E[1 + \mathbb{F}_{n+1}] = M_n, \text{ da}$$

$$E[1 + \mathbb{F}_{n+1}] = 1 + \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_{n+1}) = 1$$

Juf. def. s. 166 er $(M_n, \mathbb{F}_n)$ et martingal □

Påstand:

(i) $E[M_n] = 1$, $n \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ eksisterer n.o., $E[M_\infty] \leq 1$

(ii) τ er en endelig støptid, $P(\tau > n) = 2^{-n}$

(iii) $E[M_{t \wedge n}] = 1$, $E[M_\tau] \leq 1$

(iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \prod_{j=1}^n (1 + a_j) = 0 \Rightarrow E[M_\tau] = 1$

Beris:

(i):

$$E[M_n] = \prod_{\substack{\Xi_1, \dots, \Xi_n \\ \text{uafh.}}}^n (1 + E[\Xi_i]) = 1 \quad E[\Xi_i] = 0$$

$\sup_n E[M_n] = \sup_n E[M_n] = 1 < \infty$, det ovenstående
følger dermed af Sætning Ma4 s. 170

(ii):

$\{\tau > n\} = \bigcap_{i=1}^n \{\Xi_i = a_i\} \in \mathcal{F}_n$, dvs. juf. def. s. 162: τ stopetid
desuden ses, at $(\Xi_1, \dots, \Xi_n)$ uafh.

$$P(\tau > n) = \prod_{i=1}^n P(\Xi_i = a_i) = 2^{-n} \Rightarrow P(\tau = \infty) = 0$$

(iii):

Juf. den skrabede udg. af Optional Sampling (Sætning Ma1
s. 169) $E[M_{\tau \wedge n}] = E[M_0] = 1$, $n \geq 1$

$$\sup_n E[M_{\tau \wedge n}] = \sup_n E[M_{\tau \wedge n}] = 1 < \infty, \text{ dvs. juf. s. 165m}$$

+ Sætning Ma4 s. 170 $M_\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} M_{\tau \wedge n}$

Af Fatou (s. 37) følger, at $E[M_\tau] \leq \liminf E[M_{\tau \wedge n}] = 1$

(iv):

$$M_{\tau \wedge n} = M_\tau 1_{\{\tau \leq n\}} + M_n 1_{\{\tau > n\}} \stackrel{M_\tau \geq 0}{\leq} M_\tau + 1_{\{\tau > n\}} \prod_{i=1}^n (1 + a_i)$$

Dvs. da $E[1_{\{\tau > n\}} \prod_{i=1}^n (1 + a_i)] \stackrel{(ii)}{=} 2^{-n} \prod_{i=1}^n (1 + a_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ og

$$E[M_{\tau \wedge n}] \stackrel{(iii)}{=} 1 \text{ er } E[M_\tau] = 1$$

□

6)

Exc. 7.16

(X_n) uafh. s.v.

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}, P(X_n = 1) = \frac{1}{2n}, P(X_n = -1) = \frac{1}{2n}$$

$$F_n := \sigma(X_1, \dots, X_n), n \geq 1$$

$$M_1 = X_1, M_{n+1} = 1_{\{M_n=0\}} X_{n+1} + (n+1) M_n |X_{n+1}|, n \geq 1$$

$$\tau = \inf \{n \geq 1 \mid M_n = 0\}$$

Påstand: $M_n \in \mathbb{Z}$

Beweis:

$$n=1: M_1 = X_1 \in \{-1, 0, 1\}$$

Antag påstanden sand for n

$$n+1: M_{n+1} = 1_{\substack{\{M_n=0\} \\ \uparrow \\ \{-1, 0, 1\}}} X_{n+1} + (n+1) \underbrace{M_n}_{\mathbb{Z}} \cdot \underbrace{|X_{n+1}|}_{\substack{\uparrow \\ \{0, 1\}}}$$

Dus $M_{n+1} \in \mathbb{Z}$

Påstanden er dermed pr. induction sand. $\square$

Påstand:

$$(i) (M_n, F_n) \text{ er et martingal, } E[|M_n|] \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}, n \geq 1$$

$$(ii) \{M_n \neq 0\} = \{|M_n| \geq 1\} = \{|X_n| = 1\}$$

(iii) τ endelig stop tid

$$(iv) M_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ i ss. , men } \limsup_n |M_n| \geq 1 \text{ n.o.}$$

Basis

(i):

Pr. induction sei lt, at $(M_n) \leq L^1(P, \mathcal{F}_n)$

$$E[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = E[1_{\{M_n=0\}} X_{n+1} + (n+1)M_n | \mathcal{F}_n]$$

$$= 1_{\{M_n=0\}} E[X_{n+1}] + (n+1)M_n E[1 | \mathcal{F}_n]$$

Bm 11+12
s. 156

$$= M_n, \text{ da } E[X_{n+1}] = 0, E[1 | \mathcal{F}_n] = 1$$

Das $(M_n, \mathcal{F}_n)$ martingal juf. def. s. 166m

$$n=1: E[M_1] = E[X_1] = 1 \leq 1$$

Antag pistoranden sand for n ($E[M_n] \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$)

$$n+1: E[M_{n+1}] \leq E[1_{\{M_n=0\}} X_{n+1}] + (n+1)E[M_n]$$

$$\leq E[X_{n+1}] + (n+1)E[M_n] \leq \frac{1}{n+1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i}$$

Pr. induction har vi dermed vist, at $E[M_n] \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}, n \geq 1$

(ii):

$$n=1: \{M_1 \neq 0\} = \{X_1 \neq 0\} = \{|X_1|=1\} = \{|M_1| \geq 1\}$$

Antag pistoranden sand for n ($\{M_n \neq 0\} = \{|M_n| \geq 1\} = \{|X_n|=1\}$)

$$\{M_{n+1} = 0\} = \{-1_{\{M_n=0\}} X_{n+1} = (n+1)M_n | \mathcal{F}_n\}$$

$$M_n = 0 \Leftrightarrow |X_n| = 0 : -1_{\{M_n=0\}} X_{n+1} = -X_{n+1} = 0 \Leftrightarrow |X_{n+1}| = 0$$

$$M_n \neq 0 \Leftrightarrow |X_n| = 1 : (n+1)M_n | \mathcal{F}_n = 0 \Leftrightarrow |X_{n+1}| = 0$$

$$\text{Dus. } \{M_{n+1} = 0\} = \{|X_{n+1}| = 0\} (= \{M_{n+1} = 0\})$$

Pr. induction har vi dermed vist, at

$$\{M_{n+1} \neq 0\} = \{|X_{n+1}| = 1\} = \{|M_{n+1}| \geq 1\}$$

(iii)

$$\{\tau > n\} = \bigcap_{i=1}^n \{|M_i| \geq 1\} = \bigcap_{i=1}^n \{|X_i| = 1\} \in \mathcal{F}_n$$

$$\{\tau = \infty\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{|X_i| = 1\}, \text{ men } P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \{|X_i| = 1\}\right) \stackrel{\substack{(X_n) \\ \text{uafh.}}}{=} \prod_{i=1}^{\infty} P(X_i = 1) \\ = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ dus. } P(\tau = \infty) = 0$$

Jvf. def. s. 162 er τ en endelig stoptid

(iv)

Da (X_n) uafh. og

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| = 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty, \text{ samt } \{|X_n| = 1\} \stackrel{(ii)}{=} \{|M_n| \geq 1\}$$

ses jvf. Borel-Cantelli (2.11.) at

$$P(\limsup \{|M_n| \geq 1\}) = 1, \text{ dus.}$$

$$\limsup |M_n| \geq 1 \text{ n.o.}$$

Lad $\varepsilon > 0$ være vilk.

$$P(|M_n| \geq \varepsilon) \leq P(|M_n| \geq 1) \stackrel{(ii)}{=} P(|X_n| = 1) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Dus. $|M_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ i ss.

□

SS2, Afløeringsopgave nr. 27, Gunnar Hellmund

Exc. 7.20

(X_n) uafh. ikke-neg. s.v.

$$E[X_n] = \mu_n, E[X_n^2] = 1, \mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$$

$$L_n := \prod_{i=1}^n X_i, n \geq 1; \tau := \inf \{n \geq 1 \mid L_n \leq a\}, a \in (0, \infty)$$

Påstand: $(L_n, \mathcal{F}_n)$ U.I. supermartingal, $(L_n^2, \mathcal{F}_n)$ martingal

Beweis:

$$\|L_n\|_2^2 = \prod_{i=1}^n \|X_i\|_2^2 = 1 < \infty, \text{ derfor er det klart, at } (L_n) \in L^2(P)$$

(X_n) uafh. s.v. Tonelli-Fubini

$$\int_{\{L_n \geq K\}} |L_n| dP \leq \overline{NP}(\{L_n \geq K\}) \|L_n\|_2 = \overline{NP}(\{L_n \geq K\}) \leq \frac{1}{K} \|L_n\|_2 = \frac{1}{K}$$

Hölder s. 46 Markov s. 47

Af def. s. 53 ses, at (L_n) er U.I.

$$E[L_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = L_n E[X_{n+1}] = \mu_{n+1} L_n \leq L_n, \text{ da}$$

By 11.12 s. 156

$$\mu_{n+1} \leq 1, \text{ thi } \mu_{n+1} > 1 \Rightarrow E[X_{n+1}^2] \geq (E[X_{n+1}])^2 = \mu_{n+1}^2 > 1 \Rightarrow$$

prop Jensen Uglede s. 44

Juf. def. s. 166 er $(L_n, \mathcal{F}_n)$ et U.I. supermartingal

$$E[L_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n] = L_n^2 E[X_{n+1}^2] = L_n^2, \text{ dvs.}$$

By 11.12 s. 156

Juf. def. s. 166 er $(L_n^2, \mathcal{F}_n)$ et martingal

□

Påstand:

$$(i) L_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n \text{ eksisterer u.o., } E[L_\infty] = \prod_{n=1}^{\infty} \mu_n$$

$$(ii) \tau \text{ er en stoptid, } \prod_{n=1}^{\infty} \mu_n \leq E[L_\tau] \leq \mu_1$$

$$(iii) \prod_{n=1}^{\infty} \mu_n = 0 \Rightarrow P(\tau = \infty) = 0$$

Beweis:

(i)

$$E[|L_n|] = E[L_n] = \prod_{i=1}^n E[X_i] = \prod_{i=1}^n \mu_i \leq 1 \quad (\text{da } \mu_i \leq 1 \text{ j.f. ovenskænd.})$$

(X_n) unafh. + Tonelli-Fubini

Dvs. $\sup_n E[|L_n|] \leq 1 < \infty$, af Sætning Ma 4 s.170 fgl., at $L_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n$ eksisterer n.o. og da L_n er U.I. følger at $E[L_\infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[L_n] = \prod_{n=1}^{\infty} \mu_n$ (prop. 10.3) s.52, sætn. 6 s.54, sætn. 7 s.56, da $L_n, L_\infty \geq 0$)

(ii)

$$\{\tau > n\} = \bigcap_{i=1}^n \{L_i > a\} \in \mathcal{F}_n, \text{ dvs. } \tau \text{ er en stopetid (def. s.162)}$$

Ifølge Sætning Ma1 s.169 er $E[L_n | \mathcal{F}_{\tau \wedge n}] = L_{\tau \wedge n}$

dvs. jvf. Bm 16 s.157 er $(L_{\tau \wedge n})$ U.I., endvidere

følge af Sætning Ma1 s.169, at $E[L_1] = \mu_1 \geq E[L_{\tau \wedge n}] \geq E[L_n]$

$$= \prod_{i=1}^n \mu_i \quad (*)$$

Jvf. Sætning Ma4 s.170 er $L_\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} L_{\tau \wedge n}$ n.o.

(se s.165a) Af prop 10.3) s.52, sætn. 6 s.54, sætn. 7 s.56

(da $L_{\tau \wedge n}, L_\tau \geq 0$) følger $E[L_\tau] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[L_{\tau \wedge n}]$

Af (*) følger dermed, at $\prod_{n=1}^{\infty} \mu_n \leq E[L_\tau] \leq \mu_1$

(iii)

$$P(\tau > n) \leq P(L_n > a) \leq \frac{1}{a} E[L_n] = \frac{1}{a} \prod_{i=1}^n \mu_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ da}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \mu_n = 0, \text{ dvs. } P(\tau = \infty) = 0$$

$\mu_n < 1$ s. 47

□

Sandsynlighedsteori 2

Uge 18.

Forelæsninger: Vi fortsætter med martingalerne med hovedvægten lagt på konvergenssætninger og optional sampling. Lad mig minde om, at vi i modsætning til bogen kun betragter integrable sub- og supermartingaler. Vi skal alt i alt gennemgå teori svarende til sektionerne 7.1 til og med 7.16. Vi vil holde os meget nøje til de udleverede noter.

Øvelser: 1) Exc. 7.2. Vis yderligere at $(X_n^2, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ er en submartingal.

2) Beregn *middelværdifunktionen* $n \mapsto E[X_n]$ for en martingal, h.h.v. sub- eller supermartingal, $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$. Vis at en submartingal er en martingal, hvis og kun hvis middelværdifunktionen er konstant.

3) Lad $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, $(Y_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ og $(Z_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ være h.h.v. en martingal, en submartingal og en supermartingal. Lad endvidere q betegne et reelt tal. Vis at $(|X_n|, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, $(Y_n^+, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ og $(Y_n \vee q, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ er submartingaler, samt at $(Z_n \wedge q, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ er en supermartingal.

4) Lad $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ være en martingal og lad $(V_n)_{n \geq 0}$ betegne en reel proces, hvor V_n 'erne er begrænsede, og V_n er $\mathcal{F}_{n-1}$ -målelig for $n \geq 1$ og V_0 $\mathcal{F}_0$ -målelig. Vis at $((V \cdot M)_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ er en martingal, hvor

$$(V \cdot M)_n := V_0 \cdot M_0 + \sum_{j=1}^n V_j \cdot (M_j - M_{j-1}) \quad n \geq 0.$$

Beregn $((V \cdot M)_n)_{n \geq 0}$, hvis $V_n = \mathbf{1}_{\{\tau \geq n\}}$ for $n \geq 0$ for en stoptid τ .

Overvej hvordan resultaterne generaliserer til sub- og supermartingaler.

5) **Hölder's Ulighed for Betingede Middelværdier.**

Lad $p, q > 1$ betegne konjugerede tal og lad $X \in L^p(P)$ og $Y \in L^q(P)$ være givet. Vis at

$$|E[XY | \mathcal{A}]| \leq E[X^p | \mathcal{A}]^{1/p} \cdot E[Y^q | \mathcal{A}]^{1/q} \quad P\text{-n.o.}$$

Vink. Udnyt at der for $a, b \geq 0$ gælder

$$a \cdot b \leq \inf_{x>0} \left(\frac{a^p x}{p} + \frac{b^q x^{-q/p}}{q} \right).$$

6) Lad $p > 1$ og X og Y to ikke-negative stokastiske variable være givet, så at

$$P(X > \lambda) \leq E[Y, X > \lambda]/\lambda \quad \text{for alle } \lambda > 0.$$

Vis at der findes en konstant c_p kun afhængig af p , så at

$$E[X^p]^{1/p} \leq c_p \cdot E[Y^p]^{1/p} \quad \text{d.v.s. } \|X\|_p \leq c_p \cdot \|Y\|_p.$$

Vink: Integrer begge sider med $p \cdot \lambda^{p-1} d\lambda$ og anvend Tonelli og Hölder.

Bemærkning. Der gælder ikke et tilsvarende resultat for $p = 1$, idet der findes X og Y , som opfylder antagelsen, men hvor $E[Y] < E[X] = \infty$.

Afleveringsopgave: Exc. 7.7. Vink til (i): Udnyt at $\{\tau > n\} = \{S_n < 2\}$. Vink til (ii): Betragt de begrænsede stoptider $\tau \wedge n$ og lad $n \rightarrow \infty$.

Øvrige meddelelser: Ingen.

Svend Erik Graversen

1)

Exc. 7.2

$(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in T}$ martingal, $X_n \in L^2(P)$, $n \in T$

$n, k \in T: n \leq k$

(i)

Påstand: $E[X_n X_k | \mathcal{F}_n] = X_n^2$, $E[X_n (X_k - X_n) | \mathcal{F}_n] = 0$

Bevis:

$$E[X_n X_k | \mathcal{F}_n] = \underset{\text{Bm 11 s. 156}}{X_n} E[X_k | \mathcal{F}_n] = \underset{\text{Def. s. 166}}{X_n^2}$$

$$E[X_n (X_k - X_n) | \mathcal{F}_n] = \underset{\text{Bm 10 s. 156}}{E[X_n X_k | \mathcal{F}_n]} - X_n^2 = 0 \quad \square$$

(ii)

Påstand: $E[(X_k - X_n)^2 | \mathcal{F}_n] = E[X_k^2 - X_n^2 | \mathcal{F}_n]$

Bevis:

$$E[(X_k - X_n)^2 | \mathcal{F}_n] = E[X_k^2 | \mathcal{F}_n] + E[X_n^2 | \mathcal{F}_n] - 2E[X_k X_n | \mathcal{F}_n]$$

$$= E[X_k^2 | \mathcal{F}_n] - X_n^2$$

Bm 10-11
s. 156
Def. s. 166

$$= E[X_k^2 - X_n^2 | \mathcal{F}_n] \quad \square$$

(iii)

Påstand: $E[X_n X_n] = E[X_n^2]$, $E[X_n(X_n - X_n)] = 0$

Beris:

$$E[X_n X_n] = E[E[X_n X_n | \mathcal{F}_n]] \stackrel{(i)}{=} E[X_n^2]$$

BmO s. 157

$$E[X_n(X_n - X_n)] = E[E[X_n(X_n - X_n) | \mathcal{F}_n]] \stackrel{(i)}{=} E[0] = 0$$

BmO s. 157

(iv)

Påstand: $E[(X_k - X_n)^2] = E[X_k^2] - E[X_n^2]$

Beris:

$$E[(X_k - X_n)^2] = E[E[(X_k - X_n)^2 | \mathcal{F}_n]] \stackrel{(ii)}{=} E[E[X_k^2 - X_n^2 | \mathcal{F}_n]]$$

BmO s. 154

$$\stackrel{\text{BmO s. 154}}{=} E[X_k^2] - E[X_n^2]$$

□

Påstand: $(X_n^2, \mathcal{F}_n)$ er en submartingal

Beris:

Da $X_n^2 \in U(P)$ og $x \mapsto x^2$ er konvex på $\mathbb{R}$ er dette en direkte konsekvens af Na 8 s. 166

□

2)

$(X_n, \mathcal{F}_n)$ martingal:

$n \geq 1$: $E[X_n] = E[X_0]$, dvs. middelværdi er konstant $E[X_0]$

Beris: $n=0$: $E[X_n] = E[X_0]$, antag udsagnet er korrekt

før $n \geq 1$: $E[X_{n+1}] = E[E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n]] \stackrel{\text{def s. 166}}{=} E[X_n] = E[X_0]$ □

BmO s. 154

$(X_n, \mathcal{F}_n)$ submartingal

$n \geq 0$: $E[X_{n+1}] \geq E[X_n]$, dvs. middelværdi er voksende

Beris:

$$n=0: E[X_1] \stackrel{\substack{\text{Bm 0} \\ \text{s. 154}}}{=} E[E[X_1 | \mathcal{F}_0]] \stackrel{\substack{\text{def.} \\ \text{s. 166}}}{\geq} E[X_0]$$

$$n \geq 1: E[X_{n+1}] = E[E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n]] \geq E[X_n]$$

□

$(X_n, \mathcal{F}_n)$ supermartingal

$n \geq 0: E[X_{n+1}] \leq E[X_n]$, dvs. middelværdifkt. er aftagende

Beris:

$$n=0: E[X_1] \stackrel{\substack{\text{Bm 0} \\ \text{s. 154}}}{=} E[E[X_1 | \mathcal{F}_0]] \stackrel{\substack{\text{def.} \\ \text{s. 166}}}{\leq} E[X_0]$$

$$n \geq 1: E[X_{n+1}] = E[E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n]] \leq E[X_n]$$

□

Påstand: Et submartingal er et martingal
 $\iff$ middelværdifkt. er konstant.

Beris:

$\implies$: Er vist for oven

$\impliedby$:

Vi ved, at $E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \geq X_n \stackrel{\substack{\text{Bm 10} \\ \text{s. 156}}}{=} E[X_n | \mathcal{F}_n]$

$$\implies E[X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n] \geq 0$$

Men $E[E[X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n]] = E[X_{n+1}] - E[X_n] = 0$

dvs. $E[X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n] = 0$ p.n.o. jvf. e) s. 32

Dvs. $E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$ og dermed er $(X_n, \mathcal{F}_n)$ et martingal.

□

3)

$(X_n, \mathcal{F}_n)$ martingal, $(I_n, \mathcal{F}_n)$ submartingal,
 $(Z_n, \mathcal{F}_n)$ supermartingal, $q \in \mathbb{R}$

Påstand: $(|X_n|, \mathcal{F}_n)$, $(I_n^+, \mathcal{F}_n)$, $(I_n \vee q, \mathcal{F}_n)$ submartingaler
 $(Z_n \wedge q, \mathcal{F}_n)$ supermartingaler

Beweis:

$x \mapsto |x|$, $y \mapsto y^{+ (1)}$, $y \mapsto y \vee q^{(2)}$ er konvekse på $\mathbb{R}$
af sætn. Ma 8 s. 166 + bsm s. 167 er det klart at
 $(|X_n|, \mathcal{F}_n)$, $(I_n^+, \mathcal{F}_n)$, $(I_n \vee q, \mathcal{F}_n)$ er submartingaler, da (1)+(2) er voksende
 $z \mapsto z \wedge q$ er konkav på $\mathbb{R}$, af en ækvivalent sætn. til
Ma 8 for konkave fkt. og supermartingaler følger, at
 $(Z_n \wedge q, \mathcal{F}_n)$ er et supermartingal. Sætn. for konkave
fkt. er en konsekvens af at

$$E[\phi(V_{n+1}) | \mathcal{F}_n] \leq \phi(E[V_{n+1} | \mathcal{F}_n]) \leq \phi(V_n) \quad \left(\begin{array}{l} \text{J.f. en ækvivalent} \\ \text{til Bn. 5 s. 154} \end{array} \right)$$
for voksende konkave fkt.

□

4)

$(M_n, \mathcal{F}_n)$ martingal (V_n) reel proces, V_n 'erne begrænsede
 V_n er $\mathcal{F}_n$ -målelig, $n \geq 1$, V_0 er $\mathcal{F}_0$ -målelig

Påstand: $((V \cdot M)_n, \mathcal{F}_n)$ er en martingal,

$$(V \cdot M)_n := V_0 M_0 + \sum_{j=1}^n V_j (M_j - M_{j-1}), \quad n \geq 0$$

Basis:

$$E[(V \cdot M)_{n+1} | \mathcal{F}_n] = E[V_0 M_0 | \mathcal{F}_n] + \sum_{j=1}^{n+1} E[V_j (M_j - M_{j-1}) | \mathcal{F}_n]$$

valdef.
da V_j er begrænset
+ lin. af M_j .

$$= V_0 M_0 + \sum_{j=1}^n V_j (M_j - M_{j-1}) = (V \cdot M)_n$$

Bm. 10
s. 156

$$\text{Da } E[V_{n+1} (M_{n+1} - M_n) | \mathcal{F}_n]$$

$$= E[V_{n+1} M_{n+1} | \mathcal{F}_n] - E[V_{n+1} M_n | \mathcal{F}_n]$$

$$= V_{n+1} E[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] - V_{n+1} M_n = V_{n+1} M_n - V_{n+1} M_n = 0$$

Bm. 10+11
s. 156

($M_n, \mathcal{F}_n$)
martingal.

□

$$V_n := 1_{\{\tau \geq n\}}, \quad n \geq 0, \quad \tau \text{ stopetid}$$

$$(V \cdot M)_0 = V_0 M_0 = 1_{\{\tau \geq 0\}} M_0 = M_0$$

$n \geq 1$:

$$\begin{aligned} (V \cdot M)_n &= \sum_{j=0}^{n-1} (1_{\{\tau \geq j\}} - 1_{\{\tau \geq j+1\}}) M_j + 1_{\{\tau \geq n\}} M_n \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} 1_{\{\tau \geq j\}} M_j + 1_{\{\tau \geq n\}} M_n \end{aligned}$$

Juf. b.m. s. 164_n ser vi, at

$$(V \cdot M)_n = \sum_{\tau \leq n} M_\tau, \quad n \geq 0$$

Ud fra ovenstående basis, ses at hvis $(M_n, \mathcal{F}_n)$ er et submartingal $((V \cdot M)_n, \mathcal{F}_n)$ et submartingal, hvis

V_n er positiv og et supermartingal hvis V_n er negativ.

(og hvis $(M_n, \mathcal{F}_n)$ supermartingal: $(V \cdot M)_n$ super V pos, sub V neg.)

5) Hölder's Ulyghed for Betragede Middelværdier

$$p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad X \in L^p(P), \quad Y \in L^q(P)$$

$$\text{Påstand: } |E[XY | \mathcal{A}]| \leq E[|X|^p | \mathcal{A}]^{1/p} + E[|Y|^q | \mathcal{A}]^{1/q} \text{ n.o.}$$

Beweis:

$$\frac{E[XY | \mathcal{A}]}{E[|X|^p | \mathcal{A}]^{1/p} E[|Y|^q | \mathcal{A}]^{1/q}} \stackrel{\text{Bm II s. 156}}{=} E\left[\frac{|X|}{E[|X|^p | \mathcal{A}]^{1/p}} \frac{|Y|}{E[|Y|^q | \mathcal{A}]^{1/q}} \mid \mathcal{A}\right]$$

$$\stackrel{(*)}{\leq} E\left[\frac{|X|^p}{E[|X|^p | \mathcal{A}]^p} + \frac{|Y|^q}{E[|Y|^q | \mathcal{A}]^q} \mid \mathcal{A}\right]$$

$$\stackrel{\text{Bm II s. 156}}{=} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

||

$$|E[XY | \mathcal{A}]| \stackrel{\text{Bm V s. 157}}{\leq} E[|XY| | \mathcal{A}] \leq E[|X|^p | \mathcal{A}]^{1/p} E[|Y|^q | \mathcal{A}]^{1/q}$$

(*) : Da $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ og $\ln$ er konvex gælder $x, y > 0$:

$$\ln\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) \geq \frac{\ln(x)}{p} + \frac{\ln(y)}{q} = \ln(x^{1/p} y^{1/q})$$

$$\stackrel{\text{In voksende}}{\implies} \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y \geq x^{1/p} y^{1/q}$$

□

6)

$$p > 1, \quad X, Y \in \mathbb{R}_+ \text{ s.v.} : \forall \lambda > 0 : P(X > \lambda) \leq E[Y; X > \lambda] / \lambda$$

$$\text{Påstand: } \exists c_p \in \mathbb{R}_+ : E[|X|^p]^{1/p} \leq c_p E[|Y|^p]^{1/p},$$

$$\text{dvs. } \|X\|_p \leq c_p \|Y\|_p$$

$$\int_0^\infty P(X > \lambda) p \lambda^{p-1} d\lambda = \int_0^\infty P(X^p > \lambda) d\lambda \stackrel{\text{Int. formel s. 50}}{=} E[X^p] = \|X\|_p^p$$

$$\int_0^\infty E[\varphi; X > \lambda] p \lambda^{p-2} d\lambda \stackrel{\text{prop 7 s. 46}}{\leq} \int_0^\infty \| \varphi \|_p P(X > \lambda)^{\frac{p-1}{p}} p \lambda^{p-2} d\lambda$$

$$\leq \| \varphi \|_p \frac{p}{p-1} \left(\int_0^\infty P(X > \lambda) (p-1) \lambda^{p-2} d\lambda \right)^{\frac{p-1}{p}} \stackrel{\text{Int. formel s. 50}}{=} \| \varphi \|_p \frac{p}{p-1} (\|X\|_{p-1}^{p-1})^{\frac{p-1}{p}}$$

$x \mapsto x^{\frac{p-1}{p}}$
 ist konvex
 + äquivalent
 til prop. 6
 s. 44

$$\leq \frac{p}{p-1} \| \varphi \|_p \|X\|_p^{\frac{(p-1)^2}{p}} \stackrel{\text{Korollar s. 44n}}{\leq} \frac{p}{p-1} \|X\|_1^{-\frac{p-1}{p}} \| \varphi \|_p \|X\|_p^{p-1}$$

$\Downarrow$

$$\|X\|_p^p \leq C_p \| \varphi \|_p \|X\|_p^{p-1} \quad , \quad C_p = \frac{p}{p-1} \|X\|_1^{-\frac{p-1}{p}}$$

$\Downarrow$

$$\|X\|_p \leq C_p \| \varphi \|_p$$

□

SS2, afløsningsopgave nr. 26, Gunna Hellmund

Exc. 7.7

(X_n) iid, $X_n \sim \text{po}(\lambda)$, $\lambda > 0$, $n \geq 1$

$\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$, $n \geq 1$

$S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $M_n := S_n - n\lambda$, $\tau(\omega) := \inf \{n \geq 1 \mid S_n(\omega) \geq 2\}$

Påstand: $(M_n, \mathcal{F}_n)$ er et martingal, $E[M_n] = 0$, $n \geq 1$

og τ er en veldef. endelig støptid, som opfylder:

(i) $P(\tau > n) = e^{-n\lambda} (1 + n\lambda)$, $n \geq 0, 1, \dots$

(ii) $E[S_\tau] = \lambda E[\tau] = \frac{\lambda - \lambda e^{-\lambda} + \lambda^2 e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^2}$

Beris:

$$\begin{aligned} E[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= E[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] - (n+1)\lambda \\ &= S_n + E[X_{n+1}] - (n+1)\lambda = S_n - n\lambda = M_n \end{aligned}$$

Bm. 10+12 s. 156

Dvs. $(M_n, \mathcal{F}_n)$ er et martingal (jvf. def. s. 166)

Jvf. opg. 2) på denne WS er middelværdihft. konstant, dvs.

$$E[M_n] = E[M_1] = E[X_1] - \lambda = 0$$

$X_1 \sim \text{po}(\lambda)$

$\{\tau > n\} = \{S_n < 2\} \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$ dvs. jvf. def. s. 162 er τ en veldef. støptid.

(i):

$$P(\tau > n) = P(S_n < 2) = P(S_n = 0) + P(S_n = 1)$$

$$= e^{-n\lambda} + e^{-n\lambda} n\lambda = e^{-n\lambda} (1 + n\lambda)$$

$X_1, \dots, X_n$ uafh.
 $\sim \text{po}(\lambda)$
 $\Rightarrow$
 $X_1 + \dots + X_n \sim \text{po}(n\lambda)$

$P(\tau > n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, dvs. $P(\tau = \infty) = 0$ τ er altså endelig

(ii)

$$\begin{aligned} S_{\tau \wedge n} &= \sum_{j=1}^{n-1} S_j 1_{\{\tau \geq j\}} + S_n 1_{\{\tau \geq n\}} \\ &= \sum_{j=1}^n X_j 1_{\{\tau \geq j\}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[S_{\tau \wedge n}] &= \sum_{j=1}^n E[X_j] E[1_{\{\tau \geq j\}}] = \sum_{j=1}^n \lambda P(\tau \geq j-1) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \bar{X}_j \perp \sigma(X_j) \\ &= \lambda \sum_{j=1}^n P(\tau \geq j-1) = \lambda \sum_{j=0}^{n-1} P(\tau \geq j) \end{aligned}$$

Jvf. s. 165m + sætn. om monoton konvergens (X_j 'er ikke-neg) er

$$E[S_\tau] = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \sum_{j=0}^{n-1} P(\tau \geq j) = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} P(\tau \geq j) \underset{\substack{\text{opg. 1) \\ \text{us 16}}}{=} \lambda E[\tau]$$

Vi har (jvf. Ebbe Thue Poulsen 'Fkt. af en og flere var' s. 11)

$$\sum_{i=0}^n x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \text{ differentieres f.eks. } \sum_{i=1}^n i x^i = \frac{n x^{n+2} - (n+1) x^{n+1} + x}{(x-1)^2}$$

Dus.

$$\begin{aligned} E[S_{\tau \wedge n}] &= \lambda \sum_{j=0}^{n-1} P(\tau \geq j) = \lambda \sum_{j=0}^{n-1} (e^{-\lambda} + n \lambda e^{-n\lambda}) \\ &= \lambda \frac{(e^{-\lambda})^n - 1}{e^{-\lambda} - 1} + \lambda^2 \frac{(n-1)(e^{-\lambda})^{n+1} - n(e^{-\lambda})^n + e^{-\lambda}}{(e^{-\lambda} - 1)^2} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{-\lambda}{e^{-\lambda} - 1} + \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{(e^{-\lambda} - 1)^2} = \frac{\lambda - \lambda e^{-\lambda} + \lambda^2 e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^2} \end{aligned}$$

□

Pöstand: $1_{\{\tau > n\}} |M_n| \leq 1 + \lambda \tau, |M_\tau| \leq 1 + \lambda \tau + \lambda \tau$

$$E[X_\tau] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} P(X_j > n, \tau = j) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} P(X_j > n, \tau > j-1)$$

$$= E[X_1] E[\tau] < \infty$$

τ er optional for $(M_n, \mathcal{F}_n)$

Bewis:

$$\begin{aligned} 1_{\{\tau > n\}} |M_n| &= |S_n 1_{\{\tau > n\}} - n \wedge 1_{\{\tau > n\}}| \\ &= \begin{cases} n \wedge 1_{\{\tau > n\}} \leq \tau \wedge 1_{\{\tau > n\}} \leq 1 + \lambda \tau, & S_n = 0 \\ |1_{\{\tau > n\}} - n \wedge 1_{\{\tau > n\}}| \leq 1_{\{\tau > n\}} + n \wedge 1_{\{\tau > n\}} \leq 1 + \lambda \tau, & S_n = 1 \quad (*) \end{cases} \end{aligned}$$

$\tau = k \geq 1$:

$$|M_\tau| = |M_k| = |S_k - k \wedge| = \begin{cases} S_{k-1} = 0 : |S_k - k \wedge| \leq 1 + \lambda k + \lambda k \\ S_{k-1} = 1 : |1 + S_{k-1} - k \wedge| \leq 1 + \lambda k + \lambda k \end{cases}$$

$$= 1 + \lambda \tau \quad (\text{jvf. def. s. 165}_b)$$

$$\tau = \infty : |M_\tau| \leq 1 + \lambda \tau + \lambda \tau = \infty$$

$$E[X_\tau] \stackrel{\substack{\text{US 16} \\ \text{opg. 1}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P(X_\tau > n) \stackrel{\substack{E[\tau] < \infty \\ \Rightarrow \tau < \infty \text{ n.o.} \\ + \text{ def. s. 165}_b}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} P(X_j > n, \tau = j)$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} P(X_j > n, \tau > j-1) \stackrel{\substack{\{\tau > j-1\} \perp \\ \{X_j > n\}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} P(X_j > n) P(\tau > j-1)$$

$$\stackrel{(X_n) \text{ iid}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} P(X_1 > n) P(\tau > j-1) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} P(X_1 > n) \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} P(\tau > j) \right)$$

$$\stackrel{\substack{\text{US 16} \\ \text{opg. 1}}}{=} E[X_1] E[\tau] < \infty$$

$$|M_{\tau \wedge n}| = |M_{\tau} 1_{\{\tau \leq n\}} + M_n 1_{\{\tau > n\}}|$$

$$\leq |M_{\tau}| + 1_{\{\tau > n\}} |M_n| \leq 2 + 2\lambda\tau + \Sigma_{\tau}$$

Idet τ, Σ_{τ} j.f. det ovenstående er i L^1 er $(M_{\tau \wedge n})_{n \geq 1}$ U.I. dvs τ er optional for $(M_n, \mathcal{F}_n)$

□

Sandsynlighedsteori 2

Uge 16-17.

Forelæsninger: Vi starter på kursets sidste store emne *martingalteorien*, som står omtalt i kapitel 7. De udlærede noter indeholder det, der vil blive gennemgået. Som forklaret på side 142 i noterne findes der kun to interressante tidsintervaller nemlig $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ og $T = \{0, -1, -2, \dots\}$ svarende til h.h.v. en fremadgående og en bagudgående tidsmodel. Vi skal udelukkende interessere os for tidsintervallet $T = \{0, 1, 2, \dots\}$, og overlade tilfældet $T = \{0, -1, -2, \dots\}$ til et senere kursus.

Vi starter med at se på begrebet 'filter' samt tilhørende stoptider.

Øvelser: 1) Lad A og B betegne to hændelser, så at $0 < P(B) < 1$. Vis at

$$E[\mathbf{1}_A | B] := E[\mathbf{1}_A | \mathbf{1}_B] = P(A | B) \cdot \mathbf{1}_B + P(A | B^c) \cdot \mathbf{1}_{B^c} \quad P\text{-n.o.}$$

2) Exc. 6.14 og 6.15. (Korollar 2 side 40 i noterne). Udnyt dette til at vise Punkt 13 side 137 i noterne.

3) Vis en udgave af Punkt 2 side 135 med $>$ i stedet for $\geq$.

4) Lad X, Y og Z betegne stokastiske variable, så at $X \in L^1(P)$, og lad φ og ψ betegne reelle Borel funktioner. Vis at hvis $(X, Y) \sim (X, Z)$ så er

$$E[X | Y] = \varphi(Y) \quad P\text{-n.o.} \Leftrightarrow E[X | Z] = \varphi(Z) \quad P\text{-n.o.},$$

og at hvis $(X, Y) \sim (Z, Y)$ så er

$$E[X | Y] = \psi(Y) \quad P\text{-n.o.} \Leftrightarrow E[Z | Y] = \psi(Y) \quad P\text{-n.o.}$$

Vis at hvis $X_1, \dots, X_n$ er iid med endelig middelværdi μ , så er

$$E[X_i | S_n] = S_n/n \quad \text{og} \quad E[S_n | X_i] = X_i + (n-1)\mu \quad P\text{-n.o.}$$

for alle $i = 1, \dots, n$, hvor $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

5) Lad $(X_{nj})_{1 \leq j \leq n}$ betegne et uafhængigt trekantsskema, så at

$$X_{nj} := \mathbf{1}_{A_{nj}} \quad 1 \leq j \leq n.$$

Da uafhængighed for hændelser og indikatorfunktioner er det samme, har vi altså

$$A_{n1}, \dots, A_{nn} \quad \text{uafhængige for alle } n \geq 1.$$

Antag

$$\sup_{1 \leq j \leq n} P(A_{nj}) \rightarrow 0 \quad \text{og} \quad \sum_{j=1}^n P(A_{nj}) \rightarrow \lambda > 0.$$

Vis at U_n -betegnelsen gælder, d.v.s.

$$\sup_{1 \leq j \leq n} P(|X_{nj}| > \epsilon) \rightarrow 0 \quad \text{for } \epsilon > 0,$$

men at *Raikov's*-betegnelse ikke gælder, d.v.s. der gælder ikke

$$\sum_{j=1}^n P(|X_{nj}| > \epsilon) \rightarrow 0 \quad \text{for } \epsilon > 0.$$

Vis at $U_n := \sum_{j=1}^n X_{nj} \xrightarrow{\text{d}} \text{po}(\lambda)$.

Vink: Udnyt kontinuitetssætningen samt formel (5.16.6). Resultatet kaldes ofte *De små tals lov*.

Aflæsningsopgave: Lad X og Y betegne stokastiske variable, så at Y er heltallig og $X \in L^1(P)$. Bestem en Borel funktion $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, så at

$$E[X | Y] = \varphi(Y) \quad P\text{-n.o.}$$

Antag X_1 og X_2 uafhængige og begge Poisson fordelte med parameter λ_1 og λ_2 . Beregn $E[X_1 | X_1 + X_2]$ og udnyt dette til at beregne

$$E\left[\frac{X_1}{X_1 + X_2 + 1}\right]$$

Øvrige meddelelser: Undervisningen er på grund af påsken aflyst fra og med den 16.4. til og med den 22.4.

Svend Erik Graversen

SS2, TD nr. 25

1)

$A, B \in \mathcal{A}$, $P(B) \in (0, 1)$, $E[1_A | B] := E[1_A | 1_B]$

Påstand: $E[1_A | B] = P(A|B)1_B + P(A|B^c)1_{B^c}$ n.o.

Beris:

$$\int_B E[1_A | B] dP = \int_B 1_B 1_A dP = P(A \cap B)$$

$$\int_{B^c} E[1_A | B] dP = \int_{B^c} 1_{B^c} 1_A dP = P(A \cap B^c)$$

$$\int_{\Omega} E[1_A | B] dP = P(A), \quad \int_{\emptyset} E[1_A | B] dP = 0$$

$$\int_B (P(A|B)1_B + P(A|B^c)1_{B^c}) dP = P(A|B)P(B) = P(A \cap B)$$

$$\int_{B^c} (P(A|B)1_B + P(A|B^c)1_{B^c}) dP = P(A|B^c)P(B^c) = P(A \cap B^c)$$

$$\int_{\Omega} (P(A|B)1_B + P(A|B^c)1_{B^c}) dP = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) = P(A)$$

$$\int_{\emptyset} (P(A|B)1_B + P(A|B^c)1_{B^c}) dP = 0$$

Det enskude følger af Proposition Bm 1, idet

$$P(A|B)1_B + P(A|B^c)1_{B^c} \in M(\mathcal{F}(1_B))$$

□

2)

Exc. 6.14

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ss-rum $X, Y \in L^1(P)$, $E[X] = E[Y]$

$\mathcal{H} \in \mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ (nf)-stabil, $\mathcal{G} := \sigma(\mathcal{H})$

Y $\mathcal{G}$ -målbilig, $\forall H \in \mathcal{H}$: $\int_H Y dP = \int_H X dP$

Påstand: $Y = E[X | \mathcal{G}]$

Beweis:

Sæt $\mu_1: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}_+$ $\mu_1(A) = \int_A (Y^+ + X^-) dP$, $A \in \mathcal{G}$

$\mu_2: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}_+$ $\mu_2(A) = \int_A (X^+ + Y^-) dP$, $A \in \mathcal{G}$

μ_1, μ_2 er veldef., da $X, Y \in L^1(P)$ og $\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega)$
da $E[X] = E[Y]$ j.f. lin. af int.

Lad $H \in \mathcal{H}$:

$$\int_H Y dP = \int_H X dP \Rightarrow \mu_1(H) = \mu_2(H)$$

Af proposition 2 følger, at $\mu_1 \equiv \mu_2$ da $\mathcal{H}$ er
nf-stabil og $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{H})$

Af dette følg, at $\int_A Y dP = \int_A X dP$, $A \in \mathcal{G}$

Af Proposition Bm 1 følg det ønskede

□

Exc. 6.15

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ss-rum, $X, Y \in L^1(P)$

$\mathcal{L}, \mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}$, $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ σ -alg.

$$\forall L \in \mathcal{L}, M \in \mathcal{M}: \int_{L \cap M} Y dP = \int_{L \cap M} X dP$$

Påstand: $E[X | \mathcal{G}] = E[Y | \mathcal{G}]$, $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{L} \cup \mathcal{M})$ n.o.

Bewis:

$$E[X] = \int_{\Omega \cap \Omega} X dP = \int_{\Omega \cap \Omega} Y dP = E[Y]$$

$\{L \cap M \mid L \in \mathcal{L}, M \in \mathcal{M}\}$ er $\cap$ -stabil, da $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ σ -alg., og indeholder $\mathcal{L}, \mathcal{M}$, og er indeholdt i $\sigma(\mathcal{L} \cup \mathcal{M})$, dus.

$$\sigma(\{L \cap M \mid L \in \mathcal{L}, M \in \mathcal{M}\}) = \sigma(\mathcal{L} \cup \mathcal{M})$$

Af Exc. 6.14 følger det ønskede.

□

Påstand: Bm 13 s. 156

Bewis:

$$A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}: \int_{A \cap B} X dP = \int_A X 1_B dP$$

$$\stackrel{\text{Tonelli-Fubini}}{=} P(B) \int_A X dP = P(B) \int_A E[X | \mathcal{A}] dP \stackrel{\text{Tonelli-Fubini}}{=} \int_{A \cap B} E[X | \mathcal{A}] dP$$

Dus jvf. Exc. 6.15: $E[X | \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})] = E[E[X | \mathcal{A}] | \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})]$

$$= E[X | \mathcal{A}], \text{ jvf. Bm 10 s. 156}$$

□

3)

Paßand: Bm2 s. 154 med >

Bevis:

Det er klart, at $P(E[X|U] \geq E[Y|U]) = 1$

$M := \{E[X|U] = E[Y|U]\} \in U \Rightarrow$

$$\int_M X dP = \int_M E[X|U] dP = \int_M E[Y|U] dP = \int_M Y dP$$

$$\Rightarrow \int_M (X - Y) dP = 0 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} P(M) = 1$$

Dvs. $P(E[X|U] > E[Y|U]) = 0$

□

4)

X, Y, Z s.v., $X \in L^1(P)$

$\varphi, \psi \in M(F)$

Paßand: For $(X, Y) \sim (X, Z)$ gælder, at

$$E[X|Y] = \varphi(Y) \text{ n.o.} \iff E[X|Z] = \psi(Z) \text{ n.o.}$$

Bevis:

$$(X, Y) \sim (X, Z) \Rightarrow Y \sim Z \quad (*)$$

$$\exists \varphi, \tilde{\varphi} \in M(F): E[X|Y] = \varphi(Y), E[X|Z] = \tilde{\varphi}(Z) \text{ n.o. jvf.}$$

Faktoriseringssætningen (Øksle 7 s. 21)

$$\forall B \in F: \int_B \varphi dP_Y = \int \varphi(Y) 1_B(Y) dP = \int X 1_B(Y) dP$$

$$\stackrel{(X,Y) \sim (X,Z)}{=} \int X 1_B(Z) dP = \int \tilde{\varphi}(Z) 1_B(Z) dP = \int_B \tilde{\varphi} dP_Z \stackrel{(*)}{=} \int_B \tilde{\varphi} dP_Y$$

$$\Rightarrow \varphi = \tilde{\varphi} \text{ jvf. prop. 5 s. 41}$$

□

Påstand: For $(X, \mathcal{F}) \sim (Z, \mathcal{F})$ gælder, at

$$E[X|\mathcal{F}] = \psi(\mathcal{F}) \text{ n.o.} \iff E[Z|\mathcal{F}] = \psi(\mathcal{F}) \text{ n.o.}$$

Bewis:

$$\exists \psi, \tilde{\psi} \in M(\mathcal{F}) : E[X|\mathcal{F}] = \psi(\mathcal{F}), E[Z|\mathcal{F}] = \tilde{\psi}(\mathcal{F}) \text{ n.o.}$$

$$(X, \mathcal{F}) \sim (Z, \mathcal{F})$$

$$\begin{aligned} \forall B \in \mathcal{F} : \int_B \psi \, dP_{\mathcal{F}} &= \int \psi(\mathcal{F}) 1_B(\mathcal{F}) \, dP = \int X 1_B(\mathcal{F}) \, dP \\ &\stackrel{(X, \mathcal{F}) \sim (Z, \mathcal{F})}{=} \int Z 1_B(\mathcal{F}) \, dP = \int \tilde{\psi}(\mathcal{F}) 1_B(\mathcal{F}) \, dP = \int_B \tilde{\psi} \, dP_{\mathcal{F}} \\ \Rightarrow \psi &= \tilde{\psi} \text{ n.o. juf. prop. 5 s. 41} \end{aligned}$$

□

$$X_1, \dots, X_n \text{ iid } E[X_i] = \mu, i=1, \dots, n$$

$$S_n := X_1 + \dots + X_n$$

$$\text{Påstand: } E[X_i | S_n] = S_n/n, E[S_n | X_i] = X_i + (n-1)\mu \text{ n.o. for } i=1, \dots, n$$

Bewis:

$$E[S_n | X_i] = E[S_n - X_i] + X_i = X_i + (n-1)\mu, i=1, \dots, n$$

$\begin{matrix} \text{Bem 12} \\ \text{+ Bem 10} \\ \text{s. 150} \end{matrix}$

$$S_n = E[S_n | S_n] \stackrel{\text{Bem 1 s. 154}}{=} \sum_{i=1}^n E[X_i | S_n] = E[X_i | S_n] n, i=1, \dots, n$$

$\uparrow$
 Juf. det ovenstående
 idet $X_1, \dots, X_n$ iid
 $\Rightarrow (X_i, S_n) \sim (X_j, S_n)$

□

5)

$(X_{nj})_{1 \leq j \leq n}$ uafh. triantskema, $X_{nj} := 1_{A_{nj}}$, $1 \leq j \leq n$

Dvs. $A_{n1}, \dots, A_{nn}$ uafh. $n \geq 1$

Antag $\sup_{1 \leq j \leq n} P(A_{nj}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $\sum_{j=1}^n P(A_{nj}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda > 0$

Påstand:

Van-betingelsen er opfyldt, dvs.

$$\forall \varepsilon > 0: \sup_{1 \leq j \leq n} P(|X_{nj}| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Bevis:

Lad $\varepsilon > 0$ være vilk.

Antag $1 > \varepsilon$ (uden tab af generalitet $P(|X| > r_1) \leq P(|X| > r_2)$, $r_1 \geq r_2$)

$$\sup_{1 \leq j \leq n} P(|X_{nj}| > \varepsilon) = \sup_{1 \leq j \leq n} P(A_{nj}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

Påstand:

Raikovs-betingelse gælder ikke, dvs. der gælder ikke, at

$$\sum_{j=1}^n P(|X_{nj}| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \varepsilon > 0$$

Bevis:

Vælg $\varepsilon = 1/2$:

$$\sum_{j=1}^n P(|X_{nj}| > \varepsilon) = \sum_{j=1}^n P(A_{nj}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda > 0$$

□

Påstand: $U_n := \sum_{j=1}^n X_{nj}$, $U_n \xrightarrow{d} \text{po}(\lambda)$

Beris:

$$\varphi_{X_i}(t) = E[e^{itX_i}] = P(A_{ni}) e^{it} + P(A_{ni}^c) = 1 + P(A_{ni})(e^{it} - 1)$$

$\Downarrow$

$$\varphi_{U_n}(t) = \prod_{i=1}^n (1 + P(A_{ni})(e^{it} - 1))$$

KfS
S. 103

Sæt $a_{ni} = 1 + P(A_{ni})(e^{it} - 1)$, $b_{ni} = 0$, $1 \leq i \leq n$

$$\sum_{i=1}^n |a_{ni} - 1|^2 = (e^{it} - 1)^2 \sum_{i=1}^n P(A_{ni})^2 \leq (e^{it} - 1)^2 \left(\sum_{i=1}^n P(A_{ni}) \right) \sup_{1 \leq i \leq n} P(A_{ni}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\sum_{i=1}^n (a_{ni} - 1 - b_{ni}) = (e^{it} - 1) \sum_{i=1}^n P(A_{ni}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda(e^{it} - 1)$$

Af 5.16.6 følger, at $\varphi_{U_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{\lambda(e^{it} - 1)}$

Af Kont. sætn. S. 140 + VS 15 opg. 2b følger det ønskede

□

SS2, aflæringsopgave nr. 24, Gunnar Hellebrand.

X, Y s.v., $Y \in \mathbb{Z}$, $X \in L^1(P)$

Jf. Faktoriseringssætn. (87 s. 21) $\exists \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (bælmålelig) s.d.
 $\varphi(Y) = E[X | Y]$

Påstand: $\varphi(Y) = \sum_{n \geq 1} a_n \cdot 1_{\{Y=y_n\}}$, $a_n := \frac{1}{P(Y=y_n)} E[X 1_{\{Y=y_n\}}]$, $n \geq 1$

hvor $P(Y \in \{y_n\}) = 1$, $P(Y=y_n) > 0$, $n \geq 1$

Beris:

Påstanden er en direkte konsekvens af Bm 19 s. 159:

Beris for Bm 19:

Det er klart, at φ er $\sigma(Y)$ -målelig og int. da $E[|\varphi(X, Y)|] < \infty$

Af Lebesgues sætn. om dom. konv. + lin. af int. følger $\forall A \in \sigma(Y)$:

$$\begin{aligned} \int_A \varphi dP &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P(Y=y_n)} \int_{\{Y=y_n\} \cap A} \varphi(X, y_n) dP \cdot \int_A 1_{\{Y=y_n\}} dP \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{Y=y_n\} \cap A} \varphi(X, y_n) dP = \int_A \varphi(X, Y) dP \end{aligned}$$

Af Proposition Bm 1 s. 153 følger det ønskede

□

X_1, X_2 s.v., $X_1 \sim \text{po}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \text{po}(\lambda_2)$

Jf. us 15 opg. 2: $X_1 + X_2 \sim \text{po}(\lambda_1 + \lambda_2)$

$$P(X_1 + X_2 = n) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!}$$

$$E[X_1 1_{\{X_1 + X_2 = n\}}] = \sum_{i=0}^n i P(\{X_1 = i\} \cap \{X_1 + X_2 = n\})$$

$$= \sum_{i=0}^n i P(\{X_1=i\} \cap \{X_2=n-i\}) = \sum_{\substack{X_1+X_2=n \\ i \geq 0}} i P(X_1=i) P(X_2=n-i)$$

$$= \sum_{i=0}^n i e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-i}}{(n-i)!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(i-1)!(n-i)!} \lambda_1^i \lambda_2^{n-i}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!(n-i)!} \lambda_1^{i+1} \lambda_2^{n-i-1} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{\lambda_1}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \lambda_1^i \lambda_2^{n-1-i}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{\lambda_1}{(n-1)!} (\lambda_1+\lambda_2)^{n-1}$$

$$E[X_1 | \{X_1+X_2=n\}] / P(X_1+X_2=n) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} n$$

$$\text{Dus. } E[X_1 | X_1+X_2] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} n 1_{\{X_1+X_2=n\}}$$

$$E[X_1 | X_1+X_2] = E[(X_1+X_2+1) \frac{X_1}{X_1+X_2+1} | X_1+X_2]$$

$$= (X_1+X_2+1) E[\frac{X_1}{X_1+X_2+1} | X_1+X_2]$$

Bm II
S. 156

$\Downarrow$

$$E[\frac{X_1}{X_1+X_2+1}] = E[\frac{E[X_1 | X_1+X_2]}{X_1+X_2+1}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} n e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}$$

$$= \frac{\lambda_1}{(\lambda_1+\lambda_2)^2} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (*)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}$$

$$= e^{\lambda_1+\lambda_2} E[X_1+X_2] + 1 - e^{\lambda_1+\lambda_2} = (\lambda_1+\lambda_2 - 1 + e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}) e^{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$\text{Dus. } (*) = \frac{\lambda_1}{(\lambda_1+\lambda_2)^2} (\lambda_1+\lambda_2 - 1 + e^{-(\lambda_1+\lambda_2)})$$

Sandsynlighedsteori 2

Uge 15.

Forelæsninger: Vi arbejder videre med kapitel 6, sektionerne 6.1 til og med 6.11, dog med overspringelse af sektionerne 6.3, 6.5 og 6.6. De angivne resultater er ikke alle lige væsentlige for os, og jeg har i noterne fremhævet de egenskaber, som jeg mener, I især bør koncentrere jer om. Læg mærke til at noterne kun beskæftiger sig med variable i $L^1(P)$, hvorimod bogen tillader, at de ligger i $L(P)$.

Øvelser: 1) Exc. 5.31, 5.33 og 5.35.

2) Exc. 5.38 og 5.39.

3) Lad $(a_n)_{n \geq 1}$ betegne en reel talfølge. Vis f.eks. ved brug af kontinuitetssætningen, at flg. udsagn er ækvivalente

a) $\lim_n a_n$ eksisterer i $\mathbf{R}$.

b) $f(t) := \lim_n e^{ia_n t}$ eksisterer for alle t i en omegn omkring 0, og f er kontinuert i 0.

4) Exc. 6.1.

Afleveringsopgave: Exc. 5.37.

Øvrige meddelelser: Ingen.

Svend Erik Graversen

SS2, TØ nr. 24

1)

Exc. 5.31

$(X_n) \subseteq L^3(P)$ uafh. s.v. $\mu_n = E[X_n]$, $\sigma_n^2 = \text{Var}(X_n)$

$S_n := \sqrt{\text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n)}$, $0 < a_1 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$:

$E[|X_n|^3] \leq a_n \sigma_n^2$, $n \geq 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n S_n^{-1} = 0$

Påstand: $E[|X_n - \mu_n|^3] \leq 8 a_n \sigma_n^2$, $n \geq 1$

Bevis:

Da $\varphi(t) = |t|^p$ er konvekse og dermed gælder, at
 $t_1 = x$, $t_2 = -y$: $\varphi((x-y)/2) = \frac{1}{2^p} |x-y|^p \leq \frac{1}{2} (|x|^p + |y|^p)$
 $= \frac{1}{2} (\varphi(x) + \varphi(y)) \Rightarrow |x-y|^p \leq 2^{p-1} (|x|^p + |y|^p)$

Da int. er uafhængige for $p=3$:

$$\begin{aligned} E[|X_n - \mu_n|^3] &\leq 2^2 (E[|X_n|^3] + |\mu_n|^3) \\ &= 2^2 (E[|X_n|^3] + |E[X_n]|^3) \stackrel{\text{Kovler s. 44 n}}{\leq} 2^2 (E[|X_n|^3] + E[|X_n|^3]) \\ &= 2^3 E[|X_n|^3] \leq 8 a_n \sigma_n^2 \end{aligned}$$

□

Påstand: $\frac{1}{S_n} \sum_{j=1}^n (X_j - \mu_j) \xrightarrow{d} N(0,1)$

Bevis:

$$\frac{1}{S_n^3} \sum_{j=1}^n E[|X_j - \mu_j|^3] \leq \frac{8 a_n S_n^2}{S_n^3} = 8 \frac{a_n}{S_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Det ønskede følger derfor af Lyapounovs Sætning s. 144

□

Exc. 5.33

$(X_n) \subseteq L^4(P)$ uafh. s.v. $\mu_n = E[X_n]$, $\text{Var}(X_n) = 1$, $n \geq 1$

$(a_n) \subseteq \mathbb{R}$, $T_n := \frac{1}{S_n} \sum_{j=1}^n a_j (X_j - \mu_j)$, $S_n := \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$, $n \geq 1$

Antag $\exists C \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$: $E[|X_n|^4] \leq C$, $n \geq 1$

Påstand: $E[|X_j - \mu_j|^4] \leq 16C$, $j \geq 1$

Beris:

Som i Exc. 5.31 følger (jvf. Exc. 4.57)

$$E[|X_j - \mu_j|^4] \leq 2^4 E[|X_j|^4] \leq 16C$$

□

Påstand: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{-4} \sum_{j=1}^n a_j^4 = 0 \Rightarrow T_n \Rightarrow N(0,1)$

Beris:

$$S_n^{-4} \sum_{j=1}^n E[|a_j X_j - a_j \mu_j|^4] \leq S_n^{-4} 16C \sum_{j=1}^n a_j^4 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Det ønskede følger dermed direkte af Lyapounovs sætn.

s. 144

□

Exc. 5.35

(X_n) uafh. s.v. $X_n \sim U(-n^\beta, n^\beta)$, $n \geq 1$ $\beta > 0$

$$S_n := \sqrt{\frac{1}{3}(1^{2\beta} + 2^{2\beta} + \dots + n^{2\beta})}, \quad n \geq 1$$

Påstand: $\frac{1}{S_n} \sum_{j=1}^n X_j \Rightarrow N(0,1)$

Beris:

Juf. Exc. 4.67 (US 19 opg. 2) : $E[X_n] = 0$, $E[|X_n|^q] = \frac{n^{\beta q}}{1+q}$

$q > 0$, dvs.

Lad $q > 2$

$$S_n^{-q} \sum_{j=1}^n E[|X_j - M_j|^q] = S_n^{-q} \sum_{j=1}^n \frac{j^{q\beta}}{1+q} = \frac{1}{4} S_n^{-q} \sum_{j=1}^n j^{q\beta} \quad (*)$$

Juf. US 16 gælder $\sum_{j=1}^n j^q \leq C_q n^{q+1}$, hvilket vi ser ved at betragte et passende integral med en tilhørende undersum, tilsvarende ses, at $C_q n^{q+1} \leq \sum_{j=1}^n j^q$.
Dermed er $(*) \leq \frac{1}{4} (C_q \frac{1}{3} n^{2\beta+1})^{-q/2} n^{q\beta+1} \leq K n^{1-q/2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Det ønskede følger dermed af Lyapounovs sætn. s. 144

□

2)

Exc. 5.38

(ε_n) iid $P(\varepsilon_n=1)=P(\varepsilon_n=-1)=\frac{1}{2}$, $n \geq 1$

Påstand: $0 < q < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n j^q \varepsilon_j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ n.o.

Beweis:

$$\text{Var}(j^q \varepsilon_j) = j^{2q}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}(n^q \varepsilon_n) / n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2(1-q)} < \infty, \quad 0 < q < 1/2$$

Det ønskede følger dermed af De Store Tals lov s. 11. $\square$

Påstand: $q > 1/2 \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} j^{-q} \varepsilon_j$ summabel n.o.

Beweis:

$$\text{Var}(j^{-q} \varepsilon_j) = j^{-2q}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2q} < \infty, \quad q > 1/2$$

Jf. lemma 13 er $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-q} \varepsilon_n$ konvergent i $L^2(P)$

og det ønskede følger af korollaret s. 113 $\square$

Påstand: $q > 0 \Rightarrow S_n^{-1} \sum_{j=1}^n j^q \varepsilon_j \Rightarrow N(0,1)$, $S_n = \sqrt{1^{2q} + \dots + n^{2q}}$

Beweis:

$\alpha > 2$:

$$S_n^{-\alpha} \sum_{j=1}^n E[|X_j - E[X_j]|^{\alpha}] = S_n^{-\alpha} \sum_{j=1}^n j^{\alpha q} \leq K n^{-\alpha(2q+1)/2 + \alpha q + 1} = K n^{1-\alpha/2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Jf. uligheden $C_{\alpha} n^{p+1} \leq \sum_{j=1}^n j^p \leq C_{\alpha} n^{p+1}$ (brugt et passende integral med under/over sum)

Dermed følger det ønskede af Lyapounovs sætn. s. 144 $\square$

Exc. 5.39

(X_n) iid med tæthed mht λ_1 : $f(x) = \frac{1}{2}|x|^{-2} 1_{\{|x| \leq 1\}}$

$(c_n) \subseteq \mathbb{R}_+$ $c_n \geq 2$, $n \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{n} = 0$

$$X_{nj} := X_j 1_{\{|X_j| \leq c_n\}}$$

Påstand: $E[|X_n|] = \infty$, $E[X_{nj}] = 0$

$$E[X_{nj}^2] = c_n - 1, \quad E[|X_{nj}|^3] = \frac{1}{2}(c_n^2 - 1)$$

Beweis:

$$E[|X_n|] = \int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \infty, \quad E[X_{nj}] = 0 \text{ (da } f \text{ er lige)}$$

$$E[X_{nj}^2] = \int_1^{c_n} dx = c_n - 1, \quad E[|X_{nj}|^3] = \int_1^{c_n} x dx = \frac{1}{2}(c_n^2 - 1)$$

□

Påstand: $\frac{1}{\sqrt{n(c_n-1)}} \sum_{j=1}^n X_{nj} \Rightarrow N(0,1)$

Beweis:

$$\sqrt{\text{Var}(X_{n1}) + \dots + \text{Var}(X_{nn})} = \sqrt{n(c_n-1)} =: S_n$$

$$S_n^{-3} \sum_{j=1}^n E[|X_{nj} - E[X_{nj}]|^3] = S_n^{-3} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2}(c_n^2 - 1) = (n(c_n-1))^{-3/2} \frac{n}{2}(c_n^2 - 1)$$

$$= n^{-1/2} (c_n-1)^{-3/2} (c_n^2 - 1) = n^{-1/2 - 3/2 + 2} \left(\frac{c_n}{n} - \frac{1}{n}\right) \left(\left(\frac{c_n}{n}\right)^2 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \left(\frac{c_n}{n} - \frac{1}{n}\right) \left(\left(\frac{c_n}{n}\right)^2 - \frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ da } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{n} = 0$$

Det ønskede følger dermed af Lyapounovs Sætning, s. 144

□

3)

$$(a_n) \subseteq \mathbb{R}$$

Påstand: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ eksisterer i $\mathbb{R}$

$$\iff f(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} e^{i a_n t} \text{ eksisterer for alle } t \text{ i en omegn omkring } 0, \text{ og for kont. i } 0.$$

Basis:

$\Rightarrow$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R} \Rightarrow a_n \xrightarrow{P} a \quad (\text{prop. 10 s. 52})$$

$$\Rightarrow a_n \rightrightarrows a \quad (\text{Fk 4 s. 129})$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{a_n}(t) = e^{i t a_n} = \varphi_a(t) = e^{i t a} \quad \text{jvf. bm. s. 140, still}$$

$$\Rightarrow \text{Dvs. } f(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} e^{i a_n t} \text{ eksisterer for alle } t \text{ i en omegn omkring } 0, \text{ og for kont. i } 0.$$

$\Leftarrow$:

$$f(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} e^{i a_n t} \text{ eksisterer for alle } t \text{ i en omegn omkring } 0$$

$$\Rightarrow f(t) \text{ er veldef. for alle } t \in \mathbb{R} \quad (x \mapsto x^q, q > 0 \text{ er kont. p. } \mathbb{R} \text{ og } (e^{i a_n t})^q = e^{i a_n q t})$$

Da $f(t)$ er kont. i 0 følger af kontinuitætssetn. s. 140, at $\exists \mu$ ss. mål, (a_n) er stram

$$\text{Da } (a_n) \text{ er stram } \exists K > 0, |a_n| \leq K, n \geq 1$$

$$\text{Idet } \forall r > 0: P(|a_n| > r) \in [0, 1] \text{ og jvf. bm. s. 137,}$$

Da gælder jvf. def. s. 128n, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} E[a_n^+ \wedge K - a_n^- \wedge K] = \int x 1_{\{|x| \leq K\}} d\mu =: a$$

□

4)

Exc. 6.1

$$(X_n) \subseteq L^1(P), \text{ uafh. } \mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$$

$$\text{Påstand: } E\left(\sum_{i=1}^k X_i \mid \mathcal{F}_n\right) = \sum_{j=1}^n X_j + \sum_{i=n+1}^k E[X_i], \quad k > n$$

Bewis:

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^k X_i \mid \mathcal{F}_n\right) &= E\left(\sum_{j=1}^n X_j \mid \mathcal{F}_n\right) + E\left(\sum_{i=n+1}^k X_i \mid \mathcal{F}_n\right) \\ &\stackrel{\substack{\text{Bm 1} \\ \text{s. 154}}}{=} \sum_{j=1}^n X_j + E\left(\sum_{i=n+1}^k X_i \mid \mathcal{F}_n\right) \stackrel{\substack{\text{Bm 12} \\ \text{s. 156}}}{=} \sum_{j=1}^n X_j + \sum_{i=n+1}^k E[X_i] \quad \square \end{aligned}$$

$$\text{Påstand: } E\left(\prod_{j=1}^k X_j \mid \mathcal{F}_n\right) = \left(\prod_{j=1}^n X_j\right) \left(\prod_{i=n+1}^k E[X_i]\right), \quad k > n$$

Bewis:

$$\begin{aligned} E\left(\prod_{j=1}^k X_j \mid \mathcal{F}_n\right) &\stackrel{\substack{\text{Bm 11} \\ \text{s. 156}}}{=} \left(\prod_{j=1}^n X_j\right) E\left(\prod_{i=n+1}^k X_i \mid \mathcal{F}_n\right) \\ &\stackrel{\substack{\text{Bm 12} \\ \text{s. 156}}}{=} \left(\prod_{j=1}^n X_j\right) E\left[\prod_{i=n+1}^k X_i\right] \stackrel{\substack{\text{Tonelli-Fubini} \\ \text{uafh.}}}{=} \left(\prod_{j=1}^n X_j\right) \left(\prod_{i=n+1}^k E[X_i]\right) \quad \square \end{aligned}$$

Påstand:

$$\text{Antag } (X_n) \subseteq L^2(P) \quad \sigma_n^2 = \text{Var}(X_n), \quad n \geq 1$$

$$E\left(\left(\sum_{j=1}^k (X_j - E[X_j])\right)^2 \mid \mathcal{F}_n\right) = \left(\sum_{j=1}^n (X_j - E[X_j])\right)^2 + \sum_{i=n+1}^k \sigma_i^2, \quad k > n$$

Bewis:

$$\begin{aligned} E\left(\left(\sum_{j=1}^k (X_j - E[X_j])\right)^2 \mid \mathcal{F}_n\right) &= E\left(\left(\sum_{j=1}^n (X_j - E[X_j])\right)^2 + \left(\sum_{i=n+1}^k (X_i - E[X_i])\right)^2\right. \\ &\quad \left.+ 2\left(\sum_{j=1}^n (X_j - E[X_j])\right)\left(\sum_{i=n+1}^k (X_i - E[X_i])\right) \mid \mathcal{F}_n\right) \\ &\stackrel{\substack{\text{Bm 10} \\ \text{Bm 12} \\ \text{Bm 11} \\ \text{s. 156}}}{=} \left(\sum_{j=1}^n (X_j - E[X_j])\right)^2 + E\left[\left(\sum_{i=n+1}^k (X_i - E[X_i])\right)^2\right] + 2\left(\sum_{j=1}^n (X_j - E[X_j])\right) E\left[\sum_{i=n+1}^k (X_i - E[X_i])\right] \\ &= \left(\sum_{j=1}^n (X_j - E[X_j])\right)^2 + \sum_{i=n+1}^k \sigma_i^2, \quad \text{da } E[X_i - E[X_i]] = 0 + \text{Tonelli-Fubini uafh.} \quad \square \end{aligned}$$

SS2, afløeringsopgave nr. 24, Gunnar Hellmund

Exc. 5.37

(X_n) iid med tæthed mht λ , f

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \infty$$

$$f(x) = f(-x) \leq C|x|^{-3}, \quad x \neq 0 \quad 0 < C < \infty$$

$$\beta_n := \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} x^2 f(x) dx, \quad X_{nj} = X_j 1_{\{|X_j| \leq \sqrt{n}\}}$$

$$U_n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j, \quad V_n := \frac{1}{\sqrt{n\beta_n}} \sum_{j=1}^n X_{nj}, \quad n \geq 1$$

Påstand: $E[X_n] = 0, E[X_n^2] = \infty, n \geq 1$

Beris: f lige $\Rightarrow E[X_n] = 0, E[X_n^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \infty \quad \square$

Påstand: $E[X_{nj}] = 0, E[X_{nj}^2] = \beta_n, E[|X_{nj}|^3] \leq 2C\sqrt{n}, n, j \geq 1$

Beris:

$$E[X_{nj}] = \int X_j 1_{\{|X_j| \leq \sqrt{n}\}} dP = 0, \text{ da } f \text{ lige}$$

$$E[X_{nj}^2] = \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} x^2 f(x) dx = \beta_n$$

$$E[|X_{nj}|^3] = \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} |x|^3 f(x) dx = 2 \int_0^{\sqrt{n}} x^3 f(x) dx \leq 2\sqrt{n} C \quad \square$$

Påstand: $U_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ n.o., $V_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0,1), \frac{V_n}{1+U_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0,1)$

Beris:

$U_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ n.o. jvf. Kolmogorovs Store Tals Lov s. 112

$$\text{Idet } \sqrt{\text{Var}(X_{n1}) + \dots + \text{Var}(X_{nn})} = \sqrt{n\beta_n} := s_n$$

$$\frac{1}{s_n^3} \sum_{i=1}^n E[|X_{ni} - E[X_{ni}]|^3] \leq \frac{1}{s_n^3} 2Cn\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n\beta_n}} 2C \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ idet}$$

$\beta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, jvf sætn. om monoton konvergens

Af Lyapounovs Sætn. s. 144 følger, at $V_n \Rightarrow N(0,1)$

Da 1 kan opfattes som en degenerent s.v. følger af Portmanteau Sætn. II s. 139 at $\frac{V_n}{1+U_n} \Rightarrow N(0,1)$

□

Sandsynlighedsteori 2

Uge 14.

Forelæsninger: Vi afslutter kapitel 5 og går dernæst i gang med emnet *betingede middelværdier*, som står omtalt i kapitel 6, og hvortil der er udleveret supplerende noter.

Vi har i store træk gennemført den på ugesedlen til Uge 10 beskrevne plan for gennemgangen af kapitel 5. D.v.s. først sektionerne 5.1, 5.3(2), 5.4, 5.9 og 5.2, hvor 5.3(2) blev gennemgået ifølge det udleverede ark og udgjorde det, vi skal kunne fra sektionerne 5.2 og 5.3. Ligeledes behandlede vi den del af sektion 5.1, som står indtil side 356 linie 12 fra neden. Dernæst 5.5, 5.6, 5.7, 5.8 og 5.10 udelukkende efter de udleverede noter, og til sidst sektionerne 5.16 og 5.21 – 5.23, hvor der er blevet udleveret noter til 5.16 og 5.22. Vi skal her kende den klassiske CLT, d.v.s. (5.16.7) med bevis, Lyapounov's CLT med bevis samt Lindeberg's CLT dog uden bevis. Visse af de øvrige sektioner er behandlet ved øvelserne. 5.26 overlades til selvstudium.

Øvelser: I opgave 1), 2) og 3) betegner $(X_k)_{k \geq 1}$ en følge af reelle stokastiske variable.

1) Antag $X_k \sim bi(n_k, p_k)$ for alle $k \geq 1$ samt at $\lim_k n_k \cdot p_k = \lambda > 0$. Vis at $(X_k)_{k \geq 1}$ konvergerer i fordeling og bestem grænsfordelingen.

Vink: Benyt Kontinuitetssætningen.

2) Antag $X_k \sim po(\lambda_k)$ for alle $k \geq 1$ samt at $\lim_k \lambda_k = \infty$. Vis at

$$(X_k - \lambda_k) / \sqrt{\lambda_k} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

Vink. Benyt Kontinuitetssætningen samt at

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{ix} - 1 - ix) / x^2 = -1/2.$$

Vis endvidere ved hjælp af opgave 4(d) fra sidste ugeseddel, at

$$\lim_k |P(X_k \leq x) - \Phi((x - \lambda_k) / \sqrt{\lambda_k})| = 0$$

uniformt for $x \in \mathbf{R}$. Φ er her fordelingsfunktionen for en $N(0, 1)$ -fordeling.

3) Antag at $P(0 \leq X_k \leq 1) = 1$ for alle k samt at $\lim_k E[X_k^n]$ eksisterer for alle $n \geq 1$. Vis at $(X_k)_{k \geq 1}$ konvergerer i fordeling.

Vink: Se på antallet af eventuelle linespunkter.

4) Exc. 4.78 og 5.42.

5) Exc. 5.34.

Afleveringsopgave: Exc. 5.36.

Øvrige meddelelser: Bemærkning til opgave 4) på ugesedlen til Uge 12.

Hvis $(X_n)_{n \geq 1}$ er en iid-følge, er der op til linear transformation kun fire mulige typer grænsfordelinger for variable af formen

$$a_n(M_n - b_n) \quad \text{hvor } a_n > 0, \quad b_n \in \mathbf{R} \quad \text{og } M_n := \max_{1 \leq k \leq n} X_k.$$

Den ene type er de degenererede fordelinger, d.v.s. fordelinger der er koncentreret i et punkt. De tre øvrige er i h.t. udseendet af den tilhørende fordelingsfunktion G specificeret ved:

Type I. $G(x) = \exp(-e^{-x})$.

Type II. $G(x) = \exp(-x^{-\alpha}) \cdot \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x)$ for et $\alpha > 0$.

Type III. $G(x) = \exp(-(-x)^\alpha) \cdot \mathbf{1}_{(-\infty, 0)}(x) + \mathbf{1}_{[0, \infty)}(x)$ for et $\alpha > 0$.

Svend Erik Graversen

SS2, TØ nr. 23

(X_k) reelle s.v.

1)

$X_k \sim \text{bi}(n_k, p_k)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k p_k = \lambda > 0$ ($\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$)

$$\varphi_{X_k}(t) = (1 + p_k(e^{it} - 1))^{n_k} ,$$

US nr. 15
opg. 2a

$$|p_k - \frac{\lambda}{n_k}| = \frac{1}{n_k} |p_k n_k - \lambda| , \text{ dvs. } p_k = \frac{\lambda}{n_k} + o(n_k)$$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{X_k}(t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + p_k(e^{it} - 1))^{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + \frac{(\lambda + o(1))(e^{it} - 1)}{n_k})^{n_k} \\ &= e^{\lambda(e^{it} - 1)} \end{aligned}$$

Jef. Kontinuitetssætn. s. 140 og US 15 opg. 2b gælder
 $X_k \Rightarrow \text{po}(\lambda)$

2)

$X_k \sim \text{po}(\lambda_k)$, $k \geq 1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$

Påstand: $(X_k - \lambda_k) / \sqrt{\lambda_k} \Rightarrow N(0, 1)$

Beris:

$$\begin{aligned} \varphi_{(X_k - \lambda_k) / \sqrt{\lambda_k}}(t) &= \overset{\text{KF3 s. 103}}{e^{it\sqrt{\lambda_k}}} \varphi_{X_k}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k}}\right) = \overset{\text{US 15 opg. 2b}}{e^{it\sqrt{\lambda_k}}} e^{\lambda_k(e^{it/\sqrt{\lambda_k}} - 1)} \\ &= e^{\lambda_k e^{it/\sqrt{\lambda_k}} - it\sqrt{\lambda_k} - \lambda_k} = e^{t^2(e^{it/\sqrt{\lambda_k}} - it/\sqrt{\lambda_k} - 1)/(t/\sqrt{\lambda_k})^2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \end{aligned}$$

idet $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{ix} - 1 - ix)/x^2 = -1/2$, det ønskede

følger derfor af Kontinuitetssætn. s. 140 og US 15 opg. 2c

□

3)

Antag $P(0 \leq X_k \leq 1) = 1$, $k \geq 1$ (*)

og $\lim_{k \rightarrow \infty} E[X_k^n]$ eksisterer for alle $n \geq 1$ (Sæt $\lim_{k \rightarrow \infty} E[X_k^n] = M_n$).

Påstand: (X_k) konvergerer i fordeling

Beweis:

Det er klart, at (X_k) er sluttet, jvf. bm s. 137, idet
 $\sup_k E[X_k^n] < \infty$, $n \geq 1$

Af Helly-Bray Sætn. s. 138 følger, at (X_k) har mindst
et limespkt.

Lad $(X_{k_{n_1}})$, $(X_{k_{n_2}})$ være to delfølge, således at
 $X_{k_{n_1}} \rightharpoonup \mu_1$, $X_{k_{n_2}} \rightharpoonup \mu_2$

Jvf. (*) er $X_k = X_k \cdot 1$ n.o. $k \geq 1$, dvs.
jvf. def. s. 128n gælder, at

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[X_{k_{n_1}}^n] = \lim_{k \rightarrow \infty} E[X_k^n] = M_n = \lim_{k \rightarrow \infty} E[X_{k_{n_2}}^n]$$

$$\text{og } M_n = \int x^n d\mu_1 = \int x^n d\mu_2, \quad n \geq 1$$

Pga. (*) er det klart, at $M_n \leq 1$, $n \geq 1$ af
bm. s. 107m følger (med $c=1$) at $\mu_1 = \mu_2$

□

4)

Exc. 4.78

(X_n) følge af uafh. s.v. $X_n \sim b(1, p_n)$, $0 < p_n < 1$
 $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$

(i)

$E[X_n] = p_n$, $\text{Var}(X_n) = p_n(1-p_n)$ (da $X_n \sim b(1, p_n)$)

(ii)

Påstand: $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-2} a_j^2 < \infty \implies \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j (X_j - p_j) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ n.o.

Beris:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}(a_n X_n) / n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 p_n(1-p_n) / n^2 < \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 / j^2 < \infty$$

Af De Store Tals lov (s. 118) følger at

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j (X_j - p_j) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{n.o.}$$

□

(iii)

Påstand: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n p_j = q \implies \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} q$ n.o.

Beris:

Sæt $a_j \equiv 1$, jvf. det ovenstående ses, at

$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - p_j) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, idet $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n p_j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} q$ følger af regnearbejde for konvergente følger, at

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - p_j) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n p_j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} q$$

□

Exc. 5.42

(X_n) følge af uafh. s.v. $X_n \sim \text{bi}(1, p_n)$, $0 < p_n < 1$

Påstand: $\sum_{j=1}^{\infty} p_j(1-p_j) = \infty \Rightarrow s_n^{-1} \sum_{j=1}^n (X_j - p_j) \Rightarrow N(0,1)$,

$$\text{hvor } s_n := \sqrt{\sum_{j=1}^n p_j(1-p_j)}, \quad n \geq 1$$

Beris:

$\forall n \geq 1: |X_n - p_n| \leq 1$, det enskede følger derfor af b.m. på s. 144m for Lyapounovs sætn., idet

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_j(1-p_j) = \infty \Rightarrow s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

□

5)

Exc. 5.34

$(X_n) \subseteq L^4(P)$ uafh. s.v., $E[X_n] = 0$, $\text{Var}(X_n) = \sigma^2 > 0$
 $E[|X_n|^4] \leq C\sqrt{n}$, $n \geq 1$, $0 < C < \infty$

$$S_n := \sum_{j=1}^n X_j, \quad V_n := \sum_{j=1}^n X_j^2$$

Påstand: $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow N(0, \sigma^2)$, $\frac{S_n}{\sqrt{V_n}} \Rightarrow N(0, 1)$

Beweis:

Sæt $s_n := \sqrt{\text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n)} = \sqrt{n} \sigma$

Vi ser $\frac{1}{s_n^4} \sum_{i=1}^n E[|X_i - E[X_i]|^4] \leq \frac{1}{\sigma^4 n^2} \sum_{i=1}^n C\sqrt{n} = \frac{1}{\sigma^4 \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Af Lyapounov's sætning følger, at

$$\sigma^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} S_n \Rightarrow N(0, 1) \xrightarrow{\text{sætning 134}} \frac{1}{\sqrt{n}} S_n \Rightarrow N(0, \sigma^2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}(X_n^2) / n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(E[X_n^4] - E[X_n^2]^2)}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C\sqrt{n}}{n^2} = C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$$

Af De Større Tals lov. s. 118, følger, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} V_n = \sigma^2, \text{ af sætn. s. 134 følger, at}$$

$$\frac{S_n}{\sqrt{V_n}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} S_n}{\sqrt{\frac{1}{n} V_n}} \Rightarrow N(0, 1)$$

□

SS2, afløringsopgave nr. 23, Gunna Hellmund

Exc. 5.36

(X_n) iid. med tæthed mht. λ , $f(x) = \frac{a}{2} |x|^{a-1} 1_{\{|x| \leq 1\}}$

$a > 0$, lad $(b_n) \subseteq \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$: $\sum_{j=1}^{\infty} b_j^2 = \infty$, $\sum_{j=1}^{\infty} b_j^q < \infty$, for et $q > 2$

Påstand: $\frac{1}{S_n} \sum_{j=1}^n b_j X_j \Rightarrow N(0, \frac{a}{a+2})$, $S_n := \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}$

Beweis:

Juf. Exc. 4.68 (afløringsopgave nr. 18) er

$$\text{Var}(b_j X_j) = b_j^2 \frac{a}{a+2}, \quad E[|b_j X_j|^q] = b_j^q \frac{a}{a+q}$$

$$\tilde{S}_n := \sqrt{\text{Var}(b_1 X_1) + \dots + \text{Var}(b_n X_n)} = \sqrt{\frac{a}{a+2}} S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \text{ da } \sum_{j=1}^{\infty} b_j^2 = \infty.$$

$$\frac{1}{\tilde{S}_n^q} \sum_{j=1}^n E[|X_j|^q] = \frac{1}{\tilde{S}_n^q} \sum_{j=1}^n b_j^q \frac{a}{a+q} \leq \frac{a}{a+q} \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j^q \right) \frac{1}{\tilde{S}_n^q} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Da } \sum_{j=1}^{\infty} b_j^q < \infty$$

Da $q > 2$ følger af Lyapounovs Sætn. s. 144, at

$\frac{1}{S_n} \sum_{j=1}^n X_j \Rightarrow N(0, 1)$, da $\tilde{S}_n = \sqrt{\frac{a}{a+2}} S_n$ følger det ønskede derfor af sætn. s. 134.

□

Sandsynlighedsteori 2

Uge 13.

Forelæsninger: Endnu en uge med kapitel 5.

Øvelser: 1) $(X_k)_{k \geq 1}$ betegne reelle stokastiske variable, så at $X_k \xrightarrow{\sim} N(0, 1)$. Gør rede for at $(X_k^2)_{k \geq 1}$ konvergerer i fordeling. Bestem grænsefordelingen.
2) Lad $(X_k)_{k \geq 1}$, $(Y_k)_{k \geq 1}$ og X betegne n -dimensionale stokastiske vektorer, så at $Y_k \rightarrow 0$ i sandsynlighed. Vis ved hjælp af sektion 5.4 at

$$X_k \xrightarrow{\sim} X \Leftrightarrow X_k + Y_k \xrightarrow{\sim} X.$$

3) Exc. 5.28 og 5.29.

4) Lad $(X_k)_{k \geq 1}$ og X betegne reelle stokastiske variable.

a) Antag at $X_k \sim bi(n_k, p_k)$ for alle $k \geq 1$. Vis at $(X_k)_{k \geq 1}$ er stram hvis $\sup_k n_k \cdot p_k < \infty$. Gælder der hvis og kun hvis?

Antag i det følgende at $X_k \xrightarrow{\sim} X$.

b) Vis at $(X_k)_{k \geq 1}$ er stram. Vink: Udnyt f.eks. 5.9.

c) Antag at $\sup_k E[|X_k|^p] < \infty$ for et $p > 0$. Vis at alle momenter af orden n og absolutte momenter af orden q , hvor $n, q \in (0, p)$ konvergerer mod de tilsvarende for X .

Vink: Vis først at $E[|X|^p] < \infty$ ved at vurdere på $E[|X|^p \wedge m]$. Vis og udnyt dernæst at $\sup_k E[|X_k|^q - |X_k|^q \wedge m] \rightarrow_{m \rightarrow \infty} 0$ for alle $q < p$.

d) Antag at fordelingsfunktionen F for X er kontinuert. Vis at

$$\sup_x |F_k(x) - F(x)| \rightarrow 0 \text{ for } k \rightarrow \infty,$$

hvor F_k er fordelingsfunktionen for X_k . Vink: Vis og udnyt at der for alle $\epsilon > 0$ findes endelig mange reelle tal $x_1 < \dots < x_n$ så at

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) \leq \epsilon \text{ for } i = 0, \dots, n, \text{ hvor } x_0 := -\infty \text{ og } x_{n+1} := \infty.$$

Afleveringsopgave: Exc. 5.30.

Øvrige meddelelser: Exc. 5.28 viser, at en $N(0, \sigma^2)$ -fordelingen er strengt stabil af orden 2, hvor en ikke-konstant stokastisk variabel X siges at have en strengt stabil fordeling hvis

$$\forall n \geq 1 \exists a_n > 0 \quad X_1 + \dots + X_n \sim a_n X,$$

hvor $X_1, \dots, X_n$ er uafhængige kopier af X .

Man kan vise, at a_n må være af formen n^α for $0 < \alpha \leq 2$, hvilket giver anledning til betegnelsen *strengt stabil af orden α* . Endvidere gælder, at X er symmetrisk og strengt stabil af orden α , hvis og kun hvis der findes et $\beta > 0$ så at

$$\varphi_X(t) = e^{-\beta|t|^\alpha} \quad t \in \mathbf{R}.$$

For mere information henvises til sektionerne 5.29 og 5.30.

Svend Erik Graversen.

SS2, TD nr. 22

1)

(X_n) s.v., $X_n \Rightarrow N(0,1)$

Påstand: $X_n^2 \Rightarrow \chi^2(1)$

Beweis:

Idet $Z \sim N(0,1) \Rightarrow Z^2 \sim \chi^2(1)$ og $x \mapsto x^2 \in C(\mathbb{R})$ er påstanden en direkte konsekvens af sætn. s. 134 + pkt. 1)

2)

$(X_n), (Y_n), X$ n-dim. s.v., $Y_n \xrightarrow{p} 0$ ss.

Påstand: $X_n \Rightarrow X \iff X_n + Y_n \Rightarrow X$

Beweis:

$\implies$

Juf. sætn. s. 134 + pkt. 1)+3) gælder

$(X_n, Y_n) \xrightarrow{p} (X, 0)$ og dermed $X_n + Y_n \xrightarrow{p} X + 0 = X$

$\impliedby$

Juf. sætn. s. 134 + pkt. 1)+3) gælder

$(X_n + Y_n, Y_n) \xrightarrow{p} (X, 0)$ og dermed, at

$X_n = X_n + Y_n - Y_n \xrightarrow{p} X - 0 = X$

□

3)

Exc. 5.28

X, Y, Z iid. s.v. $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = \text{Var}(Z) = \sigma^2 > 0$

$\exists a > 0: X+Y \sim aZ$

Påstand: $a = \sqrt{2}$, $X \sim Y \sim Z \sim N(0, \sigma^2)$

Beweis:

$X+Y \perp Z$, $X+Y \sim aZ \Rightarrow \text{Var}(X+Y) = \text{Var}(aZ)$

$\text{Var}(X+Y) = 2\sigma^2$, $\text{Var}(aZ) = a^2\sigma^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$

Lad ϕ betegne den fælles karakteristiske fkt.

$\forall k \geq 1: \phi(t) = \left(1 + \frac{2^k (\phi(\frac{t}{\sqrt{2^k}}) - 1)}{2^k}\right)^{2^k} \quad (*)$

$k=1 \quad \left(1 + \frac{2 (\phi(\frac{t}{\sqrt{2}}) - 1)}{2}\right)^2 = (\phi(\frac{t}{\sqrt{2}}))^2 = \phi_{X+Y}(\frac{t}{\sqrt{2}}) = \phi_{\sqrt{2}Z}(\frac{t}{\sqrt{2}}) = \phi(t)$

Antag $(*)$ sand for $k \leq n$

$k = n+1$:

Juf. det ovenstående: $(\phi(\frac{t}{\sqrt{2}}))^2 = \phi(t)$, dvs.

$\phi(\frac{t}{\sqrt{2^{n+1}}}) = (\phi(\frac{t}{\sqrt{2^{n+1}}}))^2 \quad (+)$

$\left(1 + \frac{2^{n+1} (\phi(\frac{t}{\sqrt{2^{n+1}}}) - 1)}{2^{n+1}}\right)^{2^{n+1}} = (\phi(\frac{t}{\sqrt{2^{n+1}}}))^{2^{n+1}} \stackrel{(+)}{=} (\phi(\frac{t}{\sqrt{2^n}}))^{2^n}$

Altså har vi pr. induktion vist, at $(*)$ er sand.

Juf. kfs s. 105 er φ 2-gangs diff.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k(\varphi(\frac{t}{\sqrt{k}}) - 1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\frac{t}{\sqrt{k}}) - 1}{1/k}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{E[iX e^{it/\sqrt{k}X}] t(-\frac{1}{2}) k^{-\frac{3}{2}}}{-1/k^2}$$

l'Hopital $k \rightarrow \infty$
kfs s. 105

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{E[iX e^{it/\sqrt{k}X}] t(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})k^{-\frac{5}{2}} + (t\frac{1}{2}k^{-\frac{3}{2}})^2 E[i^2 X^2 e^{it/\sqrt{k}X}]}{2k^{-3}}$$

$$= -\frac{1}{2}t^2 E[X^2] = -\frac{1}{2}t\sigma^2$$

(*)

(*) Pga. Lebesgues sætn. om dom. konv.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k(\varphi(\frac{t}{\sqrt{k}}) - 1) = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^k(\varphi(\frac{t}{\sqrt{2^k}}) - 1)$$

Da $(1 + \frac{x}{n})^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x$ og dermed at

$$(1 + \frac{x}{2^k})^{2^k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} e^x \text{ f.ås}$$

$$\varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2^k(\varphi(\frac{t}{\sqrt{2^k}}) - 1)}{2^k}\right)^{2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{2^k(\varphi(\frac{t}{\sqrt{2^k}}) - 1)} = e^{-\frac{1}{2}t\sigma^2}$$

Af bm. s. 110 m ses, at $X \sim N(0, \sigma^2)$

Exc. 5.29

(X_n) iid. , $F(t) = P(X_n \leq t)$, $t \in \mathbb{R}$

$\forall n \geq 1, \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}$: $F_n(\omega, t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 1_{\{X_j \leq t\}}(\omega)$

betegur de empiriske fordelingsfkt.

Påstand: $\forall t \in \mathbb{R} \quad \sqrt{n} (F_n(t) - F(t)) \xrightarrow{d} N(0, \xi(t))$,
 $\xi(t) = F(t)(1 - F(t))$

Beweis:

Lad $t \in \mathbb{R}$ være vilk.

Ifølge den klassiske Centrale Grensesætning s. 143:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n (1_{\{X_j \leq t\}} - F(t)) \xrightarrow{d} N(0, \xi(t))$$

$$\text{Idet } E[1_{\{X_j \leq t\}}] = F(t), \text{ Var}(1_{\{X_j \leq t\}}) = \xi(t)$$

$$\text{Men } \sqrt{n} (F_n(t) - F(t)) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n (1_{\{X_j \leq t\}} - F(t))$$

□

4)

$(X_n), X$ s.v.

a)

$\forall k \geq 1: X_k \sim \text{bi}(n_k, p_k)$

Påstand: $\sup_k n_k p_k < \infty \implies (X_k)$ er stam

Beweis:

$$E[X_k] = E[X_k] = n_k p_k$$

Det ønskede følger af bn. s. 137a med $\alpha=1$

□

Antag $X_n \Rightarrow X$

b)

Påstand: (X_k) er stram

Beris:

Jvf. s. 137m skal vi vise, at

$$\forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 : \limsup_k P(|X_k| > r) = \limsup_k P(X_k > r)$$

Lad $\varepsilon > 0$ være vilk.

$$\text{Vælg } r > 0, \delta > 0 : P(X \geq r - \delta) < \varepsilon$$

Jvf. sætn. s. 132n gælder, at

$$\limsup_k P(X_k > r) \leq \limsup_k P(X_k \geq r - \delta) \leq P(X \geq r - \delta) < \varepsilon$$

□

c)

$$\text{Antag } \exists p > 0 : \sup_k E[|X_k|^p] < \infty$$

Påstand:

$$\forall n, q \in (0, p) : \lim_{k \rightarrow \infty} E[X_k^n] = E[X^n]$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[|X_k|^q] = E[|X|^q]$$

Beweis:

$\forall m \geq 1$: Idet $x \wedge m \in bC(\mathbb{R})$ gælder jvf. def. s. 128

$E[|x_k|^p \wedge m] \xrightarrow{k \rightarrow \infty} E[|x|^p \wedge m] \quad (x_1)$, dvs.

$$E[|x|^p \wedge m] \leq \sup_k E[|x_k|^p \wedge m] \leq \sup_k E[|x_k|^p] < \infty$$

Men $E[|x|^p \wedge m] \uparrow E[|x|^p]$ jvf. sætn. om mon. konv.

Dvs. $E[|x|^p] \leq \sup_k E[|x_k|^p] < \infty$ og dermed er

$$x \in L^p(P)$$

$$\sup_k E[|x_k|^q - |x_k|^q \wedge m] = \sup_k E[1_{\{|x_k|^q > m\}}]$$

$$= \sup_k P(|x_k|^q > m) \leq \sup_{m \leq \|x_k\|_q^q} \frac{1}{m} \|x_k\|_q^q \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \quad (x_2)$$

Idet (x_k) er begrænset mht. $\|\cdot\|_p$ og dermed også (jvf. s. 45n) mht. $\|\cdot\|_q$ $q < p$

Da $|x|^q \in L^q(P)$, $q < p$ og $|x|^q \wedge m \uparrow |x|^q$, $m \rightarrow \infty$

gælder jvf. monoton konvergens, at $\lim_{m \rightarrow \infty} E[|x|^q \wedge m - |x|^q] = 0$ (x₃)

Lad $\varepsilon > 0$ være vilk., da $\exists k \geq 1$ (og ved at vælge passende m)

$$|E[|x_k|^q - |x|^q]|$$

$$\leq |E[|x_k|^q - |x_k|^q \wedge m]| + |E[|x_k|^q \wedge m - |x|^q \wedge m]| + |E[|x|^q \wedge m - |x|^q]| < \varepsilon$$

Jvf. (x₁ + x₂ + x₃), altså gælder, at

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[|x_k|^q] = E[|x|^q] \text{ tilsvarende følger, at}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[x_k^n] = E[x^n] \text{ ved at betragte pos./neg. del}$$

hver for sig, brug sætn. s. 131s pkt. 1 med $x \mapsto x^+$, $x \mapsto x^- \in C(\mathbb{R})$ samt lin. af integralet.

□

d)

Antag, at fordelingsfkt. F for X er kont.

(Dus, $P(X=x)=0$, $x \in \mathbb{R}$)

Lad F_k betegne fordelingsfkt. for X_k , $k \geq 1$

Påstand: $\sup_x |F_k(x) - F(x)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

Beweis:

$\varepsilon > 0$:

Da $P(|X| > r) \downarrow 0$, $r \rightarrow \infty$ $\exists a, b$: $F(a) - F(-\infty) < \varepsilon$

$F(\infty) - F(b) = 1 - F(b) < \varepsilon$

Da F er kont. $\exists \delta > 0$, $|v-w| < \delta \Rightarrow |F(v) - F(w)| < \varepsilon$

Dus. $\exists x_1, \dots, x_n$ ($n \approx \frac{b-a}{\delta}$) så $x_1 < \dots < x_n$ og $i=0, \dots, n$:

$F(x_{i+1}) - F(x_i) < \varepsilon$. (sæt $a=x_0$, $b=x_{n+1}$) (+)

Lad $\varepsilon' > 0$ være vilk.

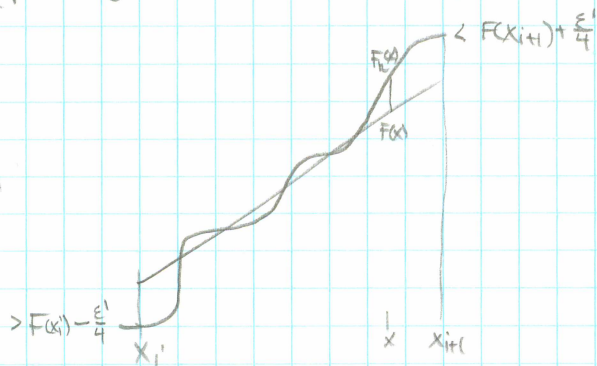
$\exists x_1 < \dots < x_n$: $\max_{i=0, \dots, n} F(x_{i+1}) - F(x_i) < \varepsilon'/2$ jvf. (+) og

$\exists K \geq 1 \forall k \geq K$: $\max_{i=1, \dots, n} |F_k(x_i) - F(x_i)| < \varepsilon'/4$, da fordelingsfkt.

er strengt voksende gælder for $x \in [x_i, x_{i+1}]$:

$|F_k(x) - F(x)| \leq F(x_{i+1}) + \varepsilon'/4 - (F(x_i) - \varepsilon'/4) < \varepsilon'$, dus.

$\sup_x |F_k(x) - F(x)| < \varepsilon'$, $k \leq K$.



□

Exc. 5.30

$$E[Z_j] = (1-p)E[U_j] - pE[V_j]$$

$$\stackrel{\text{Exc. 4.61}}{=} (1-p) \frac{p(1-p^k)}{1-p} - p(1-p^k) = 0$$

(i)

$$\text{Påstand: } \frac{1}{n}(V_n + U_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1-p^k}{1-p} \text{ n.o.}$$

Beweis:

$$\frac{1}{n}(V_n + U_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (1_{\{X_j < k\}} + X_j 1_k)$$

$(1_{\{X_j < k\}} + X_j 1_k)$ er iid. og

$$E[1_{\{X_j < k\}} + X_j 1_k] \stackrel{\text{Exc. 4.61}}{=} \frac{p(1-p^k)}{1-p} + 1-p^k = \frac{1-p^k}{1-p}$$

Det ønskede følger dermed af Kolmogorovs Store Tals Lov s. 112

□

(ii)

Påstand:

$$\sigma^2 \equiv \text{Var}(Z_i)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n Z_j \rightrightarrows N(0, \sigma^2)$$

Beweis:

Dette er en direkte konsekvens af Den centrale grænseværdisætning, klassisk udg. s. 143, da (Z_i) er iid. □

(ii)

Påstand:

$$\tau \equiv \frac{1-p}{1-pk} \sigma$$

$$\sqrt{n}(\bar{W}_n - p) \xrightarrow{D} N(0, \tau^2)$$

Basis:

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\bar{W}_n - p) &= \sqrt{n} \left(\frac{\bar{V}_n + \bar{U}_n}{2} - p \right) \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n Z_j}{\frac{1}{n}(\bar{V}_n + \bar{U}_n)} \end{aligned}$$

Juf (i) + (ii) samt sætn. s. 134 pkt. 3)

(+ pkt. vis konv. $\Rightarrow$ konv. i fnd. (prop. 10 pkt. 3 s. 52 + flk 1 s. 129)

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n Z_j, \frac{1}{n}(\bar{V}_n + \bar{U}_n) \right) \xrightarrow{D} \left(N(0, \sigma^2), \frac{1-pk}{1-p} \right)$$

Det ønskede følger derfor af sætn. s. 134 pkt. 1
med $f: (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$

□

Sandsynlighedsteori 2

Uge 12.

Forelæsninger: Vi fortsætter ufortrødent gennemgangen af kapitel 5.

Øvelser: I det følgende betegner (S, d) et separabelt metrisk rum.

1) Vis for punkter x og $(x_n)_{n \geq 1}$ i S , at $x_n \rightarrow x$ i $S \Leftrightarrow \delta_{x_n} \xrightarrow{\sim} \delta_x$ betegner her punktmalet i x . Vis herudfra at svag konvergens ikke medfører konvergens af værdierne på alle åbne mængder. Se f.eks. på $U = S \setminus \{x\}$.

2) Lad $X, (X_n)_{n \geq 1}$ og $Y, (Y_n)_{n \geq 1}$ være stokastiske variable. Vis at

$$(X_n, Y_n) \xrightarrow{\sim} (X, Y) \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{\sim} X + Y.$$

Vis ved et eksempel at der ikke gælder

$$X_n \xrightarrow{\sim} X \text{ og } Y_n \xrightarrow{\sim} Y \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{\sim} X + Y.$$

3) Lad X og $(X_n)_{n \geq 1}$ betegne stokastiske funktioner med værdier i S , så at $X_n \xrightarrow{\sim} X$. Vis at hvis $E[g(X_n)] \rightarrow_{n \rightarrow \infty} E[g(X)] < \infty$, hvor $g \in C(S)_+$, så konvergerer

$$E[f(X_n)] \rightarrow_{n \rightarrow \infty} E[f(X)] \quad \text{hvis } f \in C(S) \text{ og } |f| \leq g.$$

Vink: Se på f^+ og $g - f^+$ og tilsvarende f^- og $g - f^-$.

Slut herudfra at hvis $S = \mathbf{R}$ så gælder for ethvert $r > 0$

$$E[|X_n|^r] \rightarrow_{n \rightarrow \infty} E[|X|^r] < \infty \Rightarrow E[|X_n|^\alpha] \rightarrow_{n \rightarrow \infty} E[|X|^\alpha] \quad \text{for } 0 < \alpha < r.$$

Bemærk at der også er konvergens for k 'te momenterne for $0 < k \leq r$.

4) Lad $(X_n)_{n \geq 1}$ betegne en *iid*-følge med fælles fordelingsfunktion F . Angiv fordelingsfunktionen for M_n , hvor $M_n := \max_{1 \leq k \leq n} X_k$, $n \geq 1$.

Vis herudfra, at $M_n / \log n \xrightarrow{\sim} \delta_1$, hvis $X_1 \sim E(1)$.

Antag dernæst at den fælles fordeling er en standard Cauchy-fordeling, d.v.s. har tæthed

$$x \mapsto \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

Vis at $\pi \cdot M_n/n$ konvergerer i fordeling og bestem grænsemalet.

Afleringsopgave: Lad $(X_n)_{n \geq 1}$ betegne en *iid*-følge, hvor $X_1 \sim U(0, 1)$. Lad for ethvert $n \geq 1$

$X_{(1)}^n$ og $X_{(2)}^n$ betegne første og anden ordensvariable hørende til $X_1, \dots, X_n$.

D.v.s. for alle ω og n er $X_{(1)}^n(\omega)$ og $X_{(2)}^n(\omega)$ h.h.v. den mindste og den anden mindste af tallene $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$. Mere formelt

$$\{X_{(1)}^n \leq x\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i \leq x\}} \geq 1 \right\} \quad \text{og} \quad \{X_{(2)}^n \leq x\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i \leq x\}} \geq 2 \right\}$$

for alle $x \in \mathbf{R}$. Vis at $(nX_{(1)}^n)$ og $(nX_{(2)}^n)$ konvergerer i fordeling og bestem grænsefordelingerne.

Svend Erik Graversen

SS2, TØ nr. 21

(S, d) separabelt metrisk rum

1)

δ_z betegner pkt målet konc. i z , dvs. $\delta_z(A) = 1_A(z)$, $A \subseteq \mathcal{B}(S)$

Påstand: $x, (x_n) \in S$: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ i $S \iff \delta_{x_n} \xrightarrow{\sim} \delta_x$

Beris:

$\implies$

$\forall f \in bC(S)$: $\int f d\delta_{x_n} = f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) = \int f d\delta_x$ (f kont.),
dvs. $\delta_{x_n} \xrightarrow{\sim} \delta_x$

$\Leftarrow$

$v \mapsto d(x, v) \wedge 1 \in bC(S)$

Af def. på $\delta_{x_n} \xrightarrow{\sim} \delta_x$ følger, at

$\int d(x, \cdot) \wedge 1 d\delta_{x_n} = d(x, x_n) \wedge 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d(x, x) \wedge 1 = \int d(x, \cdot) \wedge 1 d\delta_x$

$\Downarrow$

$d(x, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d(x, x) = 0$ idet $d(\cdot, \cdot) \wedge 1$ er ækvivalent
med $d(\cdot, \cdot)$ (TØ nr. 2 opg. 4)

Dvs. $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$

□

Påstand: $\mu_n \rightarrow \mu \not\Rightarrow \forall O \subseteq S \text{ åben: } \mu_n(O) \rightarrow \mu(O)$

Beweis:

Antag modstridvis, at $\forall O \subseteq S \text{ åben: } \mu_n(O) \rightarrow \mu(O)$

Vælg $(x_n), x \in S$ så $x_n \rightarrow x, \forall n \geq 1: x_n \neq x$

$\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_x$, men $S \setminus \{x\}$ er åben og

$\delta_{x_n}(S \setminus \{x\}) = 1$, mens $\delta_x(S \setminus \{x\}) = 0$

↯

2)

$X, (X_n), Y, (Y_n)$ s.v.

Påstand: $(X_n, Y_n) \Rightarrow (X, Y) \Rightarrow X_n + Y_n \Rightarrow X + Y$

Def. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f: (u, v) \mapsto u+v$

Vi ser, at $f \in C(\mathbb{R}^2)$ af Portmanteau Sætning II s. 134 følger det ønskede $\square$

Påstand: $X_n \Rightarrow X, Y_n \Rightarrow Y \not\Rightarrow X_n + Y_n \Rightarrow X + Y$

Beweis:

Sæt $X_n \sim Y_n \sim N(0, 1)$ og antag

$$\text{Cov}(X_n, Y_n) = \begin{cases} 1/2 & n \text{ ulige} \\ 1/2 & n \text{ lige} \end{cases}$$

Iflg. kontinuitetssætn. s. 140 gælder, at hvis

$X_n + I_n \xrightarrow{d} X + I$, da konvergerer $\varphi_{X_n + I_n} \rightarrow \varphi_{X + I}$

$$\varphi_{(X_n, I_n)}((t_1, t_2)) = e^{-\frac{1}{2}(t_1, t_2) \begin{pmatrix} 1 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}} \quad (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$$

Juf. s. 110m og dermed juf. Kf3 s. 103

$$\varphi_{X_n + I_n}(t) = e^{-t^2(1 + \sigma_{12})} \text{ som er divergent for alle } t \neq 0$$

□

3)

X_n (X_n) s.f. med værdier i S , $X_n \xrightarrow{d} X$

Påstand:

Hvis $E[g(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[g(X)] < \infty$, $g \in C(S)_+$

da gælder $E[f(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[f(X)]$, $f \in C(S)$, $|f| \leq g$

Beweis:

Lad $f \in C(S)$, $|f| \leq g$ være givet; $f^+, f^-, g-f^+, g-f^- \in C(S)_+$

Bm. at vi, da int. er velstillede, kan antage at alle nedenstående int./mid.værdier er endelige.

Juf. bm. s. 129n gælder:

$$\liminf_n E[f^+(X_n)] \geq E[f^+(X)], \quad \liminf_n E[f^-(X_n)] \geq E[f^-(X)]$$

$$\liminf_n E[g-f^-(X_n)] \geq E[g-f^-(X)], \quad \liminf_n E[g-f^+(X_n)] \geq E[g-f^+(X)]$$

Da $\lim_n (E[g-f^+(X_n)] + E[f^+(X_n)]) = E[g(X)]$ og

$\lim_n (E[g-f^-(X_n)] + E[f^-(X_n)]) = E[g(X)]$ samt

$$E[g(X)] = E[g-f^-(X)] + E[f^-(X)] = E[g-f^+(X)] + E[f^+(X)]$$

Følger jf. bn s. 129 at $\lim E[f^+(X_n)] = E[f^+(X)]$ og $\lim E[f^-(X_n)] = E[f^-(X)]$ og dermed det ensbæde jf. lin. af integralet. $\square$

Lad $0 < r < \infty$ være givet, idet $|x|^r \leq |x|^r + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ gælder idet

$$E[|X|^r] < \infty \Rightarrow E[|X|^r + 1] = E[|X|^r] + 1 < \infty \text{ og}$$

$x \mapsto |x|^r \in C(\mathbb{R})_+$, at

$$E[|X_n|^r] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[|X|^r] < \infty \Rightarrow E[|X_n|^r] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[|X|^r].$$

4)

(X_n) i.i.d. s.v. $X_n \sim F$

$\forall n \geq 1$: $M_n := \max_{1 \leq i \leq n} X_i$, for $x \in \mathbb{R}$ gælder, at

$$\underline{F_{M_n}}(x) := P(M_n \leq x) = P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq x\}\right) \stackrel{\text{i.i.d.}}{=} \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) = \underline{(F(x))^n}$$

Påstand: Hvis $X_1 \sim E(1)$ gælder, at $\frac{M_n}{\log n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \delta_{\{1\}}$

Beweis:

$$\frac{M_n}{\log n} \in \mathbb{R}_+ \quad , \quad x \in \mathbb{R}_+ :$$

$$\begin{aligned} \underline{F_{\frac{M_n}{\log n}}}(x) &= F_{M_n}(x \cdot \log n) = (F_{X_1}(x \log n))^n = (1 - e^{-x \log n})^n \\ &= (1 - n^{-x})^n \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - n^{-x})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \log(1 - n^{-x})}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \log(1 - n^{-x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 - n^{-x})}{1/n} \stackrel{\text{H\o{p}ital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x n^{-x-1} (1 - n^{-x})^{-1}}{-1/n^2}$$

$$= -x n^{1-x} (1 - n^{-x})^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} -\infty, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}, \text{ af kont. af exp følger:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{M_n}}{\log n}(x) = 1_{(1, \infty)}(x), \text{ det enskude følger af s\ae{t}n. s. 132n} \quad \square$$

P\ae{stand: Hvis X_i er standard Cauchy-fordelt g\ae{l}der, at $\pi \frac{M_n}{n} \xrightarrow{d} F'$, $F'(x) = e^{-|x|} 1_{\mathbb{R}^+}(x)$

B\ae{vis:}

$$F(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(z)$$

$$F_{\pi \frac{M_n}{n}}(x) = F_{M_n}\left(\frac{n}{\pi}x\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{n}{\pi}x\right)\right)^n$$

$$\text{Det er klart, at } x \leq 0: F_{\pi \frac{M_n}{n}}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$x > 0$:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{n}{\pi}x\right)\right)^n = e^{n \log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{n}{\pi}x\right)\right)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{n}{\pi}x\right)\right) \stackrel{\text{H\o{p}ital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{nx}{\pi}\right)} \cdot \frac{x}{\pi^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{nx}{\pi}\right)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{1 + \left(\frac{nx}{\pi}\right)^2} \stackrel{\text{H\o{p}ital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{2 \frac{nx}{\pi} \cdot \frac{x}{\pi}} = -\left(\frac{\pi}{x}\right)^2, \text{ des.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\pi \frac{M_n}{n}}(x) = e^{-x}$$

Af s\ae{t}n. s. 132n følger det enskude

$\square$

SS2, afleveringsopgave nr. 21, Gunnar Hellmünd

(X_n) iid., $X_1 \sim U(0,1)$

$\forall n \geq 1$: $X_{(1)}^n, X_{(2)}^n$ hh. 1. og 2. ordningsvariabel

$\forall i$ ser, at $\{X_{(1)}^n \leq x\} = \{\sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq x\}} \geq 1\}$ og

$\{X_{(2)}^n \leq x\} = \{\sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq x\}} \geq 2\}$, $x \in \mathbb{R}$

$$P(X_1 \leq x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x \in (0,1) \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}, \quad P \equiv P(X_1 \leq x)$$

$\sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq x\}} \sim b(n, p)$, dvs.

$$F_{n, X_{(1)}^n}(x) = F_{n, X_{(2)}^n}(x) = 0, \quad x \leq 0$$

$0 < x \leq 1$:

$$F_{n, X_{(1)}^n}(x) = F_{X_{(1)}^n}\left(\frac{x}{n}\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq \frac{x}{n}\}} = 0\right)$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \log(1 - \frac{x}{n})}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \log(1 - \frac{x}{n}) \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} -x \frac{1}{1 - \frac{x}{n}} = -x$$

Dvs. $F_{n, X_{(1)}^n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (1 - e^{-x}) 1_{\mathbb{R}_+}(x)$, dvs. $nX_{(1)}^n \xrightarrow{d} E(1)$

Juf. sætn. s. 132n.

$$F_{n, X_{(2)}^n}(x) = F_{X_{(2)}^n}\left(\frac{x}{n}\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq \frac{x}{n}\}} \leq 1\right)$$

$$= F_{n, X_{(1)}^n}(x) - P\left(\sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq \frac{x}{n}\}} = 1\right) = F_{n, X_{(1)}^n}(x) - n \frac{x}{n} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}$$

$$= F_{n, X_{(1)}^n}(x) - x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - e^{-x} - x e^{-x} = 1 - (1+x)e^{-x}$$

Juf. sætn. s. 132n ses, at $nX_{(2)}^n \xrightarrow{d} F$, $F(x) = (1 - (1+x)e^{-x}) 1_{\mathbb{R}_+}$

Sandsynlighedsteori 2

Uge 11.

Forelæsninger: Vi fortsætter gennemgangen af Kapitel 5 i h.h.t. den plan, som blev beskrevet på sidste ugeseddel. Vi får her brug for begreberne øvre og nedre halvkontinuerede funktioner, disse er kort omtalt i Hoffmann's bog på siderne 560-562.

Øvelser: 1) Exc. 4.44.

2) Lad X og $(X_n)_{n \geq 1}$ betegne heltallige stokastiske variable. Vis at

$$X_n \xrightarrow{\sim} X \Leftrightarrow P(X_n = k) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} P(X = k) \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vink: Udnyt at der for ethvert helt tal k findes en begrænset kontinuert funktion f_k , så at $f_k(k) = 1$ og $f_k(l) = 0$ for alle hele tal $l \neq k$.

Vis at $\liminf_n P(X_n \in A) = P(X \in A)$ for alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ og deducer herudfra, at $\lim_n P(X_n \in A) = P(X \in A)$ for alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Man kan endog vise at konvergens sker uniformt over $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Hvad mener han?*

3) Lad X og $(X_n)_{n \geq 1}$ betegne absolut kontinuerte stokastiske variable med tætheder g og $(g_n)_{n \geq 1}$. Vis at $X_n \xrightarrow{\sim} X$, hvis $g_n \rightarrow g$ λ_1 -n.o. eller i $L^1(\lambda_1)$.

4) Lad X og $(X_n)_{n \geq 1}$ betegne stokastiske variable, så at $X_n \xrightarrow{\sim} X$. Vis at $\varphi_{X_n}(t) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \varphi_X(t)$ for alle $t \in \mathbb{R}$, hvor φ_{X_n} og φ_X betegner den karakteristiske funktion for h.h.v. X_n og X . Udnyt dette til at vise, at hvis $X_n \sim N(0, \sigma_n^2)$ for $n \geq 1$, så er $X \sim N(0, \sigma^2)$, hvor $\sigma^2 = \lim_n \sigma_n^2$ ($N(0, 0) := \delta_0$).

Et lidt mere kompliceret argument viser, at resultatet gælder generelt, d.v.s. at hvis $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$ for $n \geq 1$, så er $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, hvor $\mu = \lim_n \mu_n$ og $\sigma^2 = \lim_n \sigma_n^2$.

Afleveringsopgave: Lad $(X_i)_{i \geq 1}$ betegne en følge af uafhængige identisk fordelte stokastiske variable med middelværdi 0 og varians σ^2 . Vis at

$$\frac{1}{n^{1/q}} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow 0 \quad P\text{-n.o. og i } L^q \text{ hvis } 1 \leq q < 2.$$

Vink: Regn i $L^2(P)$. Vis at

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \text{ ikke konvergerer i } L^2.$$

Vink: Vis f.eks. at følgen ikke er en L^2 -Cauchy følge. Vis at

$$P\left(\lim_n \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i = 0\right) = 0$$

Vink: Overvej først at sandsynligheden må være enten 0 eller 1 og argumenter dernæst for, at en antagelse om konvergens P -n.o. fører til en modstrid ved at se på

$$\lim_n \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 / n.$$

Øvrige meddelelser: Da noterne indeholder en del små umøjagtheder, vil der være mulighed for at få en revideret kopi af siderne 86-141. E-mail adresse samt format bedes oplyst.

Svend Erik Graversen

1)

Exc. 4.44.

$$(X_n) \subseteq L^2(P), \quad n \geq 1: \mu_n = E[X_n], \sigma_n^2 = \text{Var}(X_n)$$

$$i, j \geq 1: p_{ij} = P(X_i, X_j)$$

Påstand:

Antag $\exists R: \mathbb{N}_0 \rightarrow [0, \infty)$:

$$R(0) = 1, \quad \forall i, j \geq 1: p_{ij} \leq R(|i-j|) \quad (a)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ n^{-2} \left(\sum_{j=0}^{n-1} R(j) \right) \left(\sum_{j=1}^n \sigma_j^2 \right) \right\} = 0 \quad (b)$$

Da gælder, at

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ i ss. og i } L^2$$

Beweis:

$$\forall i, j \geq 1: \sigma_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j) \quad (\text{Jvf. 4.4.8.: } \sigma_{ij} = p_{ij} \sigma_i \sigma_j)$$

Jvf. def. 4.4.14 gælder

$$\begin{aligned} E \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i) \right|^2 \right] &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} \sigma_i \sigma_j = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n p_{ij} \sigma_i \sigma_j \right) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n R(j) \sigma_i \sigma_{j+i} \right)$$

$$= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} R(j) \sum_{i=1}^{n-j} \sigma_i \sigma_{j+i} \right)$$

$$\leq \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} R(j) \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \right)$$

$$\leq \frac{1}{n^2} 2 \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} R(j) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{jf. b})$$

Dvs. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ i $L^2(P)$ og dermed også i ss. j.f. prop. 10, 1)

* Dette skyldes, at $-(\sigma_i - \sigma_j)^2 = -\sigma_i^2 - \sigma_j^2 + 2\sigma_i \sigma_j \leq 0$

$\Rightarrow \sigma_i \sigma_j \leq \frac{\sigma_i^2}{2} + \frac{\sigma_j^2}{2}$ og er tydeligt hvis man

betrakter matricen $\{\sigma_i \sigma_j\}_{1 \leq i, j \leq n}$

og sammenligner diagonalen

fra $(1,1) \rightarrow (n,n)$ med f.eks. $(1,i) \rightarrow ((n-(i-1)), n)$

11	12	13	14	15	16
22	23	24	25	26	
	32	34	35	36	
		44	45	46	
			55	56	
				66	

□

2)

$(X_n), X$ heltallige s.v.

Påstand: $X_n \xrightarrow{d} X \iff \forall k \in \mathbb{Z}: P(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(X = k)$

Beweis:

$\Rightarrow$:

Lad $k \in \mathbb{Z}$ være vilkårlig.

Definer $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}: f_k(x) = 1 - |k - x| \wedge 1$

vi ser at $f_k \in bC(\mathbb{R})_+$ og jvf. definitionen s. 115 gælder, at $P(X_n = k) = E[f_k(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[f_k(X)] = P(X = k)$

$\Leftarrow$:

Ligesom $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ kan tilordnes et 'tællsmål', har vi et tællsmål på $(\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{Z}})$, μ , definer for $n \geq 1, t \in \mathbb{R}$
 $f_{n,t}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}: f_{n,t}(k) = e^{itk} P(X_n = k)$

Det er udfra antagelsen klart, at $\forall n \geq 1: |f_{n,t}| \leq 1$

og $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n,t} = f_t$, hvor $f_t: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$:

$f_t(k) = e^{itk} P(X = k)$, dermed følger af Lebesgues sætn. om domineret konvergens, at

$$E[e^{itX_n}] = \int f_{n,t} d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f_t d\mu = E[e^{itX}]$$

af bn. s. 125 i forbindelse m. kont. sætn. for karakteristiske fkt. gælder, at $X_n \xrightarrow{d} X$

□

Antag, at $X_n \xrightarrow{d} X$

Påstand: $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \liminf_n P(X_n \in A) = P(X \in A)$

Beweis:

Lad $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ være vilkårlig

Der eksisterer $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A \cap \mathbb{Z} = B^\circ \cap \mathbb{Z} = B \cap \mathbb{Z} = \bar{B} \cap \mathbb{Z}$
og derved følger af korollaret s. 117, at

$$\begin{aligned} P(X \in A) &= P(X \in B^\circ) \leq \liminf_n P(X_n \in B) = \liminf_n P(X_n \in A) \\ &\leq \limsup_n P(X_n \in A) = \limsup_n P(X_n \in B) \leq P(X \in \bar{B}) \\ &= P(X \in A), \text{ dvs. } \liminf_n P(X_n \in A) = P(X \in A) \\ &(\text{og vi ser, at } \lim_n P(X_n \in A) = P(X \in A)) \end{aligned}$$

□

3)

$X, (X_n)$ a.k. s.v. tætheder $g, (g_n)$

Påstand:

Hvis 1) $g_n \rightarrow g$ λ_1 -n.o. eller 2) $g_n \rightarrow g$ i $L^1(\lambda_1)$,
da gælder, at $X_n \xrightarrow{d} X$

Beris:

Lad $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ være vilkårlige

$$P(a < X_n < b) = \int_a^b g_n d\lambda_1, \quad P(a < X < b) = \int_a^b g d\lambda_1$$

Da vi kan antage, at $g_n \geq 0$, $n \geq 1$ følger af
Fatous Lemma, at der under betingelse 1) gælder
 $\liminf P(a < X_n < b) \geq P(a < X < b)$ og det enskede
følger derfor af pkt. e) i sætn. på s. 132

Antag at betingelse 2) er opfyldt

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b g_n d\lambda_1 - \int_a^b g d\lambda_1 \right| &= \left| \int_a^b (g_n - g) d\lambda_1 \right| \leq \int_a^b |g_n - g| d\lambda_1 \\ &\leq \int |g_n - g| d\lambda_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ dvs. } \liminf_n P(a < X_n < b) \\ &= \lim P(a < X < b) = P(a < X < b) \text{ og som før følger det} \\ &\text{enskede af pkt. e) i sætn. på s. 132} \end{aligned}$$

□

4)

$X, (X_n)$ s.v., $X_n \Rightarrow X$

Påstand: $\forall t \in \mathbb{R}: \varphi_{X_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi_X(t)$

Beris:

Da $x \rightarrow e^{itx} \in bC(\mathbb{C})$ gælder jvf. def. s. 128

$$\varphi_{X_n}(t) = E[e^{itX_n}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[e^{itX}] = \varphi_X(t), t \in \mathbb{R} \quad \square$$

Påstand:

Hvis $X_n \sim N(0, \sigma_n^2)$, $n \geq 1$, da er $X \sim N(0, \sigma^2)$,
hvor $\sigma^2 = \lim_n \sigma_n^2$ ($N(0,0) := \delta_0$)

Beris:

Jvf. det ovenstående gælder, at $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_X(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{X_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{2}t^2\sigma_n^2} \stackrel{(*)}{=} e^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

des. jvf. bn. på s. 110n gælder at $X \sim N(0, \sigma^2)$

(*) : $v \rightarrow e^{-\frac{1}{2}t^2v}$ er kont.

$\square$

Tilsvarende følger, idet $u+iv \mapsto e^{itv - \frac{1}{2}t^2u}$ er
kompleks kont., at

Påstand:

Hvis $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$, $n \geq 1$, da er $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

hvor $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n$, $\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^2$ ($N(\mu, 0) := \delta_\mu$)

552, afløsningsopgaver nr. 20, Gunna Hellmund

(X_i) i.i.d $E[X_i]=0$, $\text{Var}(X_i)=\sigma^2$

Påstand:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1/q}} \sum_{i=1}^n X_i = 0$ P-n.o., og i L^q hvis $1 \leq q < 2$

Beweis:

Da $L^2(P) \subseteq L^q(P)$, $q \in [1, 2)$ gælder at (X_i) har endeligt q 'te moment, og det ønskes er derfor en direkte konsekvens af Marcinkiewicz-Zygmunds Størte tals lov s. 117. $\square$

Påstand:

$(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i)$ er ikke konvergent i L^2 , $\sigma^2 > 0$

Beweis:

Da $(L^2, \|\cdot\|_2)$ er et Banachrum følger det ønskede, hvis $(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i)$ ikke er en Cauchyfølge, dvs.

$\exists \varepsilon > 0 \forall n \geq 1 \exists n_1, n_2 \geq n: \|\frac{1}{\sqrt{n_1}} \sum_{i=1}^{n_1} X_i - \frac{1}{\sqrt{n_2}} \sum_{i=1}^{n_2} X_i\|_2 \geq \varepsilon$

Lad $n \geq 1$ være vilk. vælg $n_2/2 > n_1 \geq n$:

$$\|\frac{1}{\sqrt{n_1}} \sum_{i=1}^{n_1} X_i - \frac{1}{\sqrt{n_2}} \sum_{i=1}^{n_2} X_i\|_2 = \|\frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}} (\sum_{i=1}^{n_1} \sqrt{n_2} X_i - \sum_{i=1}^{n_2} \sqrt{n_1} X_i)\|_2 =$$

$$\frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}} \|\sum_{i=1}^{n_1} (\sqrt{n_2} - \sqrt{n_1}) X_i - \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \sqrt{n_1} X_j\|_2 = (\sum_{i=1}^{n_1} (\sqrt{n_2} - \sqrt{n_1})^2 \sigma^2 + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} n_1 \sigma^2) / \sqrt{n_1 n_2}$$

$$= (n_1 (\sqrt{n_2} - \sqrt{n_1})^2 + (n_2 - n_1) n_1) \sigma^2 / \sqrt{n_1 n_2} = (\frac{n_2 + n_1 - 2\sqrt{n_1 n_2}}{n_2} + \frac{n_2 - n_1}{n_1}) \sigma^2$$

$$= (2 - 2\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}) \sigma^2 = 2(1 - \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}) \sigma^2 > 2(1 - \sqrt{1/2}) \sigma^2 > 0$$

$\square$

Pastand: $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = 0) = 0$

Bewis:

Lad $n \geq m$:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m X_i + \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^n X_i$$

Vi ser dermed at $\liminf_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $\limsup_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ er $\mathcal{F}^\infty$ -målige (med notationen i Hoffmann 2.13) og jef. bm. i 2.13 er $\liminf_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $\limsup_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ konstante n.o.

Udsagnet $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(\omega) = 0$ er ækvivalent med $\limsup_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(\omega) \leq \liminf_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(\omega) \wedge \liminf_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = 0$

Men $\{\limsup_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \leq \liminf_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\}$, $\{\liminf_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\} \in \mathcal{F}^\infty$ og dermed flg. at $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = 0) \in \{0, 1\}$

Antag modstridsvis, at $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = 0) = 1$

Dvs. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n X_i)^2 = 0$ n.o.

Sandsynlighedsteori 2

Uge 10.

Forelæsninger: Gemengangen af Kapitel 5 opdeles i tre dele i h.h.t. fig. plan. Først sektionerne 5.1, 5.3(2), 5.9, 5.2 og 5.4. Her gemengæses 5.3(2) ifølge det udleverede ark. Dernæst 5.5, 5.6, 5.7, 5.8 og 5.10. Disse behandles udelukkende efter de udleverede noter. Til sidst sektionerne 5.16 og 5.21 – 5.26. Der vil blive udleveret noter til afsnittene 5.16 og 5.22. De øvrige afsnit er ikke pensum, men visse dele vil blive berørt ved øvelserne.

Øvelser: 1) Exc. 4.62 og 4.65. 2) Exc. 4.64 og 4.67.

3) Lad $(X_n)_{n \geq 1}$ betegne en følge af parvis uafhængige identisk fordelte stokastiske variable med endelig middelværdi μ . Vis at

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \rightarrow \mu \quad \text{i } L^1(P).$$

Vink. Udnyt f.eks. Exc. 4.35 og 4.39.

4) Lad $(X_n)_{n \geq 1}$ betegne en følge af parvis uafhængige identisk fordelte stokastiske variable. Antag at $E[X_1] < \infty$ og $E[X_1^2] = \infty$. Vis at

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \rightarrow \infty \quad P\text{-n.o.}$$

Vink. Betragt for ethvert $M > 0$ følgen $(X_i^M)_{i \geq 1}$, hvor $X_i^M := X_i \wedge M$.

5) Lad $(X_n)_{n \geq 1}$ betegne en følge af uafhængige identisk fordelte stokastiske variable, så at

$$\varphi_{X_1}(t) = E[e^{itX_1}] = e^{-|t|} \quad t \in \mathbf{R}.$$

Gør rede for at X_1 er en symmetrisk stokastisk variabel samt at $X_1 \sim S_n/n$ for alle n , hvor $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$. Gør dernæst rede for at X_1 ikke har endelig middelværdi, og vis til sidst ved brug af formelen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + t^2/x^2)\right) dx = e^{-|t|} \quad t \in \mathbf{R}$$

at $X_1 \sim X/Y$, hvor X og Y er uafhængige og begge $N(0, 1)$ -fordelt.

Afleveringsopgave: Exc. 4.58.

Øvrige meddelelser: Ligesom vi skriver $E[X]$ i stedet for $\int X dP$, benyttes $E[X, A]$ som synonym for $\int_A X dP$ for ethvert $X \in L^1(P)$ og $A \in \mathcal{F}$.

4.9 del 3 viser, at hvis en reel tallfølge $(a_n)_{n \geq 1}$ enten er opad eller nedad begrænset, d.v.s.

$$\sup_n a_n < \infty \quad \text{eller} \quad \inf_n a_n > -\infty,$$

så konvergerer

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \rightarrow 0 \quad \text{for } n \rightarrow \infty,$$

hvis

$$\frac{1}{\nu_k(n)} \sum_{i=1}^{\nu_k(n)} a_i \rightarrow 0 \quad \text{for } n \rightarrow \infty$$

for alle $k \geq 1$, hvor

$$\nu_k(n) := \lfloor (1 + 1/k)^n \rfloor \quad n \geq 1, k \geq 1.$$

Bevis. Antag at a_n 'erne er nedad begrænset. Ved addition med en ikke-negativ konstant M kan vi antage, at a_n 'erne er ikke-negative, og at det nu drejer sig om at vise konvergens mod M . Men dette følger umiddelbart af

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \leq \frac{1}{\nu_k(l_n)} \sum_{i=1}^{\nu_k(l_n)} a_i \leq \frac{1 + 1/k}{\nu_k(l_n + 1)} \sum_{i=1}^{\nu_k(l_n + 1)} a_i \rightarrow (1 + 1/k) \cdot M$$

og

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \geq \frac{1}{\nu_k(l_n + 1)} \sum_{i=1}^{\nu_k(l_n)} a_i \geq \frac{(1 + 1/k)^{-1} \nu_k(l_n)}{\nu_k(l_n)} \sum_{i=1}^{\nu_k(l_n)} a_i \rightarrow (1 + 1/k)^{-1} \cdot M,$$

hvor for $k \geq 1$ og $n \geq 2 \nu_k(l_n)$ er valgt så at $\nu_k(l_n) \leq n < \nu_k(l_n + 1)$.

1)

Exc. 4.62

 $(X_n) \subseteq L^2(P)$ uafh. s.v. $n \geq 1: E[X_n] = \mu_n, \text{Var}(X_n) = \sigma_n^2$ $s_n := \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}, (a_n) > 0: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{a_n} = 0$ Påstand: $\frac{1}{a_n} \sum_{j=1}^n (X_j - \mu_j) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ i ss. og i L^2

Bewis:

$$\frac{s_n}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies \frac{s_n^2}{a_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\implies \frac{1}{a_n^2} \sum_{j=1}^n E[(X_j - \mu_j)^2] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\implies \frac{1}{a_n} \sum_{j=1}^n (X_j - \mu_j) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ i } L^2$$

Konvergensen er jf. prop. 10, 1) s. 51 også i ss.

□

Exc. 4.65

$(X_n) \subseteq L^2(P)$ uafh. s.v.

$n \geq 1$: $E[X_n] = \mu_n$, $\text{Var}(X_n) = 1$

$(a_n) \subseteq \mathbb{R}$, $T_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i (X_i - \mu_i)$

Påstand: $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-2} a_j^2 < \infty \Rightarrow T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ n.o.

Beweis:

$$\text{Var}(a_n X_n) = a_n^2 \text{Var}(X_n) = a_n^2$$

Pr. antagelse: $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}(a_n X_n) / n^2 = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2} a_j^2 < \infty$

og dermed følger af De store tals lov

(L^2 -udgaven s. 100) at $T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ n.o. □

Påstand: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} \sum_{j=1}^n a_j^2 = 0 \Rightarrow T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ i L^2

Beweis:

$$E[T_n^2] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n a_i^2 E[(X_i - \mu_i)^2] \quad (\text{Pythagoras s. 62})$$

$$= n^{-2} \sum_{j=1}^n a_j^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ dvs. } T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ i } L^2 \quad \square$$

2)

Exc. 4.64

(X_n) uafh. s.v., $\beta > 0$

$$\forall n \geq 1: P(X_n = \sqrt{n}) = P(X_n = -\sqrt{n}) = \frac{1}{2} n^{-\beta}, P(X_n = 0) = 1 - n^{-\beta}$$

i)

$$\text{Påstand: } \forall n \geq 1, q > 0: E[X_n] = 0, E[|X_n|^q] = n^{(q-2\beta)/2}$$

Bewis:

$$E[X_n] = \frac{1}{2} n^{-\beta} \cdot \sqrt{n} + (1 - n^{-\beta}) \cdot 0 + \frac{1}{2} n^{-\beta} \cdot (-\sqrt{n}) = 0$$

$$\begin{aligned} E[|X_n|^q] &= \frac{1}{2} n^{-\beta} (\sqrt{n})^q + (1 - n^{-\beta}) \cdot 0^q + \frac{1}{2} n^{-\beta} |-\sqrt{n}|^q \\ &= n^{-\beta} n^{q/2} = n^{(q-2\beta)/2} \end{aligned}$$

□

ii)

$$\text{Påstand: } \forall q \in \mathbb{R}_+: \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ n.o. og i } L^q$$

Bewis:

Lad $q \geq 2$:

$$\begin{aligned} n^{-(q+2)/2} \cdot E[|X_n - E[X_n]|^q] &= n^{-(q+2)/2} \cdot n^{(q-2\beta)/2} \\ &= n^{-(1+\beta)} \end{aligned}$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\beta)} < \infty$ følger det ønske af

De store tals lov 4.33 og prop. 10,4) s. 51

□

Exc. 4.67

(X_n) uafh. s.v. $\forall n \geq 1: X_n$ uniformt fordelt på $[-n^\beta, n^\beta]$
hvor $\beta > 0$

i)

Påstand: $\forall n \geq 1, q > 0: E[X_n] = 0, E[|X_n|^q] = \frac{n^{\beta q}}{1+q}$

Beris:

$$E[X_n] = \int_{-n^\beta}^{n^\beta} \frac{1}{2n^\beta} x \, dx$$

$$E[|X_n|^q] = \int_{-n^\beta}^{n^\beta} \frac{1}{2n^\beta} |x|^q \, dx = \frac{1}{n^\beta} \int_0^{n^\beta} x^q \, dx = \frac{1}{n^\beta} \frac{1}{1+q} (n^\beta)^{q+1} \\ = \frac{n^{\beta q}}{1+q}$$

□

ii)

Påstand: $\forall q \in \mathbb{R}_+: 0 < \beta < 1/2 \implies \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ n.o. og i L^q

Beris:

$$\text{Lad } q \geq 2: n^{-(q+2)/2} \cdot E[|X_n - E[X_n]|^q] = n^{-(q+2)/2} \frac{n^{\beta q}}{1+q} \\ = \frac{1}{1+q} n^{(\beta - 1/2)q - 1} \implies \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(q+2)/2} E[|X_n - E[X_n]|^q] < \infty$$

Det ønskede følger derfor af De store tals lov 4.33
+ prop. 10, 4) s. 51.

□

3)

(X_n) parvis uafh. i.d. s.v. $n \geq 1: E[X_n] = \mu < \infty$

Påstand:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \rightarrow \mu \text{ i } L^1$$

Beweis:

Jvf. De store tals lov 4.12 gælder $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \rightarrow \mu$ n.o.

Af prop. 10, 3) følger, at $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \rightarrow \mu$ i ss.

Hvis $(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j)_{n \geq 1}$ er v.I. er vi derfor jvf. sætn. 6 s. 53 færdige.

Exc. 4.35

(X_n) i.d. s.v., $\forall n \geq 1: E[|X_n|] < \infty$

Påstand: $(|X_n|)$ v.I.

Beweis:

Lad $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ være vilk. $\sup_{n \geq 1} \int_{\{|X_n| \geq K\}} |X_n| dP = \int_{\{|X_1| \geq K\}} |X_1| dP$

Det ønskede følger derfor af g) s. 31 og def. s. 52

$$\text{idet } P(|X_1| \geq K) \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0$$

□

Exc. 4.39

(X_n) v.I., $Y_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

Påstand: (Y_n) v.I.

Beris:

Juf. lemma 10 s. 52 : $\sup_{n \geq 1} \int |X_n| dP < \infty$, og dermed

$$\forall n \geq 1: \int |F_n| dP \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int |X_i| dP \leq \sup_{n \geq 1} \int |X_n| dP < \infty$$

$$\text{dvs. } \sup_{n \geq 1} \int |F_n| dP < \infty$$

Lad $\varepsilon > 0$ være givet, vælg jf lemma 10, 520 og antag $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $P(A) \leq \delta$

$$\forall n \geq 1: \int_A |F_n| dP \leq \sup_{n \geq 1} \int_A |X_n| dP \leq \varepsilon, \text{ dvs.}$$

$$\sup_{n \geq 1} \int_A |F_n| dP \leq \varepsilon \text{ og dermed er } (F_n) \text{ U.I. jf. lemma 10.}$$

□

At $(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j)_{n \geq 1}$ er U.I. følger um tvivelt af
Exc. 4.35+39

□

4)

(X_n) parvis uafh. identisk fordelte s.v.

Påstand:

Antag $E[X_1^-] < \infty$ og $E[X_1^+] = \infty$, da gælder at

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \text{ n.o.}$$

Beris:

$$\forall M \geq 1 \text{ definer: } X_n^M := X_n \wedge M, \quad n \geq 1$$

Juf. setn. om monoton convergens (s. 36) geldt

$$E[(X_n \wedge M)^+] \xrightarrow{M \rightarrow \infty} E[X_n^+] = \infty \quad (*)$$

$$\forall M \geq 1: E[X \wedge M] < \infty$$

Juf. de stoc. fals. l. 4.12. heb. x_i , at

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \wedge M \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[X \wedge M] \quad \text{n.o.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \wedge M = \liminf_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \wedge M$$

$$\leq \liminf_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$\downarrow (*)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \infty \quad \text{n.o.}$$

□

5)

(X_n) i.i.d. $\forall t \in \mathbb{R}: \varphi_{X_1}(t) = e^{-|t|}$

Da $\varphi_{-X_1}(t) = e^{-|-t|} = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$ gælder j.f.

entydighedsætn. for karakteristiske fkt. 4.18.8, at $-X_1 \sim X_1$
dvs. X_n 'erne er symmetriske.

Da (X_n) er uafh. gælder for $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n \geq 1$:

$$\varphi_{S_n/n}(t) \stackrel{4.18.5}{=} \varphi_{S_n}(t/n) \stackrel{4.18.7}{=} \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t/n) = e^{-\sum_{i=1}^n |t/n|} = e^{-|t|}$$

og dermed (4.18.8) at $S_n/n \sim X_1$

Påstand: X_1 har ikke endelig middelværdi

Basis:

Antag modstridende, at X_1 har endelig middelværdi,
da gælder j.f. resultatet s. 92 at $t \rightarrow \varphi_{X_1}(t)$ er
differentiabel, men $\varphi_{X_1}(t) = e^{-|t|}$ er ikke diff. i $t=0$ $\sum$

Lad $X \perp\!\!\!\perp Y$, $X \sim Y \sim N(0,1)$

Påstand: $X_1 \sim X/Y$

Basis:

$\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_{X/Y}(t) = E[e^{itX/Y}] \stackrel{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \int \{ \int e^{itx/y} dP_X \} dP_Y$$

$$= \int \{ \int e^{itx/y} f_X(x) \lambda_1(dx) \} dP'_Y = \int \{ \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx/y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \lambda_1(dx) \} dP'_Y$$

$$= \int e^{-(t/y)^2/2} dP_y = \int_{\substack{Y \sim N(0,1) \\ (+)}} e^{-(t/y)^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$$

↑
Afl. nr. 13

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y^2 + t^2/y^2)} dy = e^{-|t|} \quad \text{dvs. } \mathbb{R}/\mathbb{Z} \sim \mathbb{R}_1$$

finden
på US

juf. 4.18.8

(+) Vi ignorerer at $y \rightarrow 1/y$ ikke er veldef. i 0 (vi sætter blot fkt. lig 0 i $y=0$)

SS2, afleveringsopgave nr. 19, Gummer Hellelund

Exc. 4.58

$(X_n) \in L^2(P)$ uafh.

$\forall n \geq 1: E[X_n] = \mu, \text{Var}(X_n) = \sigma^2$

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

Påstand: $E[\bar{X}_n] = \mu, E[S_n] = \frac{n-1}{n} \sigma^2, \text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \sigma^2$

Bevis:

$$E[\bar{X}_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i] = \mu$$

$$\text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$\uparrow$
 X_n uafh.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 + \bar{X}_n^2 - \frac{2}{n} \bar{X}_n \sum_{i=1}^n X_i \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2 \quad (*) \end{aligned}$$

Da følger, at

$$\begin{aligned} E[S_n] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i^2 - \mu^2] - E[\bar{X}_n^2 - \mu^2] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) - \text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} n \sigma^2 - \frac{1}{n} \sigma^2 \\ &= \frac{n-1}{n} \sigma^2 \end{aligned}$$

□

ii)

Påstand: $\bar{X}_n \xrightarrow{p} \mu$ n.o. og i L^2

Beweis:

Idet $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}(X_n)/n^2 = \sigma^2 \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < \infty$ er dette en konsekvens af De store tals lov (L^2 -udgaven s. 100) $\square$

iii)

Påstand:

Hvis enten 1) $X_i \sim X_j$ $i, j \geq 1$ eller

2) $\exists q \geq 2: \sum_{j=1}^{\infty} j^{-\beta} E[|X_j|^q] < \infty$, $\beta = \frac{1}{q} (q + 4 \wedge q)$

Da gælder, at $s_n \rightarrow \sigma^2$ n.o.

Beweis:

Juf. (*) gælder at $s_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2$ da der juf. ii) gælder, at $\bar{X}_n \rightarrow \mu$, skal vi vise, at $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \rightarrow \sigma^2 + \mu^2$ n.o.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((X_i - \mu) + \mu)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 + \mu^2 + 2\mu \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right) \end{aligned}$$

Dermed resterer at vise, at $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$ n.o. idet vi juf. ii) har, at $2\mu \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right) \xrightarrow{p} 0$ n.o.

Antag 1) , jvf. De store tals lov (4.12) gælder

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \rightarrow E[(X_i - \mu)^2] = \sigma^2 \quad \text{n.o.}$$

Antag 2) , dvs. $\exists q \geq 2 : \sum_{i=1}^{\infty} i^{-\beta} E[|X_i|^q] < \infty$
 $\beta = \frac{1}{q}(q + 4 \wedge q)$

Exc. 4.57

Lad $q \geq 1$ være givet og V en s.v.

$\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$|x - y|^q \leq (|x| + |y|)^q \leq 2^{q-1} (|x|^q + |y|^q)$$

$\uparrow$
Ulighed 3
vs 16

Dvs.

$$\begin{aligned} E[|V - E[V]|^q] &\leq 2^{q-1} (E[|V|^q] + E[|E[V]|^q]) \\ &\leq 2^{q-1} (E[|V|^q] + E[|V|^q]) = 2^q E[|V|^q] \end{aligned}$$

prop. 6
Jensens ulighed
s. 43

Af Exc. 4.57 følger at $E[|(X_n - \mu)^2 - \sigma^2|^\alpha] \leq 2^{3\alpha} E[|X_n|^{2\alpha}]$

Sæt $2\alpha = q$, dvs. $\alpha = \frac{q}{2}$

Def. β som i 4.33 , dvs. $\alpha \in [1, 2]$ ($\Leftrightarrow q \in [2, 4]$) :

$\beta = \alpha = \frac{q}{2} = \frac{1}{4}(q + q) = \frac{1}{4}(q + 4 \wedge q)$, for $\alpha > 2$ ($\Leftrightarrow q > 4$) :

$\beta = \frac{1}{2}(\alpha + 2) = \frac{\alpha}{2} + 1 = \frac{q}{4} + 1 = \frac{1}{4}(q + 4 \wedge q)$, derved ser vi

at det ønskede ($\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sigma^2$ n.o.) følger

af De store tals lov (4.33)

□

Sandsynlighedsteori 2

Uge 9.

Forelæsninger: Vi fortsætter ufortrødent med emnet *De store tals lov*. Skulle vi mod forventning blive færdigt hermed, startes hvis tiden tillader det så småt på kapitel 5, hvor temaet er *Den centrale grænseværdisætning*.

Øvelser: I det flg. betegner $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et givent sandsynlighedsfelt, hvorpå alle omtalte stokastiske variable antages defineret.

- 1) Exc. 4.69(i). Vink: Benyt Borel-Cantelli Lemmaet.
- Notation. $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ siges at være *summabel* n.o., hvis $\lim_n \sum_{k=1}^n X_k(\omega)$ eksisterer i $\mathbf{R}$ for n.a. ω . (se side 262).
- 2) Exc. 4.60 og Exc. 4.61. 3) Exc. 4.66.
- 4) Lad $(Y_i)_{i \geq 1}$ betegne stokastiske variable. Vis at

$$\{\sup_i |Y_i| = \infty\} = \{\limsup_i |Y_i| = \infty\},$$

og at den tilhørende sandsynlighed er enten 0 eller 1, hvis Y_i 'erne er uafhængige. Vink: Kolmogorov's 0-1 lov.

- 5) Lad $(X_i)_{i \geq 1}$ betegne uafhængige identisk fordelte variable. Udnyt opgave 4) og det andet Borel-Cantelli Lemma til at vise, at

$$E[|X_1|] < \infty \Leftrightarrow P(\limsup_n |X_n|/n = \infty) = 0.$$

Vis, idet $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ for $n \geq 1$, herudfra at

$$E[|X_1|] < \infty \Leftrightarrow P(\sup_n |S_n|/n < \infty) > 0.$$

Afleveringsopgave: Exc. 4.68.

Øvrige meddelelser: Vi vil i foråret ofte møde vendingen: "Lad $(X_i)_{i \geq 1}$ betegne en følge af uafhængige stokastiske variable, så at X_i har fordelingsfunktion F_i for alle i ." Et naturligt spørgsmål er her: "Findes der overhovedet et sådant objekt, d.v.s. findes der et sandsynlighedsfelt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, hvorpå der er defineret en følge af stokastiske variable $(X_i)_{i \geq 1}$, så at

$$P(X_i \leq t) = F_i(t) \quad \text{for alle } t \in \mathbf{R}, i \geq 1."$$

Ifølge opgave 4 på ugesedlen til Uge 50 findes der for enhver fordelingsfunktion F en reel funktion ϕ , så at $\phi(U)$ har fordelingsfunktion F , hvis U er en stokastisk variabel, som er uniformt fordelt over $(0, 1)$. Ovenstående eksistensproblem er derfor et spørgsmål om eksistensen af et sandsynlighedsfelt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, hvorpå der er defineret en følge $(U_i)_{i \geq 1}$ af uafhængige stokastiske variable, som alle er uniformt fordelt over $(0, 1)$.

Eksistensen heraf følger af opgave 3 på sidste ugeseddel. Thi ifølge denne eksisterer der på sandsynlighedsfeltet $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), P)$, hvor P er Lebesgue målet restriktet til $(0, 1)$, d.v.s.

$$P(B) = \lambda_1(B \cap (0, 1)) \quad \text{for } B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}).$$

en følge af uafhængige stokastiske variable $(X_i)_{i \geq 1}$, så at

$$P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = 1/2 \quad \text{for alle } i \geq 1.$$

Ved omnummerering kan $(X_i)_{i \geq 1}$ opfattes som en familie $\{\tilde{X}_{i,j} \mid i, j \geq 1\}$ af uafhængige variable med samme fordeling. Da mængdesystemerne

$$\sigma((\tilde{X}_{i,1})_{i \geq 1}), \sigma((\tilde{X}_{i,2})_{i \geq 1}), \dots, \sigma((\tilde{X}_{i,n})_{i \geq 1}), \dots$$

derfor er uafhængige, gælder dette også $(U_j)_{j \geq 1}$, hvor

$$U_j := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \cdot \tilde{X}_{i,j} \quad \text{for } j \geq 1,$$

og disse er ifølge opgavens sidste spørgsmål alle uniformt fordelt over $(0, 1)$.

Svend Erik Graversen

SS2, TØ nr. 18

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ss-felt

1)

Exc. 4.69 (i)

$(X_n), (Y_n)$ s.v., $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ summabel n.o.

Påstand: $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq Y_n) < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} X_n$ summabel n.o.

Beris:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq Y_n) < \infty \xRightarrow[\text{Lemma 2, Borel-Cantelli}]{\text{}} P(\limsup \{X_n \neq Y_n\}) = 0$$

$$\implies P(\liminf \{X_n = Y_n\}) = 1 \quad (*)$$

$$M = \liminf \{X_n = Y_n\} \cap \{\omega \mid \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\omega) \text{ summabel}\}$$

Pr. antagelse og jvf. (*) ser vi, at $P(M) = 1$

Lad $\omega \in M$; dvs. $\exists N \geq 1 \forall n \geq N: X_n(\omega) = Y_n(\omega)$

og $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\omega) < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) < \infty$, dvs.

$\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ er summabel n.o.

□

2)

Exc. 4.60

(X_n) i.i.d. $F: t \mapsto P(X_n \leq t)$

$$\forall n \geq 1, \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}: F_n(\omega, t) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 1_{\{X_j \leq t\}}(\omega)$$

Påstand: $\forall t \in \mathbb{R}: F_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(t)$ n.o.

Beweis:

Lad $t \in \mathbb{R}$ være vilkårlig.

(X_n) i.i.d. $\Rightarrow (1_{\{X_n \leq t\}})$ i.i.d. (2.10)

$$E[1_{\{X_n \leq t\}}] = P(X_n \leq t) = F(t)$$

Af 'De store tals lov' i den klassiske udg. følger, at

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 1_{\{X_j \leq t\}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[1_{\{X_n \leq t\}}] = F(t) \text{ n.o.}$$

□

Exc. 4.61

(X_n) i.i.d. $\forall n \geq 1: X_n \sim \text{ge}(p)$, dvs.

$$P(X_n = x) = p^x (1-p), x \in \mathbb{N}_0 \quad 0 < p < 1$$

Lad $k \geq 1$ være givet

$$U_n := X_n \wedge k, \quad V_n := 1_{\{X_n < k\}}$$

$$U_n := \sum_{j=1}^n U_j, \quad V_n := \sum_{j=1}^n V_j$$

$$W_n := \frac{U_n}{V_n + U_n}$$

i)

$$\text{Påstand: } E[U_1] = \frac{p(1-p^k)}{1-p}, \quad E[V_1] = 1-p^k$$

Beweis:

$$E[U_1] = E[X_1 \wedge k] = \sum_{j=0}^k p^j (1-p) j + \sum_{j=k+1}^{\infty} p^j (1-p) k$$

$$= p(1-p) \sum_{j=1}^k j p^{j-1} + k(1-p) p^{k+1} \sum_{j=0}^{\infty} p^j$$

$$= p(1-p) \left(\frac{(k+1)p^k}{p-1} - \frac{p^{k+1}-1}{(p-1)^2} \right) + k(1-p) p^{k+1} \frac{1}{1-p}$$

$$= -(k+1)p^{k+1} + \frac{p^{k+2}-p}{p-1} + k p^{k+1} = \frac{p^{k+2}-p}{p-1} - p^{k+1} = \frac{p(1-p^k)}{1-p}$$

$$E[V_1] = E[1_{\{X_1 < k\}}] = P(X_1 < k) = \sum_{j=0}^{k-1} p^j (1-p)$$

$$= (1-p) \frac{p^k - 1}{p-1} = 1 - p^k$$

□

(*)

Resultatet om kvotientrækker benyttes (et udtryk diff-mentieres)

ii)

Påstand: $W_n \rightarrow p$, $n \rightarrow \infty$ n.o. og i L^q , $0 < q < \infty$

Beris:

Af De store tals lov 4.33 følger, at $\forall q \in (1, \infty)$:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i \rightarrow E[U_i], \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i \rightarrow E[V_i] \text{ n.o. og i } L^q$$

Jvf. prop. 10.4) følger at konvergens også er i L^q , $q \in (0, 1]$.

Lad $q \in [1, \infty)$ (dermed har vi prop. 8 s. 45)

Jvf. de alm. regneregler for konvergens mht. til en metrik gælder

$$W_n = \frac{U_n}{V_n + U_n} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i} \rightarrow \frac{E[U_i]}{E[V_i] + E[U_i]}, \quad n \rightarrow \infty$$

n.o. og i L^q

$$\begin{aligned} \frac{E[U_i]}{E[V_i] + E[U_i]} &= \frac{P(1-p^k)/(1-p)}{1-p^k + P(1-p^k)/(1-p)} = \frac{P(1-p^k)}{(1-p)(1-p^k) + P(1-p^k)} \\ &= \frac{P}{1-p + P} = P \end{aligned}$$

Dvs. resultatet gælder for $q \in [1, \infty)$ af prop. 10.4) gælder resultatet dermed også for $q \in (0, 1)$

□

3)

Exc. 4.66

$(X_n) \subseteq L^4(P)$ uafh. s.v. $\forall n \geq 1: E[X_n] = 0, \text{Var}(X_n) = \sigma^2$

Påstand:

Antag $\exists C > 0: E[|X_n|^4] \leq C\sqrt{n}, n \geq 1$

Da gælder:

i) $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \rightarrow 0$ n.o. og i L^4

ii) $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2 \rightarrow \sigma^2$ n.o. og i L^2

Beweis:

i)

$$E[|X_n - E[X_n]|^4] = E[|X_n|^4] \leq C\sqrt{n}, \text{ d.v.s.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} E[|X_n - E[X_n]|^4] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C\sqrt{n}}{n^3} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}} < \infty$$

Det ønskede følger derfor af de store tal lov 4.33

ii)

$$\text{Var}(X_n) = E[X_n^2] - E[X_n]^2 = E[X_n^2], \text{ d.v.s. } E[X_n^2] = \sigma^2$$

$$\begin{aligned} E[|X_n^2 - E[X_n^2]|^2] &= E[X_n^4] + E[X_n^2]^2 - 2E[X_n^2]E[X_n^2] \\ &= E[X_n^4] - E[X_n^2]^2 \leq C\sqrt{n} - \sigma^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{da } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} E[|X_n|^2 - E[X_n^2]]^2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (c\sqrt{n} - \sigma^4) \\ &\leq (c - \sigma^4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.5}} < \infty \end{aligned}$$

følger af De store tals lov 4.33 det ønskede $\square$

4)

(I_n) s.v.

Påstand: $\{\sup |I_n| = \infty\} = \{\limsup |I_n| = \infty\}$

Beweis:

$\subseteq$:

Lad $\omega \in \mathcal{R}$: $\sup |I_n(\omega)| = \infty$, dvs. $\forall N \geq 1 \exists n \geq 1: |I_n(\omega)| \geq N$
 $\Rightarrow \limsup |I_n(\omega)| = \infty$

$\supseteq$:

Lad $\omega \in \mathcal{R}$: $\limsup |I_n(\omega)| = \infty \Rightarrow \forall N \geq 1 \exists n \geq 1: |I_n(\omega)| \geq N$
 $\Rightarrow \sup |I_n(\omega)| = \infty$ $\square$

Påstand:

Antag (I_n) uafh.:

$$P(\sup |I_n| = \infty) = P(\limsup |I_n| = \infty) \in \{0, 1\}$$

Beweis:

Vi må antage, at $\forall n \geq 1: |\Psi_n| < \infty$, thi ellers er flg. en modstrid med resultatet:

Definer $\Psi_1 = \infty \cdot 1_{(0,1/2)}$, $\Psi_n \equiv 1 \quad n \geq 2$

Da er (med $\lambda_1|_{(0,1)}$ som ss-mål) (Ψ_n) uafh og $\{\limsup |\Psi_n| = \infty\} = \{\Psi_1 = \infty\}$, som har ss-mål 1/2

Dvs. antag $\forall n \geq 1: |\Psi_n| < \infty$, da gælder, at

$$\{\limsup |\Psi_n| = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|\Psi_m| > n\}, \text{ idet}$$

$$\omega \in \Omega: \limsup |\Psi_n(\omega)| = \infty \iff \forall n \geq 1 \exists m \geq n: |\Psi_m(\omega)| > n$$

(dette er en 'skærpelse' i forhold til det foregående bevis)

men det er klart, at

$$\forall n \geq 1: \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} \{|\Psi_k| > n\} \in \sigma(\Psi_m, m \geq n)$$

$$\text{Dvs. } \{\limsup |\Psi_n| = \infty\} \in \bigcap_{n \geq 1} \sigma(\Psi_m, m \geq n)$$

$$\text{Jef. 2.5 er } \sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\Psi_n)\right) \perp \bigcap_{n \geq 1} \sigma(\Psi_m, m \geq n) \quad (*)$$

men det er klart, at $\{\limsup |\Psi_n| = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|\Psi_m| > n\}$ er element i $\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\Psi_n)\right)$, dvs $P(\limsup |\Psi_n| = \infty) \in \{0,1\}$

$$*) \text{ idet } \forall n \geq 1: \sigma(\Psi_n) \perp \sigma(\Psi_m, m \geq n+1)$$

□

5)

(X_n) i.i.d.

Påstand: $E[|X_1|] < \infty \iff P(\limsup |X_n|/n = \infty) = 0$

Beweis:

$\Rightarrow$:

$$E[|X_1|] < \infty \xRightarrow{\text{US 16 opg. 1}} \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| \geq n) < \infty$$

$$\xRightarrow{\forall n \geq 1: X_n \sim X_1} \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n|/n \geq 1) < \infty$$

$$\xRightarrow{\substack{(X_n) \text{ uafh.} \\ + \text{Borel-Cantelli} \\ 2.11}} P(\limsup \{ |X_n|/n \geq 1 \}) = 0$$

$$\Rightarrow P(\liminf \{ |X_n|/n < 1 \}) = 1$$

$$\Rightarrow P(\limsup |X_n|/n = \infty) = 0$$

$\Leftarrow$:

Antag $P(\limsup |X_n|/n = \infty) \neq 0$, jvf. opg. 4)

gælder derfor, at $P(\limsup |X_n|/n = \infty) = 1$

Da $\liminf \{ |X_n|/n < 1 \} \subseteq \{ \limsup |X_n|/n = \infty \}^c$

ses at $P(\limsup \{ |X_n|/n \geq 1 \}) = 1$ og dermed

jvf. Borel-Cantelli 2.11, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq n) = \infty$$

Af opg. 1 på US 16 følger, at $E[|X_1|] = \infty$

□

Påstand: $E[|X_1|] < \infty \iff P(\limsup \frac{|S_n|}{n} < \infty) > 0$
($\iff P(\limsup \frac{|S_n|}{n} < \infty) = 1$)

Beweis:

$\implies$

Kolmogorovs Store Tals Lov s. 112 giver

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^+ \rightarrow E[X_1^+], \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^- \rightarrow E[X_1^-] \quad \text{n.o.}$$

$$\frac{1}{n} |S_n| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^+ + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^-$$

Dvs. $\frac{1}{n} |S_n|$ er domineret af en konvergent følge n.o. og dermed begrænset n.o., dvs.
 $P(\limsup \frac{|S_n|}{n} < \infty) = 1$

$\Leftarrow$

Antag at $E[|X_1|] = \infty$ j.f. den foregående opg. gælder dermed, at

$$\limsup \frac{|X_n|}{n} = \infty \quad \text{n.o.}$$

Dvs. $|X_n|/n$ er ubegrænset n.o.

$$\left| \frac{S_n - S_{n-1}}{n} \right| = \frac{|X_n|}{n} \quad \text{antager altså vilk.}$$

store værdier, dvs. vi kan vælge (for fast ω)

$$M > 0 \text{ vilk. store så } \forall n > M \quad \left| \frac{S_n - S_{n-1}}{n} \right| > M$$

$$\text{Da } \left| \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n} \frac{S_{n-1}}{n-1} \right| = \left| \frac{S_n - S_{n-1}}{n} \right| \quad \text{og} \quad \frac{n-1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \text{ ser}$$

vi at $\frac{S_n}{n}$ fluktuere vilk. meget, altså må

$$\left| \frac{S_n}{n} \right| \text{ være ubegrænset, dvs. } P(\limsup \frac{|S_n|}{n} = \infty) = 1$$

□

SS2, afleveringsopgave nr. 18, Gunna Hellebrand

Exc. 4.68

(X_n) i.i.d. X_1 er a.k. mht. λ , med tæthed

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{2} |x|^{a-1} & , |x| \leq 1 \\ 0 & , |x| > 1 \end{cases} , a > 0$$

Lad (b_n) være positive (ikke 0) tal

1)

Påstand: $\forall n \geq 1, q > 0 : E[X_n] = 0, E[|X_n|^q] = \frac{a}{a+q}$

Beweis:

$$E[X_n] = \int_{-1}^1 \frac{a}{2} |x|^{a-1} x \, dx = 0, \text{ da}$$

$x \mapsto \frac{a}{2} |x|^{a-1} x$ er en ulige fkt.

$$E[|X_n|^q] = \int_{-1}^1 \frac{a}{2} |x|^{a-1} |x|^q \, dx = \int_0^1 a |x|^{(a+q)-1} \, dx$$

$$= \int_0^1 a x^{(a+q)-1} \, dx = \left[a \frac{1}{a+q} x^{(a+q)} \right]_0^1 = \frac{a}{a+q}$$

□

ii)

$$\text{Påstand: } \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} b_n^2 < \infty$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n b_j X_j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ n.o. og i } L^2$$

Beris:

$$E[b_n X_n] = b_n E[X_n] = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(b_n X_n) &= E[(b_n X_n)^2] - E[b_n X_n]^2 = E[(b_n X_n)^2] \\ &= b_n^2 E[X_n^2] = b_n^2 \frac{a}{a+2} \end{aligned}$$

Af antagelsen følger:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}(b_n X_n) / n^2 = \frac{a}{a+2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} b_n^2 < \infty \text{ af}$$

De store tals lov (L^2 udgaven s. 100) følger, at

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n b_j X_j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ n.o. og i } L^2$$

□

Sandsynlighedsteori 2

Uge 8.

Forelæsninger: Hovedemnet er de store tals love. Udover sektionerne 4.7-4.13 skal vi gennemgå sektionerne 4.31, 4.32, 4.33 og 4.34 samt 4.36. Gennemgangen følger de udeliveredede noter *De store tals love* I og II samt de relevante sektionstillæg.

Ovelser: 1) Exc. 4.14. Vink: Vis og udnyt ulighed 3) på sidste ugeseddel.
2) Gør rede for at alle Binomial-fordelinger, Normal-fordelinger, Γ -fordelinger og Poisson-fordelinger er entydigt bestemt ved de tilhørende momenter.
3) Betragt sandsynlighedsfeltet $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \mu)$, hvor μ er Lebesgue målet restrikeret til $(0, 1)$. Ethvert $x \in (0, 1)$ kan skrives på formen $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot 2^{-i}$, hvor x_i er enten 0 eller 1. Opskrivningen er entydig, hvis vi forlanger, at antallet af 1-taller skal være så lille som muligt. D.v.s. vi udelukker opskrivninger, hvor x_i er alle 1 fra et vist trin at regne. Definier for $i \geq 1$

$$X_i : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad X_i(x) = x_i \quad \text{hvis } x \in (0, 1) \text{ og } X_i(x) = 0 \text{ ellers.}$$

Gør rede for at $(X_i)_{i \geq 1}$ er uafhængige stokastiske variable, som alle er uniformt fordelte over $\{0, 1\}$, d.v.s.

$$\mu(X_i = 0) = \mu(X_i = 1) = 1/2 \quad i \geq 1.$$

Lad ovennævnte $(Y_i)_{i \geq 1}$ betegne uafhængige stokastiske variable, som alle er uniformt fordelte mængden $\{0, 1\}$. Vis at $\sum_{i=1}^{\infty} Y_i \cdot 2^{-i}$ eksisterer i L^1 og er uniformt fordelt over $(0, 1)$. (Lidt sværere).

4) Gennemgå de to første uligheder på ugesedlen til Uge 7 sammen med fig. ulighed
Lad $(\nu(n))_{n \geq 1}$ være af formen $\nu(n) = \lfloor \lambda^n \rfloor$ $n \geq 1$ for et $\lambda > 1$, d.v.s. en såkaldt hurtigt voksende talfølge. Da findes der for alle $q > 0$ en konstant $C_{q,\lambda}$ så at

$$\sum_{n=k}^{\infty} 1/\nu(n)^q \leq C_{q,\lambda} \cdot 1/\nu(k)^q \quad k \geq 1.$$

5) Gennemgå sektion 4.9 del tre.

Afleveringsopgave: Exc. 4.29 eller fig.: Lad $f \in C(\mathbf{R})$ være givet. Definier

$$P_n f(x) := E[f(S_n^x/\bar{n})] \quad \text{for } n \geq 1 \text{ og } x \in [0, 1],$$

hvor $S_n^x \sim bi(n, x)$ for alle n og x ($bi(n, 0) := \delta_0$).

a) Udregn $P_n f(x)$, $E[S_n^x/n]$ og $Var(S_n^x/n)$.
b) Vis f.eks. ved brug af Chebyshev's ulighed, at

$$P(|S_n^x/n - x| > \epsilon) \leq (4n\epsilon^2)^{-1}$$

for alle $n \geq 1$, $x \in [0, 1]$ og $\epsilon > 0$.

c) Vis at $P_n f$ konvergerer uniformt mod f for $n \rightarrow \infty$. Vink: Da f er begrænset og uniformt kontinuert på $[0, 1]$, fås påstanden af b) idet

$$|P_n f(x) - f(x)| = |E[f(S_n^x/n) - f(x)]| \leq E[|f(S_n^x/n) - f(x)|].$$

Trykfejl. Side 86 linie 3 fra neden og side 97 linie 3 fra neden. Konstanten

$$\left(\frac{1}{2\pi \det \underline{\sigma}} \right)^{n/2} \quad \text{skal rettes til} \quad \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot \det \underline{\sigma}}}.$$

Side 93 linie 6 fra oven. Højresiden skal ændres til

$$\frac{|t-a|^n}{n!} \cdot E[|X|^n \cdot (2 \wedge \frac{|(t-a) \cdot X|}{n+1})]$$

Svend Erik Graversen

SS2, TØ nr. 17

1)

Exc. 4.14

$X_1, \dots, X_n$ s.v., $0 < q < \infty$

Påstand: $E\left[\left|\sum_{i=1}^n X_i\right|^q\right] \leq n^{(q-1)^+} \sum_{i=1}^n E[|X_i|^q]$

Basis:

En simpel konsekvens af ulighed 3) på US 16, da integralet er 'voksende'. $\square$

Basis for ulighed 3 på US 16:

$q \in (0, 1)$: $|s| \mapsto |s|^q$ er konvex, dvs. $|\sum u_j|^q \leq (\sum |u_j|)^q \leq \sum |u_j|^q$

$q = 1$: trekantsuligheden

$q > 1$: $|s| \mapsto |s|^q$ er konvex, dvs. $(\sum |u_j|/n)^q \leq \frac{1}{n} \sum |u_j|^q$

$$\Rightarrow |\sum u_j|^q \leq (\sum |u_j|)^q \leq n^{q-1} \sum |u_j|^q$$

$\square$

2)

Vi skal jvf. s. 95 vise at $t \mapsto E[e^{tX}]$ er endelig i et åbent interval omkring 0 for en række forskellige s.v.

a)

Antag $X \sim \text{bi}(n, p)$, dvs. $P(X=x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & x=0, \dots, n \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

$$t \in \mathbb{R}: E[e^{tX}] = \int e^{tx} P_X(dx) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} e^{ti} < \infty$$

b)

Antag $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, dvs. X a.k. med tætheds

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$t \in \mathbb{R}: E[e^{tX}] = \int e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \lambda_1(dx) =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2 + 2\sigma^2 tx/2\sigma^2} \lambda_1(dx) =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{(-x^2 - \mu^2 + 2x\mu + 2\sigma^2 tx)/2\sigma^2} \lambda_1(dx) =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{(-x^2 - \mu^2 + 2x(\mu + \sigma^2 t))/2\sigma^2} \lambda_1(dx) =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x - (\mu + \sigma^2 t))^2/2\sigma^2} e^{\sigma^2 t^2/2 + \mu t} \lambda_1(dx) = e^{\sigma^2 t^2/2 + \mu t} < \infty$$

$$\text{, da } [(\mu + \sigma^2 t)^2 = \mu^2 + \sigma^4 t^2 + 2\mu\sigma^2 t]$$

c)

Antag $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, d.h. X a.k. mit Dicht.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-x/\beta} & , x > 0 \\ 0 & \text{ellw.} \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} E[e^{tX}] &= \int_0^\infty e^{tx} \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-x/\beta} \lambda_1(dx) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-x(\frac{1}{\beta}-t)} \lambda_1(dx) \\ &= \frac{(\frac{1}{\beta}-t)^\alpha}{\beta^\alpha} \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(\frac{1}{\beta}-t)^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-x/(\frac{1}{\beta}-t)^{-1}} \lambda_1(dx) = \frac{(\frac{1}{\beta}-t)^\alpha}{\beta^\alpha} < \infty \end{aligned}$$

d)

Antag $X \sim \text{po}(\lambda)$, d.h. $P(X=x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, & x \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{ellw.} \end{cases}$

$t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} E[e^{tX}] &= \sum_{x=0}^\infty e^{tx} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x=0}^\infty e^{-\lambda} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} \\ &= e^{\lambda(e^t-1)} \sum_{x=0}^\infty e^{-\lambda e^t} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{\lambda(e^t-1)} < \infty \end{aligned}$$

3)

$$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu) \quad , \quad \mu \equiv \lambda_1|_{(0,1)}$$

If. beskrivelsen er det klart, at $X_i \in \{0,1\}$, og

$$\mu(X_i = 0) = \mu(\{x \in (0,1) \mid \lfloor 2^i x \rfloor \text{ lige}\}) = 1/2$$

$$\mu(X_i = 1) = \mu(\{x \in (0,1) \mid \lfloor 2^i x \rfloor \text{ ulige}\}) = 1/2$$

Dvs. X_i ene er uniformt fordelte på $\{0,1\}$

At X_i ene er uafhængige følger ved at se på passende $\lfloor 2^i x \rfloor$ for $x \in (0,1)$.

Antag $(Y_i) \perp$ og Y_i uniformt fordelte m.g.d. $\{0,1\}$

Påstand: $\sum_{i=1}^{\infty} Y_i \cdot 2^{-i} \in L^1(\mu)$ og er uniformt fordelt over $(0,1)$

Bewis:

Det er klart, at $\sum_{i=1}^{\infty} Y_i \cdot 2^{-i} \leq 1$, dvs. $\sum_{i=1}^{\infty} Y_i \cdot 2^{-i} \in L^1(\mu)$

Antag U s.v. som er uniformt fordelt på $(0,1)$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ : \varphi_U(t) := E[e^{itU}] = \int_0^1 e^{itx} dx = [e^{itx}/it]_0^1 = \frac{e^{it} - 1}{it}$$

Ifølge 4.18 gælder

$$\varphi_{\sum_{j=1}^n Y_j \cdot 2^{-j}}(t) = \prod_{j=1}^n \varphi_{Y_j}(2^{-j}t) = \prod_{j=1}^n E[e^{it_j \cdot 2^{-j}t}]$$

$$= \frac{1}{2^n} \prod_{j=1}^n (1 + e^{i2^{-j}t}) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{2^n-1} (e^{it/2^n})^j = \frac{1}{2^n} \frac{e^{it} - 1}{e^{it/2^n} - 1}$$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{e^{it} - 1}{it}$, af entydighedsætn. for karakteristiske fkt.

følger at $\sum_{i=1}^{\infty} Y_i \cdot 2^{-i}$ er uniformt fordelt på $(0,1)$

idet vi har brugt, at hvis $X_n \rightarrow X$ n.o.,
 gælder jvf. Lebesgues sætn. om domineret konvergens, at
 $\varphi_{X_n} \rightarrow \varphi_X$

□

4)

Se US 16 for beviser for de to første uligheder

Lad $\lambda > 1$, og antag $(v(n))_{n \geq 1} : v(n) = [\lambda^n]$, $n \geq 1$

Påstand: $\forall q > 0 \exists C_{q,\lambda} : \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{v(n)^q} \leq C_{q,\lambda} \frac{1}{v(k)^q}$, $k \geq 1$

Bevis:

Det er klart (da $\lambda > 1$), at $\exists m \geq 1 \forall n \geq m : \lambda^n \cdot \lambda > \lambda^n + 1$
 og dermed $\exists m \geq 1, c > 1 \forall n \geq m : v(n+1) \geq c \cdot v(n)$, dette
 giver flg. grove vurderinger for vilkårlige $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{v(n)^q} &\leq \frac{m}{v(k)^q} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{(c^{n-m} v(k))^q} = \left(m + \sum_{j=1}^{\infty} (c^{-q})^j\right) \frac{1}{v(k)^q} \\ &= \left(m + \frac{1}{1-c^{-q}}\right) \frac{1}{v(k)^q} = C_{q,\lambda} \frac{1}{v(k)^q}, \text{ hvor } C_{q,\lambda} = m + \frac{c^q}{c^q - 1} \end{aligned}$$

□

5)

Se Hoffmann!

SS2, afleveringsopgave nr. 17, Gunnar Hellmünd

1)

US-opg.:

$$f \in C^0(\mathbb{R})$$

Definer $P_n f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall n \geq 1, x \in [0, 1]: P_n f(x) = E[f(S_n^x/n)] \text{ , } S_n^x \sim \text{bi}(n, x) \\ (\text{bi}(n, 0) := \delta_0 \text{ [Dirac-målt i 0]})$$

a)

Lad $n \geq 1, x \in [0, 1]$ være givet

$$x=0: P_n f(x) = E[f(S_n^0/n)] = f(0)$$

$$x \in (0, 1]: P_n f(x) = E[f(S_n^x/n)] = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} f(i/n)$$

$$\begin{aligned} E[S_n^x/n] &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \cdot i/n = \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} x^i (1-x)^{(n-1)-(i-1)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^{j+1} (1-x)^{(n-1)-j} = x \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{(n-1)-j} = x \end{aligned}$$

(resultatet gælder (trivielt) også for $x=0$)

$$\text{Var}(S_n^x/n) = E[(S_n^x/n)^2] - E[S_n^x/n]^2$$

$$\begin{aligned}
E[(S_n^x/n)^2] &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \frac{i^2}{n^2} \\
&= \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} x^i (1-x)^{(n-1)-(i-1)} \frac{i}{n} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{(n-1)-j} \frac{j+1}{n} x \\
&= \frac{x}{n} + \frac{(n-1)x}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{(n-1)-j} \frac{j}{n-1} = \frac{x}{n} + \frac{(n-1)x^2}{n} = \frac{x(1-x)}{n} + x^2
\end{aligned}$$

(resultatet gælder også for $x=0$)

$$\text{Dvs. } \text{Var}(S_n^x/n) = \frac{x(1-x)}{n} + x^2 - x^2 = \frac{x(1-x)}{n}$$

b)

Påstand: $\forall n \geq 1, x \in [0,1], \varepsilon > 0$:

$$P(|S_n^x/n - x| > \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

Beweis:

$$P(|S_n^x/n - x| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int |S_n^x/n - x|^2 dP = \frac{x(1-x)}{\varepsilon^2 n}$$

jvf. Markovs ulighed (prop. 9 s. 46)

Da $\frac{d}{dx}(x(1-x)) = 1-2x$ ser vi, at $x \mapsto x(1-x)$ har toppkt. i $x=1/2$, dvs. $\forall x \in [0,1] : x(1-x) \leq 1/4$

□

c)

Påstand: $P_n f \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ på $[0,1]$

Beweis:

f er uniformt kontinuert på $[0,1]$ (da $f \in C^0(\mathbb{R})$ og $[0,1]$ er en kompakt delmængde af $\mathbb{R}$)

Deraf følger, at $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in [0, 1]: |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
 og $\exists M \in \mathbb{R}_+ \forall x, y \in [0, 1]: |f(x) - f(y)| \leq M$

$$|P_n f(x) - f(x)| = |E[f(S_n^x/n) - f(x)]| \leq E[|f(S_n^x/n) - f(x)|]$$

$$= \int_{\{S_n^x/n - x > \delta\}} |f(S_n^x/n) - f(x)| dP + \int_{\{S_n^x/n - x \leq \delta\}} |f(S_n^x/n) - f(x)| dP$$

$$\leq \frac{M}{4n\delta^2} + \varepsilon \leq 2\varepsilon \quad \text{for } n \geq \frac{M}{\varepsilon 4\delta^2}$$

□

Sandsynlighedsteori 2

Uge 7.

Forelæsninger: Efter at have afsluttet gennemgangen af sektion 4.18 og det såkaldte *Momentproblem* er det næste store emne *de store tals love*, d.v.s. sektionerne 4.7-4.13 i Kapitel 4. I denne forbindelse skal vi også gennemgå sektion 2.18. Der henvises i øvrigt til notatet *De store tals love I*.

Øvelser: I det flg. betegner $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et givent sandsynlighedsfelt, hvorpå alle omtalte stokastiske variable antages defineret.

1) Vis ved at benytte integrationsformlen side 49 i noterne, at for ethvert $p > 0$ gælder

$$X \in L^p(P) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n^{1/p}) < \infty.$$

og

$$E[|X|^p] = p \int_0^{\infty} t^{p-1} \cdot P(|X| > t) dt.$$

Vis endvidere at hvis Y er en heltallig ikke-negativ variabel, så er

$$E[Y] = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y > n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(Y \geq n).$$

2) Exc. 5.5 og 5.6.

3) Lad $(X_n)_{n \geq 1}$ betegne en følge af stokastiske variable. Vis ved hjælp af Borel-Cantelli Lemmaet, at der for ethvert $q > 0$ gælder

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[|X_n|^q] < \infty \Rightarrow X_n \rightarrow 0 \text{ P-n.o.}$$

4) Lad $\{(X_i)_{i \geq 1}, N\}$ være uafhængige stokastiske variable, så at $N \sim po(\lambda)$ og $P(X_i = 1) = P(X_i = 0) = 1/2$ for alle $i \geq 1$. Definér

$$S_1 := \sum_{i=1}^N X_i \quad \text{og} \quad S_2 := \sum_{i=1}^N (1 - X_i),$$

hvor $\sum_{i=1}^{\infty} 1 \cdot := 0$. Beregn den simultane karakteristiske funktion og deducer herudfra, at S_1 og S_2 er uafhængige og hver især $po(\lambda/2)$ -fordelt.

Aflæveringsopgave: Lad X og Y betegne to uafhængige stokastiske variable, så at $X \sim \Gamma(\alpha_1, \beta)$ og $Y \sim \Gamma(\alpha_2, \beta)$, hvor vi har benyttet parametriseringen i sektion 4.23.

Vis at

$$X/\beta \sim \Gamma(\alpha_1, 1) \quad \text{og} \quad X + Y \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta).$$

Definér for $t \in \mathbf{R}$, $\alpha, \beta > 0$

$$\varphi(t, \alpha, \beta) := E[e^{itX}] \quad \text{hvor} \quad X \sim \Gamma(\alpha, \beta).$$

Vis nu

$$\varphi(t, \alpha, \beta) = \varphi(t\beta, \alpha, 1) \quad \text{og} \quad \varphi(t, \alpha_1 + \alpha_2, \beta) = \varphi(t, \alpha_1, \beta) \cdot \varphi(t, \alpha_2, \beta)$$

samt at

$$\varphi(t, 1, 1) = (1 - it)^{-1} \left(= \frac{1}{1 + t^2} + i \cdot \frac{t}{1 + t^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} \cdot e^{i \arctan t} \right).$$

og

$$d/dt \varphi(t, \alpha, 1) = i\alpha \cdot \varphi(t, 1, 1) \cdot \varphi(t, \alpha, 1).$$

Vink. Den sidste formel fås ved differentiation under integraltegnet.

Bemærkning. Løsningsformlen for en 1.-ordens lineær differentialligning giver derfor, at for alle $t \in \mathbf{R}$ og $\alpha > 0$ er

$$\begin{aligned} \varphi(t, \alpha, 1) &= \exp \left(i\alpha \int_0^t \varphi(s, 1, 1) ds \right) = \\ &= \exp \left(i\alpha \cdot \left(\int_0^t (1 + s^2)^{-1} ds + i \int_0^t s/(1 + s^2) ds \right) \right) = \\ &= \exp \left(\alpha(-1/2 \log(1 + t^2) + i \cdot \arctan t) \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} \right)^{\alpha} \cdot e^{i\alpha \arctan t}. \end{aligned}$$

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ss-felt (hvorpå de flg. s.v. er defineret)

1)

Påstand: $\forall p > 0: X \in L^p(P) \iff \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n^{1/p}) < \infty$

Bewis:

$$\int |X|^p dP = \underbrace{\int_0^{\infty} P(|X|^p > t) \lambda_1(dt)}_{\substack{\text{integrationsformel} \\ \text{s. 49}}} = \int_0^{\infty} P(|X| > t^{1/p}) \lambda_1(dt) \quad (*)$$

$\Rightarrow$

$$X \in L^p(P)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n^{1/p}) 1_{[n-1, n)}(t) \leq P(|X| > t^{1/p}), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n^{1/p}) = \int_0^{\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n^{1/p}) 1_{[n-1, n)}(t)}_{\substack{\text{monoton} \\ \text{hæmmet} \\ \text{sett}}} \lambda_1(dt)$$

$$\leq \int_0^{\infty} P(|X| > t^{1/p}) \lambda_1(dt) \stackrel{(*)}{=} \int |X|^p dP < \infty$$

$\Leftarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n^{1/p}) < \infty$$

$$P(|X| > t^{1/p}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n^{1/p}) \cdot 1_{[n, n+1)}(t), \quad t \in [1, \infty)$$

$$\text{Dvs. } \int |X|^p dP = \int_0^{\infty} P(|X| > t^{1/p}) \lambda_1(dt)$$

$$= \int_0^1 P(|X| > t^{1/p}) \lambda_1(dt) + \int_1^{\infty} P(|X| > t^{1/p}) \lambda_1(dt)$$

$$\leq 1 + \int_1^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n^{1/p}) 1_{[n, n+1)}(t) \lambda_1(dt) \stackrel{\substack{\text{monoton} \\ \text{hæmmet}}}{=} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n^{1/p}) < \infty$$

□

Påstand: $E[|X|^p] = p \int_0^\infty t^{p-1} P(|X| > t) dt, p > 0$

Beris:

Jef. (*):

$$E[|X|^p] = \int_0^\infty P(|X| > t^{1/p}) \lambda_1(dt)$$

$$\stackrel{\text{sætning 3}}{=} \int_0^\infty P(|X| > t) \lambda_{\varphi}(dt)$$

$$\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ t \in \mathbb{R}_+: \varphi(t) = t^{1/p}$$

$$\stackrel{\substack{\text{sætning 4} \\ (x)}}{=} \int_0^\infty P(|X| > t) p t^{p-1} \lambda_1(dt)$$

$$= p \int_0^\infty t^{p-1} P(|X| > t) dt$$

(x):

Lad $x \in \mathbb{R}_+$ være vilkårlig

$$\begin{aligned} \lambda_{\varphi}([0, x]) &= \lambda_1(\varphi^{-1}[0, x]) = \lambda_1([0, x^p]) = x^p \\ &= \int_0^x p s^{p-1} \lambda_1(ds) \end{aligned}$$

Af korollar 5.24 + def. 5.40 følger at λ_{φ} er a.k. mht. λ_1 med tæthed $t \mapsto p t^{p-1}$

□

Paßsland: $P(I \in \mathbb{N}_0) = 1 : E[I] = \sum_{n=0}^{\infty} P(I > n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(I \geq n)$

Beweis:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(I \geq n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(I > n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} P(I=i)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(I=n) = \int I \, dP = E[I]$$

↑
rechner af positive led

□

2)

Exc. 5.5

X s.v.

Paßsland:

Huis $\liminf_{t \rightarrow 0} \frac{2 - \varphi_X(t) - \varphi_X(-t)}{t^2} =: m < \infty$ gelder

$E[X^2] < \infty$, $\varphi_X \in C^2(\mathbb{R})$, $\varphi_X''(0) = -E[X^2] = -m$

Beweis:

$$\frac{2 - \varphi_X(t) - \varphi_X(-t)}{t^2} \underset{\substack{\text{opg. 1} \\ \text{vs 15} \\ \text{Exc 5.4}}}{=} \frac{2 - 2E[\cos(Xt)]}{t^2} = 2E\left[\frac{1 - \cos(Xt)}{t^2}\right]$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(Xt)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X \sin(Xt)}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X^2 \cos(Xt)}{2} = \frac{X^2}{2}$$

$$E[X^2] = \int |X|^2 dP = \int \liminf_{t \rightarrow 0} 2 \frac{1 - \cos(Xt)}{t^2} dP \underset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{t \rightarrow 0} 2E\left[\frac{1 - \cos(Xt)}{t^2}\right] = m$$

Dvs. $E[X^2] < \infty$ og dermed, jvf resultatet på s. 92
 $\varphi_X \in C^2(\mathbb{R})$, $\varphi_X''(0) = i^2 E[X^2] = -E[X^2]$

Da $\liminf_{t_n \rightarrow 0} 2 E\left[\frac{1 - \cos(Xt_n)}{t_n^2}\right] = m$ (for vilk. $t_n \rightarrow 0$)

$\exists (n_k), h \in L^1(P) : 2 E\left[\frac{1 - \cos(Xt_{n_k})}{t_{n_k}^2}\right] \leq \int h dP$ (husk $P(\mathbb{R}) < \infty$)

og $\lim_{k \rightarrow \infty} 2 E\left[\frac{1 - \cos(Xt_{n_k})}{t_{n_k}^2}\right] = m$, dvs. jvf.

Lebesgues sætn. (da $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(Xt)}{t^2} = \frac{X^2}{2} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(Xt_{n_k})}{t_{n_k}^2} = \frac{X^2}{2}$).

$$\begin{aligned} m &= \lim_{k \rightarrow \infty} 2 E\left[\frac{1 - \cos(Xt_{n_k})}{t_{n_k}^2}\right] = 2 \int \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(Xt_{n_k})}{t_{n_k}^2} dP \\ &= 2 \int \frac{X^2}{2} dP = E[X^2] \end{aligned}$$

Altså gælder, at $-E[X^2] = -m$

□

Exc. 5.6

φ, ψ karakteristiske funktioner (Antag $\varphi = \varphi_X, \psi = \varphi_Y$)

Påstand:

$|\varphi|^2, \operatorname{Re} \varphi, \varphi \cdot \psi, \bar{\varphi}$ er karakteristiske fkt.

$\operatorname{Im} \varphi$ er ikke en karakteristisk fkt.

Beweis:

Jvf. exc. 5.4 (opg. 1 og 5) er $|\varphi|^2$ en karakteristisk fkt. for $X+Y$, hvor $X \perp Y, X \sim Y$, desuden er

$\operatorname{Re} \varphi$ en karakteristisk fkt. for $X+Y$, hvor

$X \perp Y$ og $P(Y=1)=P(Y=-1)=1/2$

Jvf. 4.18.7 er $\varphi \cdot \psi$ en karakteristisk fkt. for $X+Y, X \perp Y$

og jvf. 4.18.6 er $\bar{\varphi}$ en karakteristisk fkt. for $-X$.

Antag at $\operatorname{Im} \varphi$ er en karakteristisk fkt.:

$$\operatorname{Im} \varphi(t) = \operatorname{Im} E[e^{iXt}] = i \int \sin(Xt) dP$$

$$\stackrel{4.18.2}{\Rightarrow} 1 = \operatorname{Im} \varphi(0) = i \int \sin(X \cdot 0) dP = 0 \quad \text{↯}$$

□

Påstand:

$$\liminf_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \operatorname{Re} \varphi(t)}{t} = 0 \implies \forall t \in \mathbb{R}: \varphi(t) = 1$$

Beweis:

Jf. Exc. 5.5, gælder $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ og $E[X^2] = 0$

og (udfra resultatet s. 92) $\varphi''(t) = E[-X^2 e^{itX}]$

Da $E[| -X^2 e^{itX} |] = E[X^2] = 0$ er $\varphi''(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Jf. sætn. 2 + $\varphi'' \in C^0(\mathbb{R})$, dvs. $\varphi'(t) = k_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

og $\varphi(t) = t \cdot k_0 + k_1$, men $\varphi(0) = 1 = k_1$ og $|\varphi| \leq 1$

dvs. $\varphi(t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. □

Påstand: $\forall q > 2$: $e^{-|t|^q}$ er ikke en karakteristisk fkt.

Beweis:

Antag at $e^{-|t|^q} = \varphi(t)$ er en karakteristisk fkt.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \operatorname{Re} \varphi(t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-t^q}}{t^2} \stackrel{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-q e^{-t^q} t^{q-1}}{2t}$$

$$\stackrel{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{q^2 e^{-t^q} t^{(q-1) \cdot 2} - q(q-1) e^{-t^q} t^{q-2}}{2} = 0$$

Af det ovenstående flg. at $e^{-|t|^q} = \varphi(t) \equiv 1$ ⚡

3)

$(X_n)_{n \geq 1}$ s.v.

Påstand: $\forall \varepsilon > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} E[|X_n|^2] < \infty \Rightarrow X_n \rightarrow 0 \text{ P-n.o.}$

Beweis:

Lad $t > 0$ være vilkårlig

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > t) \leq \frac{1}{t^2} \sum_{n=1}^{\infty} E[|X_n|^2] < \infty$$

$\uparrow$
prop. 9
Markov uligh.

Af Borel-Cantelli (lemma 8) følger at

$$P(\limsup_n \{|X_n| > t\}) = 0, \text{ dvs.}$$

$$\exists N \geq 1 \forall n \geq N: |X_n| \leq t \text{ n.o.}$$

t var vilkårlig, dvs.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1 \forall n \geq N: |X_n| \leq \varepsilon \text{ n.o.}, \text{ dvs. } X_n \rightarrow 0 \text{ P-n.o.}$$

□

4)

(X_n) , N uafh. s.v., $N \sim \text{po}(\lambda)$, $\forall n \geq 1: P(X_n = 1) = P(X_n = 0) = 1/2$ (*)

Definir

$$S_1 := \sum_{i=1}^N X_i, S_2 := \sum_{i=1}^N (1-X_i), \text{ med } \sum_{i=1}^0 \cdot := 0$$

(Bm da vi f.eks. har $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^n X_i) 1_{\{N=n\}}$ er S_1, S_2 s.v.)

$$\Phi_{(S_1, S_2)}(\underline{t}) = E[e^{i\langle (S_1, S_2), \underline{t} \rangle}] = E[e^{iS_1 t_1} e^{iS_2 t_2}]$$

$$= E[e^{i\sum_{i=1}^N X_i t_1} e^{i\sum_{i=1}^N (1-X_i) t_2}]$$

$$= E\left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{i\sum_{i=1}^n X_i t_1} e^{i\sum_{i=1}^n (1-X_i) t_2} 1_{\{N=n\}}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} E[e^{i\sum_{i=1}^n X_i t_1} e^{i\sum_{i=1}^n (1-X_i) t_2}]$$

$$= e^{-\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} E[e^{i\sum_{i=1}^n X_i t_1} e^{i\sum_{i=1}^n (1-X_i) t_2}]$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} \prod_{j \in I} e^{it_1} \prod_{j \notin I} e^{it_2} \int 1_{\{X_j = 1\}} \prod_{j \notin I} 1_{\{X_j = 0\}} d\mathbb{P}$$

$$= e^{-\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} 2^{-n} \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} e^{i|I|t_1} e^{i(n-|I|)t_2} \quad (I \subseteq \{1, \dots, n\} \mid I)$$

$$= e^{-\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} 2^{-n} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} e^{ijt_1} e^{i(n-j)t_2}$$

$$= e^{-\lambda} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda/2)^n}{n!} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (e^{it_1})^j (e^{it_2})^{n-j} \right)$$

$$= e^{-\lambda} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda/2)^n}{n!} (e^{it_1} + e^{it_2})^n \right)$$

Binomialformlen
s. Thm 5.8

$$= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda/2 (e^{it_1} + e^{it_2}))^n}{n!} = e^{-\lambda + \lambda/2 (e^{it_1} + e^{it_2})}$$

$$= e^{\lambda/2 e^{it_1} - \lambda/2} e^{\lambda/2 e^{it_2} - \lambda/2}$$

Lad $Z_1, Z_2 \sim \text{po}(\lambda/2)$ $Z_1 \perp Z_2$, da ser vi jvf opg. 2 på VSIS, at $\varphi_{(S_1, S_2)}(t_1, t_2) = \varphi_{Z_1}(t_1) \varphi_{Z_2}(t_2)$

$$\varphi_{(S_1, S_2)}(t, 0) = \varphi_{Z_1}(t) \varphi_{Z_2}(0) = \varphi_{Z_1}(t)$$

$$\text{og tilsvarende } \varphi_{(S_1, S_2)}(0, t) = \varphi_{Z_2}(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{men } \varphi_{(S_1, S_2)}(t, 0) = E[e^{i \langle (S_1, S_2), (t, 0) \rangle}] = E[e^{i S_1 t}] = \varphi_{S_1}(t)$$

$$\text{og tilsvarende } \varphi_{(S_1, S_2)}(0, t) = \varphi_{S_2}(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{dvs. } \varphi_{Z_1} = \varphi_{Z_2} = \varphi_{S_1} = \varphi_{S_2}, \quad \text{dvs. } S_1, S_2 \sim \text{po}(\lambda/2)$$

Af resultatet s. 91 følger, at $S_1 \perp S_2$

Vi har altså vist:

Påstand: $S_1 \perp S_2$, $S_1, S_2 \sim \text{po}(\lambda/2)$

SS2, afleveringsopgave nr. 16, Gunnar Hellmund

$$X \perp\!\!\!\perp Y, \quad X \sim \Gamma(\alpha_1, \beta), \quad Y \sim \Gamma(\alpha_2, \beta)$$

$$\text{Påstand: } X/\beta \sim \Gamma(\alpha_1, 1), \quad X+Y \sim \Gamma(\alpha_1+\alpha_2, \beta)$$

Beweis:

$$\text{Definer } T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad T(x) = x/\beta$$

$$\text{Vi ser, at } T^{-1}(u) = S(u) = \beta u$$

Da $|T'(x)| = |1/\beta| > 0$, $x \in \mathbb{R}_+$ ser vi at T opfylder betingelserne i korollært 5.86, da

$$|T'(S(u))|^{-1} = |1/\beta|^{-1} = \beta.$$

fås jvf. 4.23 at

$$\begin{aligned} \text{en tæthed for } X/\beta \text{ er } & \beta \frac{(\beta u)^{\alpha_1-1}}{\beta^{\alpha_1} \Gamma(\alpha_1)} e^{-\beta u/\beta} \\ &= \frac{u^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)} e^{-u}, \text{ dvs. } X/\beta \sim \Gamma(\alpha_1, 1) \end{aligned}$$

Jvf. opg. 3 VS10 er en tæthed for $X+Y$:

$$\begin{aligned} \int f_X(t-s) f_Y(s) \lambda_1(ds) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_1-1}}{\beta^{\alpha_1} \Gamma(\alpha_1)} \frac{s^{\alpha_2-1}}{\beta^{\alpha_2} \Gamma(\alpha_2)} e^{-(t-s)/\beta - s/\beta} e^{-s/\beta} ds \\ &= \frac{1}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} \Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} e^{-t/\beta} \int_0^t \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} (t-s)^{\alpha_1-1} s^{\alpha_2-1} ds \\ &= \frac{t^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} \Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} e^{-t/\beta} \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} (1-s)^{\alpha_1-1} (s)^{\alpha_2-1} \frac{ds}{t} \\ &= \frac{t^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} \Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} e^{-t/\beta} \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} (1-s)^{\alpha_1-1} s^{\alpha_2-1} ds \end{aligned}$$

$$= \frac{t^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1}}{\beta^{\alpha_1 + \alpha_2} \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} e^{-t/\beta} \quad \text{jef def. på beta fordelingen}$$

(se Hoffmann s. 136)

Dvs. jef. 4.23 er $X+Y \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$

□

Definer $t \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$:

$$\varphi(t, \alpha, \beta) := E[e^{itX}] \quad , \quad X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$$

Påstand: $\varphi(t, \alpha, \beta) = \varphi(t\beta, \alpha, 1)$

$$\varphi(t, \alpha_1 + \alpha_2, \beta) = \varphi(t, \alpha_1, \beta) \varphi(t, \alpha_2, \beta)$$

Beweis:

$$\varphi(t, \alpha, \beta) = E[e^{itX}] = E[e^{i \frac{X}{\beta} t\beta}] = \varphi(t\beta, \alpha, 1)$$

jef. ovenstående og entydighedsætn. for karakteristiske funktioner.

Jef. 4.18.7 og ovenstående:

$$\begin{aligned} \text{er } \varphi(t, \alpha_1 + \alpha_2, \beta) &= E[e^{i(X+Y)t}] = E[e^{itX}] E[e^{itY}] \\ &= \varphi(t, \alpha_1, \beta) \varphi(t, \alpha_2, \beta) \end{aligned}$$

□

Påstand:

$$\varphi(t, 1, 1) = (1 - it)^{-1} \left(= \frac{1}{1+t^2} + i \frac{t}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} e^{i \arctan t} \right)$$

Beris:

$$\begin{aligned} \varphi(t, 1, 1) &= E[e^{iXt}] = \int e^{iXt} dP = \int e^{iXt} P_X(dx) \\ &\stackrel{\text{setn. 3}}{=} \int_0^\infty e^{iXt} \frac{x^{1-1}}{1! \Gamma(1)} e^{-x/1} dx = \int_0^\infty e^{-x} e^{iXt} dx \\ &\stackrel{\text{setn. 4. + 7.23}}{=} \int_0^\infty e^{-x} \cos(xt) dx + i \int_0^\infty e^{-x} \sin(xt) dx \end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty e^{-x} \cos(xt) dx + i \int_0^\infty e^{-x} \sin(xt) dx$$

$$= \left[\frac{e^{-x} (t \sin(xt) - \cos(xt))}{t^2 + 1} \right]_0^\infty + i \left[\frac{e^{-x} (t \cos(xt) + \sin(xt))}{t^2 + 1} \right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{t^2 + 1} + i \frac{t}{t^2 + 1} = (1 - it)^{-1}$$

□

Påstand: $\frac{d}{dt} \varphi(t, \alpha, 1) = i\alpha \varphi(t, 1, 1) \varphi(t, \alpha, 1)$

Beris:

Idet $e^{iXt} \in C^\infty(\mathbb{R})$ og $|D[e^{iXt}]| = |ixe^{iXt}| = |x| \in L^1(P_X)$

fås af opg. 1b) vs B at

$$\frac{d}{dt} \varphi(t, \alpha, 1) = \frac{d}{dt} E[e^{iXt}] = \frac{d}{dt} \int e^{iXt} P_X(dx)$$

$$= \int ix e^{iXt} P_X(dx) \stackrel{4.23}{=} \int_0^\infty ix e^{iXt} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-x} \lambda(dx)$$

$$= i\alpha \int_0^{\infty} \frac{x^{(\alpha+1)-1}}{\Gamma(\alpha+1)} e^{-x} e^{ixt} \lambda_1(dt) = i\alpha \varphi(t, \alpha+1, 1)$$

$$= i\alpha \varphi(t, 1, 1) \varphi(t, \alpha, 1)$$

□

Sandsynlighedsteori 2

Konvekse funktioner.

I det følgende betegner $J \subseteq \mathbb{R}$ et interval med endepunkter v_J og h_J , hvor $-\infty \leq v_J < h_J \leq \infty$. $J^\circ :=]v_J, h_J[$.

Notation. $l : J \rightarrow \mathbb{R}$ siges at være *affin*, hvis

$$l(x) = ax + b \quad x \in J \quad \text{hvor } a, b \in \mathbb{R}.$$

$\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ siges at være *konveks*, hvis

$$\varphi(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha\varphi(x) + (1 - \alpha)\varphi(y) \quad x, y \in J, \alpha \in [0, 1].$$

Affine funktioner er konvekse, og Middelværdisætningen viser, at hvis J er åben og φ differentiabel i J , er φ konveks, hvis $x \mapsto \varphi'(x)$ er voksende, f. eks. hvis φ'' eksisterer og er ikke-negativ. Desuden er ethvert punktvis supremum af konvekse funktioner igen konvekt, hvis det er overalt endeligt.

Lad i det følgende φ betegne en given konveks funktion. Definitionsligningen viser, at $\{\varphi \leq a\}$ for ethvert $a \in \mathbb{R}$ er en konvekse delmængde, d.v.s. et delinterval i J .

$$\{\varphi > a\} = J \setminus \{\varphi \leq a\}$$

er derfor enten et delinterval i J eller en foreningsmængde af to sådanne. Heraf følger at

$$\varphi(x+) := \lim_{y \downarrow x} \varphi(y) \quad \text{og} \quad \varphi(x-) := \lim_{y \uparrow x} \varphi(y) \quad \text{eksisterer i } \bar{\mathbb{R}} \text{ for } x \in J.$$

Endvidere eksisterer $\varphi(v_J+)$ og $\varphi(h_J-)$.

Bevis. Vi ser kun på $\varphi(\cdot-)$, da den anden går analogt. Lad $x \in J \cup \{h_J\}$ være givet. For ethvert $a \in \mathbb{R}$ har vi

$$\limsup_{y \uparrow x} \varphi(y) > a \Rightarrow \exists \epsilon > 0 \mid x - \epsilon, x \subseteq \{\varphi > a\} \Rightarrow \liminf_{y \uparrow x} \varphi(y) \geq a.$$

Dette viser, at

$$\limsup_{y \uparrow x} \varphi(y) = \liminf_{y \uparrow x} \varphi(y)$$

og dermed, at $\varphi(x-)$ eksisterer i $\bar{\mathbb{R}}$.

$$\varphi(x) \geq \varphi(x+) \vee \varphi(x-) \quad x \in J.$$

Bevis. Beviserne er igen ens, så vi viser kun $\varphi(\cdot) \geq \varphi(\cdot+)$. Lad $x < y$ være punkter i J .

$$\begin{aligned} \varphi(x+) &= \limsup_{z \downarrow x} \varphi(z) = \limsup_{\alpha \uparrow 1} \varphi(\alpha x + (1 - \alpha)y) \\ &\leq \limsup_{\alpha \uparrow 1} \alpha\varphi(x) + \limsup_{\alpha \uparrow 1} (1 - \alpha)\varphi(y) = \varphi(x). \quad \diamond \end{aligned}$$

Kontinuitet. φ og dermed enhver konvekse funktion er kontinuert i J° .

Bevis. Lad $x \in J^\circ$ være givet. Da J° er åben og φ konveks, er

$$\varphi(x) \leq \frac{1}{2}(\varphi(x-h) + \varphi(x+h)) \quad \text{for } h \text{ lille,}$$

d.v.s.

$$\varphi(x) \leq \frac{1}{2} \limsup_{h \downarrow 0} (\varphi(x-h) + \varphi(x+h)) = \frac{1}{2}(\varphi(x-) + \varphi(x+)).$$

Hvilket sammen med uligheden ovenfor viser, at $\varphi(x) = \varphi(x-) = \varphi(x+)$. $\diamond$

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(x_0)}{y - x_0} \leq \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \quad y < x_0 < x \text{ i } J.$$

Bevis. Lad $y < x_0 < x$ i J være givet.

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(x_0)}{y - x_0} \leq \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)(\varphi(y) - \varphi(x_0)) \geq (x_0 - y)(\varphi(x_0) - \varphi(x)) \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x_0) \leq \frac{x - x_0}{x - y} \varphi(y) + (1 - \frac{x - x_0}{x - y}) \varphi(x)$$

hvilket er opfyldt, da

$$x_0 = \frac{x - x_0}{x - y} \cdot y + (1 - \frac{x - x_0}{x - y}) \cdot x. \quad \diamond$$

Sandsynlighedsteori 2

Uge 51 og Uge 6.

Forelæsninger: *Karakteristiske funktioner* fortsættes. Entydigheden bygger på det udleverede tillæg til sektion 3.40. Momentproblemet omtales i h.h.t. de udleverede noter.

Øvelser: 1) Exc. 5.4 og 5.8.

2) Eftervis flg. formler

a) $X \sim bi(n, p) \Rightarrow \varphi_X(t) = (q + pe^{it})^n$, hvor $q = 1 - p$.

b) $X \sim po(\lambda) \Rightarrow \varphi_X(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$.

c) $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \varphi_X(t) = \exp(i\mu t - \sigma^2 t^2 / 2)$.

Udnyt nu formel 4.18.8 til at genbevise følgende 'additionsformler':

a) $X_i \sim bi(n_i, p)$ $i = 1, 2$ uafhængige $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim bi(n_1 + n_2, p)$

b) $X_i \sim po(\lambda_i)$ $i = 1, 2$ uafhængige $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim po(\lambda_1 + \lambda_2)$

c) $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $i = 1, 2$ uafhængige $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Aflæsningsopgave: Lad Y, X_1 og X_2 betegne uafhængige stokastiske variable, så at $Y \sim N(0, \sigma^2)$ og $X_i \sim \Gamma(f_i/2, 2\sigma^2)$ for $i = 1, 2$, hvor f_1 og f_2 er naturlige tal. Parametriseringen af Gamma fordelingen følger her Hoffmann's sektion 4.23. Denne afviger fra den, der bruges i Stat 1, idet parameterpareren (α, β) hos Hoffmann svarer til $(\alpha, 1/\beta)$ i Stat 1. $\Gamma(f/2, 2\sigma^2)$ -fordelingen omtales ofte som en $\sigma^2\chi^2$ -fordeling med f frihedsgrader.

Bestem f.eks. ved brug af Transformationssætningen-tætheder for en af flg. tre variable

$$\frac{X_1}{X_1 + X_2}, \quad \frac{X_1/f_1}{X_2/f_2} \quad \text{og} \quad \frac{Y/\sigma}{\sqrt{X_1/f_1}}.$$

Øvrige meddelelser: Her ved semesterets afslutning vil jeg præcisere, hvad der er gennemgået i dette efterår samt relatere det til Hoffmann's bog.

Kapitel 1:

Sektionerne 1.1-1.15, 1.19-1.27, 1.32-1.34, 1.37-1.46 og 1.48 er behandlet, og stofmængden dækkes af noterne i afsnittene *Målelige rum*, *Borel σ -algebraer*, *Målelige funktioner*, *Mål*, *Mål på metriske rum*, *Konstruktion af mål* og *Lebesgue-Stieltjes mål på $\mathbf{R}^n$* .

Sektionerne 1.16-1.18, 1.28-1.31, 1.35-1.36, 1.47, 1.49-1.50 kan overspringes.

Kapitel 2:

Sektionerne 2.1-2.14 og 2.24 er behandlet som i bogen dog henvises til tillægssiden vedrørende Sektion 2.4.

Sektionerne 2.15, 2.16, 2.19-2.23 og 2.25 overlades til selvstudium.

Kapitel 3:

Sektionerne 3.1-3.17, 3.20-3.27, 3.29 (uges. Uge 50), 3.30, 3.31 (uges. Uge 49), 3.32, 3.37 (uges. Uge 50), 3.38 (uges. Uge 43) og 3.40 er behandlet, og stofmængden er dækket dels på de angivne ugesedler samt af noterne i afsnittene *Integraler, konstruktion og egenskaber*, *Ulighed*, *Produktmål*, *eksistens og egenskaber*, *Konvergensformer*, og *L^p -rum* samt tillægget til Sektion 3.40. Sektionerne 3.33, 3.34 og 3.42 overlades til selvstudium. Sektion 3.42 benyttes kun i forbindelse med definition af middelværdivektor og covariansmatrix. Sektionerne 3.35-3.36, 3.39 og 3.41 kan overspringes.

Kapitel 4:

Sektionerne 4.1-4.6 og 4.18 er behandlet som i bogen dog henvises til tillægget til Sektion 4.18.

Desuden har vi ved forelæsningerne omtalt resultaterne i noternes afsnit om Lebesgue målet på $\mathbf{R}^n$ med specielt henblik på anvendelse på transformation af variable med tæthed. I denne forbindelse henvises til teksten startende side 84 nederst til og med side 86.

En rettet og ganske let revideret udgave af noternes første 86 sider kan opnås ved aflevering af E-mail adresse og angivelse af ønsket formatstørrelse.

Svend Erik Graversen

SS2, TØ nr. 15

1)

Exc. 5.4

$X \perp\!\!\!\perp Y$

Påstand: $X \sim Y \implies \varphi_{X-Y} = |\varphi_X|^2$

Basis:

Da $X \perp\!\!\!\perp Y$ er $P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$ af Fubinis sætning, for komplekse fkt. følger derfor, $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\varphi_{X-Y}(t) &:= E[e^{i(X-Y)t}] = E[e^{iXt}] E[e^{iY(-t)}] = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(-t) \\ &\stackrel{X \sim Y}{=} \varphi_X(t) \cdot \varphi_X(-t) = \varphi_X(t) \overline{\varphi_X(t)} = |\varphi_X(t)|^2 \quad \square\end{aligned}$$

Påstand: $\forall t \in \mathbb{R}: \operatorname{Re} \varphi_X(t) = \frac{1}{2}(\varphi_X(t) + \overline{\varphi_X(t)}) = E[\cos(tX)]$

Basis:

Lad $t \in \mathbb{R}$ være vilkårlig

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \varphi_X(t) &= \frac{1}{2}(\varphi_X(t) + \overline{\varphi_X(t)}) = \frac{1}{2}(\varphi_X(t) + \varphi_X(-t)) \\ &= \frac{1}{2}(E[e^{iXt}] + E[e^{iX(-t)}]) = \frac{1}{2}E[e^{iXt} + e^{-iXt}] \\ &= \frac{1}{2}E[\cos(Xt) + i\sin(Xt) + \cos(-Xt) + i\sin(-Xt)] \\ &= \frac{1}{2}E[2\cos(Xt)] = E[\cos(Xt)]\end{aligned}$$

□

Påstand: $\forall t \in \mathbb{R}: P(X=1) = P(X=-1) = 1/2 \Rightarrow \varphi_{X,Y}(t) = \operatorname{Re} \varphi_X(t)$

Beweis:

Lad $t \in \mathbb{R}$ være vilkårlig

$$\begin{aligned}\varphi_{X,Y}(t) &:= E[e^{iX \cdot Y t}] = E[e^{iX t} 1_{\{Y=1\}} + e^{-iX t} 1_{\{Y=-1\}}] \\ &= 1/2 (E[e^{iX t}] + E[e^{-iX t}]) = 1/2 (\varphi_X(t) + \varphi_X(-t)) = \operatorname{Re} \varphi_X(t)\end{aligned}$$

$\uparrow$
Fubini, da $X \perp Y$

□

Exc. 5.8

X s.v.

Påstand: X symmetrisk $\iff \forall t \in \mathbb{R}: \varphi_X(t) \in \mathbb{R}$
og i så fald er $\varphi_X(t) = E[\cos(tX)]$, $t \in \mathbb{R}$

Beweis:

$$\Rightarrow: X \sim -X \Rightarrow \varphi_X(t) \stackrel{4.12.8}{=} \varphi_{-X}(t) \stackrel{4.11.6}{=} \varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftarrow: \varphi_X(t) \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R}: \varphi_X(t) = \overline{\varphi_X(t)} \stackrel{4.11.6}{=} \varphi_{-X}(t) \stackrel{4.12.8}{\Rightarrow} X \sim -X$$

$$\text{Hvis } X \sim -X: \varphi_X(t) = \operatorname{Re} \varphi_X(t) \stackrel{\text{Exc. 5.4}}{=} E[\cos(tX)]$$

□

2)

Påstand:

$$a) X \sim \text{bi}(n, p) \Rightarrow \varphi_X(t) = (q + pe^{it})^n, \quad q = 1-p$$

$$b) X \sim \text{po}(\lambda) \Rightarrow \varphi_X(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$$

$$c) X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \varphi_X(t) = \exp(i\mu t - \sigma^2 t^2/2)$$

a)

$$X \sim \text{bi}(n, p)$$

Lad $\Xi_1, \dots, \Xi_n$ vere i.i.d. $\Xi_i \sim b(1, p)$

$$\text{Dus. } P(\Xi=0)=1-p, \quad P(\Xi=1)=p$$

Nat. resultat fra SST gælder $\sum \Xi_i \sim X \sim \text{bi}(n, p)$

Af resultat 4.18.7 følger, at $\varphi_X = \prod \varphi_{\Xi_i}$

Lad $t \in \mathbb{R}$ vere vilkårlig

$$\begin{aligned} \varphi_{\Xi_i}(t) &= E[e^{it\Xi_i}] = \int e^{it y} P_{\Xi_i}(dy) = e^{it \cdot 0} (1-p) + e^{it \cdot 1} \cdot p \\ &= (1-p) + e^{it} p \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\varphi_X(t) = \prod_{i=1}^n ((1-p) + e^{it} p) = ((1-p) + e^{it} p)^n \underset{q=1-p}{=} (q + e^{it} p)^n$$

b)

$$X \sim \text{po}(\lambda), \quad \text{dus. } P(X=x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x \in \mathbb{N}_0, \text{ o ellus}$$

Lad $t \in \mathbb{R}$ vere vilkårlig

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= E[e^{itX}] = \int e^{itx} P_X(dx) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{e^{it} \cdot \lambda} = e^{\lambda(e^{it} - 1)} \end{aligned}$$

c)

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad , \quad \text{dvs.} \quad X = \sigma U + \mu \quad , \quad U \sim N(0, 1)$$

Lad $t \in \mathbb{R}$ være vilkårlig

$$\varphi_U(t) = E[e^{itU}] = \int e^{itU} dP_U$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{itu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} \lambda_1(du) \quad , \quad \text{da } P_U \text{ er a.k. mht } \lambda_1 \\ \text{med tæthed } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \cos(tu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} \lambda_1(du)$$

$$= e^{-t^2/2}$$

Afl. 13

$$\text{Af 4.18.5 følger, at } \varphi_X(t) = e^{i\mu t} \cdot e^{-(\sigma t)^2/2} = e^{i\mu t - \sigma^2 t^2/2}$$

□

Påstand:

a) $X_1 \sim \text{bi}(n_1, p) \quad , \quad X_2 \sim \text{bi}(n_2, p) \quad X_1 \perp X_2 \implies$
 $X_1 + X_2 \sim \text{bi}(n_1 + n_2, p)$

b) $X_1 \sim \text{po}(\lambda_1) \quad , \quad X_2 \sim \text{po}(\lambda_2) \quad X_1 \perp X_2 \implies$
 $X_1 + X_2 \sim \text{po}(\lambda_1 + \lambda_2)$

c) $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \quad , \quad X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \quad X_1 \perp X_2 \implies$
 $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Beweis:

a)

$$\begin{aligned}\varphi_{X_1+X_2}(t) &\stackrel{4.18.7}{=} \varphi_{X_1}(t) \varphi_{X_2}(t) = (q + pe^{it})^{n_1} (q + pe^{it})^{n_2} \\ &= (q + pe^{it})^{n_1+n_2} \quad , t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Af. 4.18.8 (entydighedssætningen) følger, at
 $X_1 + X_2 \sim \text{bi}(n_1 + n_2, p)$

b)

$$\begin{aligned}\varphi_{X_1+X_2}(t) &\stackrel{4.18.7}{=} \varphi_{X_1}(t) \varphi_{X_2}(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)} e^{\lambda_2(e^{it}-1)} \\ &= e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)} \quad , t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Af 4.18.8 (entydighedssætningen) følger, at
 $X_1 + X_2 \sim \text{po}(\lambda_1 + \lambda_2)$

c)

$$\begin{aligned}\varphi_{X_1+X_2}(t) &\stackrel{4.18.7}{=} \varphi_{X_1}(t) \varphi_{X_2}(t) = e^{(i\mu_1 t - \sigma_1^2 t^2/2)} e^{(i\mu_2 t - \sigma_2^2 t^2/2)} \\ &= e^{(i(\mu_1+\mu_2)t - (\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2/2)} \quad , t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Af 4.18.8 (entydighedssætningen) følger, at
 $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

□

SS2, afleveringsopgave nr. 15, Gunnar Hellmund

Z, X_1, X_2 uafh. s.v.

$Z \sim N(0, \sigma^2)$, $X_1 \sim \Gamma(f_1/2, 2\sigma^2)$, $X_2 \sim \Gamma(f_2/2, 2\sigma^2)$ $f_1, f_2 \in \mathbb{N}$

Jvf. US 10 opg. 1 er en tæthed for (X_1, X_2)

givet ved $(x, y) \mapsto f_{X_1}(x) f_{X_2}(y)$

(se 4.23 for Γ -fordelingens tæthed)

Definer $T: \mathbb{R}_+^2 \mapsto \mathbb{R}_+ \times]0, 1]$

$(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : T(x, y) = (x+y, \frac{x}{x+y})$

Da er T C^1 og bijektiv ($T^{-1} = S$ $S(u, v) = (u \cdot v, u - u \cdot v)$)

$$|\det T'(x, y)| = \left| \frac{d(x+y)}{dx} \frac{d(\frac{x}{x+y})}{dy} - \frac{d(x+y)}{dy} \frac{d(\frac{x}{x+y})}{dx} \right|$$

$$= \frac{1}{|x+y|} > 0 \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$$

Da $|\det T'(S(u, v))|^{-1} = |uv + u - u \cdot v| = |u|$ fås (berr. s. 86)

at en tæthed for $(X_1 + X_2, \frac{X_1}{X_1 + X_2})$ er

$$u f_{X_1}(uv) f_{X_2}(u - u \cdot v)$$

$$\stackrel{4.23}{=} u (uv)^{f_1/2-1} (u - u \cdot v)^{f_2/2-1} (2\sigma^2)^{-(f_1+f_2)/2} (\Gamma(f_1/2) \Gamma(f_2/2))^{-1} e^{-u/2\sigma^2}$$

for $(u, v) \in \mathbb{R}_+ \times]0, 1]$, 0 ellers

Tætheden for $\frac{X_1}{X_1+X_2}$ er derfor

$$\begin{aligned}
 f_{\frac{X_1}{X_1+X_2}}(v) &= \int_0^\infty u (uv)^{f_1/2-1} (u-uv)^{f_2/2-1} (2\sigma^2)^{-(f_1+f_2)/2} (\Gamma(f_1/2)\Gamma(f_2/2))^{-1} e^{-u/2\sigma^2} du \\
 &= (\Gamma(f_1/2)\Gamma(f_2/2))^{-1} (2\sigma^2)^{-(f_1+f_2)/2} (1-v)^{f_2/2-1} v^{f_1/2-1} \int_0^\infty u^{f_1/2+f_2/2-1} e^{-u/2\sigma^2} du \\
 &= (\Gamma(f_1/2)\Gamma(f_2/2))^{-1} (1-v)^{f_2/2-1} v^{f_1/2-1} \int_0^\infty \left(\frac{u}{2\sigma^2}\right)^{f_1/2+f_2/2-1} e^{-u/2\sigma^2} \frac{1}{2\sigma^2} du \\
 &= (\Gamma(f_1/2)\Gamma(f_2/2))^{-1} (1-v)^{f_2/2-1} v^{f_1/2-1} \int_0^\infty t^{f_1/2+f_2/2-1} e^{-t} dt \\
 &= \frac{\Gamma(f_1/2+f_2/2)}{\Gamma(f_1/2)\Gamma(f_2/2)} (1-v)^{f_2/2-1} v^{f_1/2-1} \quad \text{for } v \in]0,1[, 0 \text{ ellers}
 \end{aligned}$$

Dvs. $\frac{X_1}{X_1+X_2} \sim B(f_1/2, f_2/2)$

Bm. $f_{\frac{X_1}{X_1+X_2}}(v) = \frac{\Gamma(f_1/2+f_2/2)}{\Gamma(f_1/2)\Gamma(f_2/2)} (1-v)^{f_2/2-1} v^{f_1/2-1} 1_{]0,1[}(v)$

er en tæthed ($f_{X_1/X_1+X_2} \geq 0$, $\int f_{X_1/X_1+X_2} d\lambda_1 = 1 \dots$)

Beweis:

$$\begin{aligned}
 \Gamma(f_1/2) \Gamma(f_2/2) &= \int_0^\infty x^{f_1/2-1} e^{-x} \lambda_1(dx) \int_0^\infty y^{f_2/2-1} e^{-y} \lambda_1(dy) \\
 &= \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty x^{f_1/2-1} y^{f_2/2-1} e^{-(x+y)} \lambda_1(dx) \right\} \lambda_1(dy) \\
 &= \int_{\mathbb{R}_+^2} x^{f_1/2-1} y^{f_2/2-1} e^{-(x+y)} \lambda_2(d(x,y)) \\
 &= \int_{\mathbb{R}_+ \times]0,1[} u (uv)^{f_1/2-1} (u-uv)^{f_2/2-1} e^{-u} \lambda_2(d(u,v)) \\
 &= \int_0^1 v^{f_1/2-1} (1-v)^{f_2/2-1} \left\{ \int_0^\infty u^{f_1/2+f_2/2-1} e^{-u} \lambda_1(du) \right\} \lambda_1(dv) \\
 &= \Gamma(f_1/2+f_2/2) \int_0^1 v^{f_1/2-1} (1-v)^{f_2/2-1} dv
 \end{aligned}$$

□

Lad $X \in \mathbb{R}_2$ være vilkårlig

$$\begin{aligned} P(X_1/f_1 \leq x_1, X_2/f_2 \leq x_2) &= P(X_1 \leq x_1 f_1, X_2 \leq x_2 f_2) \\ &= P(X_1 \leq x_1 f_1) P(X_2 \leq x_2 f_2) = P(X_1/f_1 \leq x_1) P(X_2/f_2 \leq x_2) \end{aligned}$$

$X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$

Dvs. $X_1/f_1 \perp\!\!\!\perp X_2/f_2$

Def. $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ $T(x) = x/f_1$ ($S = T^{-1}$, $S(u) = u f_1$)

Det er da klart, at T opfylder betingelse i bollen s. 86 og at $|\det T'(S(u))|^{-1} = f_1$ og vi får derfor at en

tæthed for X_1/f_1 er

$$\begin{aligned} f_1 f_{X_1}(S(u)) &= f_1 \frac{(u f_1)^{f_1/2-1}}{(2\sigma^2)^{f_1/2} \Gamma(f_1/2)} e^{-u f_1 / 2\sigma^2} 1_{\mathbb{R}_+}(u) \\ &= \frac{u^{f_1/2-1}}{(2\sigma^2/f_1)^{f_1/2} \Gamma(f_1/2)} e^{-u / (2\sigma^2/f_1)} 1_{\mathbb{R}_+}(u) \end{aligned}$$

Dvs. $X_1/f_1 \sim \Gamma(f_1/2, \frac{2\sigma^2}{f_1})$ tilsvarende $X_2/f_2 \sim \Gamma(f_2/2, \frac{2\sigma^2}{f_2})$

Af opg. 3 US10 fås at en tæthed for $X_1/f_1, X_2/f_2$ er

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty f_{X_1/f_1}(t \cdot s) f_{X_2/f_2}(s) s \lambda_1(ds) \\ &= \int_0^\infty \frac{(ts)^{f_1/2-1} s^{f_2/2-1} s}{(2\sigma^2/f_1)^{f_1/2} (2\sigma^2/f_2)^{f_2/2} \Gamma(f_1/2) \Gamma(f_2/2)} e^{-ts/(2\sigma^2/f_1) - s/(2\sigma^2/f_2)} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= t^{f_1/2-1} \left(t/(2\sigma^2/f_1) + 1/(2\sigma^2/f_2) \right)^{-f_1/2-f_2/2} \Gamma(f_1/2 + f_2/2) / (\Gamma(f_1/2) \Gamma(f_2/2)) \left(\frac{2\sigma^2}{f_1} \right)^{f_1/2} \left(\frac{2\sigma^2}{f_2} \right)^{f_2/2} \\ &\cdot \int_0^\infty \frac{s^{f_1/2+f_2/2-1}}{\left(t/(2\sigma^2/f_1) + 1/(2\sigma^2/f_2) \right)^{f_1/2+f_2/2} \Gamma(f_1/2 + f_2/2)} e^{-s / \left(t/(2\sigma^2/f_1) + 1/(2\sigma^2/f_2) \right)^{-1}} ds \end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma(f_1/2 + f_2/2)}{\Gamma(f_1/2) \Gamma(f_2/2)} \frac{(f_1/f_2)^{f_1/2}}{(\frac{f_1}{f_2}t + 1)^{f_1/2 + f_2/2}} t^{f_1/2 - 1}$$

$$= \frac{f_1}{f_2} \frac{\Gamma(f_1/2 + f_2/2)}{\Gamma(f_1/2) \Gamma(f_2/2)} \frac{(\frac{f_1}{f_2}t)^{f_1/2 - 1}}{(\frac{f_1}{f_2}t + 1)^{f_1/2 + f_2/2}} \text{ for } t > 0, \text{ o. ellus.}$$

$$\text{Dus. } \frac{\bar{x}_1/f_1}{\bar{x}_2/f_2} \sim F(f_1, f_2)$$

Juf. 2.9 er det klart idet $x \mapsto \sqrt{x/f_1}$, $x \mapsto x/\sigma$ er målbare og $\mathbb{I} \perp \mathbb{X}_1$, at $\mathbb{I}/\sigma \perp \sqrt{\mathbb{X}_1/f_1}$

Da $\mathbb{I} \sim N(0, \sigma^2)$ er det velkendt, at $\mathbb{I}/\sigma \sim N(0, 1)$

Def $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ $T(x) = \sqrt{x/f_1}$

Da opfylder T klart betingelserne i korollaret s. 86 (med $s(u) = f_1 u^2$) og en tæthed for $\sqrt{\mathbb{X}_1/f_1}$ er

$$|\det T'(s(u))|^{-1} f_{\mathbb{X}_1}(s(u)) 1_{\mathbb{R}_+}(u)$$

$$= f_1 2 \sqrt{f_1 u^2 / f_1} f_{\mathbb{X}_1}(f_1 u^2) 1_{\mathbb{R}_+}(u)$$

$$= 2 f_1 u \frac{(f_1 u^2)^{f_1/2-1}}{(2\sigma^2)^{f_1/2} \Gamma(f_1/2)} e^{-f_1 u^2 / 2\sigma^2} 1_{\mathbb{R}_+}(u)$$

$$= 2 \frac{u^{f_1-1}}{(\frac{2\sigma^2}{f_1})^{f_1/2} \Gamma(f_1/2)} e^{-u^2 / (\frac{2\sigma^2}{f_1})} 1_{\mathbb{R}_+}(u)$$

Juf. opg 3 $\mathbb{U}/\sigma$ er en tæthed for $\frac{\mathbb{I}/\sigma}{\sqrt{\mathbb{X}_1/f_1}}$

$$\int_0^\infty f_{\mathbb{U}/\sigma}(t \cdot s) f_{\sqrt{\mathbb{X}_1/f_1}}(s) s ds$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2 s^2 / 2} 2 \frac{s^{f_1-1}}{(\frac{2\sigma^2}{f_1})^{f_1/2} \Gamma(f_1/2)} e^{-s^2 / (\frac{2\sigma^2}{f_1})} \cdot s ds$$

$$= \int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{s^{f_1}}{(\frac{2\sigma^2}{f_1})^{f_1/2} \Gamma(f_1/2)} e^{-s^2(t^2 + f_1/\sigma^2)/2} ds$$

$$= \int_{w=s^2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{w^{f_1/2-1/2}}{\left(\frac{2\sigma^2}{f_1}\right)^{f_1/2} \Gamma(f_1/2)} e^{-w(t^2+f_1/\sigma^2)/2} dw$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2}{t^2+f_1/\sigma^2}\right)^{f_1/2+1/2} \left(\left(\frac{2\sigma^2}{f_1}\right)^{f_1/2} \Gamma(f_1/2)\right)^{-1} \cdot \Gamma(f_1/2+1/2) \\ \cdot \int_0^{\infty} \frac{w^{(f_1/2+1/2)-1}}{\left(\frac{2}{t^2+f_1/\sigma^2}\right)^{f_1/2+1/2} \Gamma(f_1/2+1/2)} e^{-w/(2/(t^2+f_1/\sigma^2))} dw$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} f_1^{f_1/2} (t^2+f_1/\sigma^2)^{-f_1/2-1/2} \frac{\Gamma(f_1/2+1/2)}{\Gamma(f_1/2)} (\sigma^2)^{f_1/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi} f_1} \left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{t^2}{f_1}\right)^{f_1/2-1/2} \frac{\Gamma(f_1/2+1/2)}{\Gamma(f_1/2)} (\sigma^2)^{-f_1/2}$$

$$= \frac{\sqrt{\sigma^2}}{\sqrt{\pi} f_1} \left(1 + \frac{t^2}{(f_1/\sigma^2)}\right)^{-f_1/2-1/2} \frac{\Gamma(f_1/2+1/2)}{\Gamma(f_1/2)}$$

$$= \frac{\Gamma(1/2(f_1+1))}{\sqrt{\pi} (f_1/\sigma^2) \Gamma(\frac{1}{2} \cdot f_1)} \left(1 + \frac{t^2}{(f_1/\sigma^2)}\right)^{-1/2(f_1+1)}, t \in \mathbb{R}$$

Hvis $X_1 \sim \Gamma(f_1/2, 2)$ ses, at

$$\frac{\bar{X}/\sigma}{\sqrt{X_1/f_1}} \sim t(f_1)$$