

Sandsynlighedsteori 2

Uge 50.

CL: teori
M: 14.00; kontinuering

Forelæsninger: Vi afslutter gennemgangen af mål og integralteorien og starter på emnet *karaktéristiske funktioner*, d.v.s. sektion 4.18.

Øvelser: Regn dem I kan nå, resten gemmes til efter jul.

1) Vis at ethvert endeligt mål μ på $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ er et Lebesgue-Stieltjes mål.

Vink: se på $F(x) := \mu((-\infty, x])$.

D.v.s. ethvert sum-endeligt specielt ethvert σ -endeligt mål på $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ er en tællelig sum af Lebesgue-Stieltjes mål.

2) Lad μ betegne et sandsynlighedsmål på $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$. Definér

$$X : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad X(x) := x.$$

Vis at X er en stokastisk variabel på sandsynlighedsfeltet $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \mu)$ og bestem dens fordelingsfunktion og fordelingsmål. Overvej at dette viser, at der til et ethvert sandsynlighedsmål μ på $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ findes et sandsynlighedsfelt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ og en derpå defineret stokastisk variabel X , så at $P_X = \mu$.

3) Lad F betegne en voksende, højrekontinueret funktion og λ_F det tilhørende Lebesgue-Stieltjes mål. Vis ved approksimation med trappefunktioner, at hvis $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ er kontinuert, så gælder

$$\int_0^1 g d\lambda_F := \int_{[0,1]} g d\lambda_F = \lim_n \sum_{i=1}^n g(i/n) \cdot (F(i/n) - F((i-1)/n)).$$

Dette m.m. begrundes, at man i forbindelse med Lebesgue-Stieltjes mål ofte skriver $\int f dF$ i stedet for $\int f d\lambda_F$ og $\int f(x) dx$ i stedet for $\int f(x) \lambda_1(dx)$.

4) Lad F betegne en fordelingsfunktion og lad U være en stokastisk variabel, som er uniformt fordelt over $(0, 1)$. Vi kan og vil antage, at $U(\omega) < 1$ for alle ω , thi hvis ikke betragtes i stedet $\tilde{U} := U \cdot \mathbf{1}_{U \in (0,1)}$.

Definer $X := \tilde{F}(U)$, hvor $\tilde{F}$ videnskabeligt er en kontinuert, voksende funktion, $(u_i) \mapsto \mathbb{R}$.

$$\tilde{F}(t) := \sup\{x \in \mathbf{R} \mid F(x) < t\} \quad 0 \leq t < 1 \quad \text{og} \quad \tilde{F}(t) := 0 \quad t \notin [0, 1].$$

Gør rede for at X er en stokastisk variabel med fordelingsfunktion F og slut heraf, at

$$\int h dF = \int_0^1 h(\tilde{F}(u)) du \quad h \in M(\mathcal{B}(\mathbf{R}))_+.$$

Vink: Vis og udnyt at

$$\{X > t\} = \{U > F(t)\} \quad t \in \mathbf{R}.$$

Dette er et specialtilfælde af formel (3.29.3) i Hoffmann, men udvidelsen til en vilkårlig voksende højrekontinueret funktion F er ikke vanskelig.

Afleveringsopgave: Lad X betegne en stokastisk variabel med en kontinuert fordelingsfunktion F_X . Vis at $F_X(X)$ er uniformt fordelt over $(0, 1)$.

Vink: Vis og udnyt at for alle $0 < t < 1$ er

$$\{F_X(X) \leq t\} = \{X \leq a\} \quad \text{hvor} \quad a := \sup\{x \mid F_X(x) = t\}.$$

Udnyt dette sammen med opgave 2) og den lille transformationssætning til at vise, at hvis F er en kontinuert fordelingsfunktion, så er

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(F(x)) dF(x) = \int_0^1 h(t) dt \quad \text{for} \quad h \in M(\mathcal{B}(\mathbf{R}))_+.$$

Dette er et specialtilfælde af formel (3.29.4) i Hoffmann, men udvidelsen til en vilkårlig voksende kontinuert funktion F er umiddelbar.

Trykfejl. Side 43. Beviset for Proposition 6 *Jensen's Ulighed* forudsætter, at φ er reel. Resultatet gælder uændret for φ med værdier i $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Side 47 linie 13 fra oven. Lemma 4 erstattes af M5 side 16.

Øvrige meddelelser: Vi får flere gange brug for den såkaldte Γ -funktion, så jeg vil her ganske kort definere denne og minde om dens basale egenskaber. Iøvrigt henvises til sektion 3.37 i Hoffmann.

$$\forall \alpha > 0 \quad \Gamma(\alpha) := \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \cdot e^{-t} dt.$$

SS2, TØ nr. 14

1)

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ målrum

Påstand: $\mu(\mathbb{R}) < \infty \implies \exists F: \mu = \lambda_F$

Beris:

Definer $\forall x \in \mathbb{R}: F(x) := \mu(-\infty, x]$

Da μ er et mål følger hurtigt at F er voksende

Lad $x, (x_n) \subseteq \mathbb{R}$ $x_n \downarrow x$ være vilkårlig

Da $\mu(-\infty, x_i] \leq \mu(\mathbb{R}) < \infty$ følger at $F(x_n) \downarrow F(x)$,
dvs. F er højrekontinueret.

$\forall [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\mu([a, b]) &= \mu((-\infty, b] \setminus (-\infty, a]) = \mu(-\infty, b] - \mu(-\infty, a]) \\ &= F(b) - F(a) =: \lambda_F([a, b])\end{aligned}$$

Af korollaret s. 24 følger, at $\mu \equiv \lambda_F$

□

Bem. af ovenstående følger at ethvert sumendeligt mål på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (specielt de σ -endelige mål) er en tællelig sum af Lebesgue-Stieltjes mål.

2)

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ ss-felt

$$X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}: X(x) = x$$

X er en kont. fkt. dermed specielt en m\u00e5lelig fkt. fra $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ind i $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ og dermed en s.v.

Lad $x \in \mathbb{R}$ v\u00e6re vilk\u00e5rlig

$$F_X(x) := P(X \leq x) = P(-\infty, x] = \int_{(-\infty, x]} 1 \, dP$$

$$\text{Lad } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}): \mu_X(B) := \mu(X \in B) = \mu(B)$$

Specielt kan vi konkludere, at for ethvert ss-felt $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ eksisterer der et ss-felt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med en tilh\u00f8rende s.v. X , s\u00e5 $P_X = \mu$

(s\u00e5t $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ og $X(x) = x, x \in \mathbb{R}$)

3)

F voksende og h.k.

Påstand: $g \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\int_0^1 g d\lambda_F \approx \int_{[0,1]} g d\lambda_F = \lim_n \sum_{i=1}^n g(i/n) \cdot (F(i/n) - F((i-1)/n))$$

Beris:

$$\text{Definer } g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: g_n(x) = \sum_{i=1}^n g(i/n) 1_{[i-1/n, i/n]}(x)$$

Det er klart at $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g 1_{[0,1]}$ og da g er kont. på $\mathbb{R}$ og dermed begrænset på $[0,1]$ følger af Lebesgues sætning* ($\forall M \in \mathbb{R}_+ : \int M 1_{[0,1]} d\lambda_F < \infty$)

$$\begin{aligned} \int_0^1 g d\lambda_F &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\lambda_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(i/n) \lambda_F([i-1/n, i/n]) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(i/n) (F(i/n) - F((i-1)/n)) \end{aligned}$$

□

Med udgangspkt. i dette benyttes ofte notationen

$$\int f dF := \int f d\lambda_F, \text{ og specielt } \int f dx = \int f \lambda_1(dx)$$

*

$$\forall n \geq 1 : |g_n| \leq \sup_{x \in [0,1]} |g(x)| =: M$$

4)

F betegner en fordelingsfkt.

U s.v. uniformt fordelt på $(0,1)$, def. på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$\forall i$ kan antage at $\forall \omega: U(\omega) < 1$, idet

$$U = U \cdot 1_{\{U \in (0,1)\}} \text{ n.o.}$$

Definer $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $X := \hat{F}(U)$, hvor

$$\hat{F}(t) := \sup \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) < t\}, 0 < t < 1, \hat{F}(t) = 0 \text{ ellers}$$

Påstand: X er en s.v. med fordelingsfkt. F

Bevis:

Lad $t \in \mathbb{R}$ være vilk.

$$\{X > t\} = \{\hat{F}(U) > t\}$$

$$\omega \in \{U > F(t)\} \xRightarrow{\text{def. af}} t \in \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) < U(\omega)\} \Rightarrow t < \hat{F}(U(\omega))$$

$$\text{dvs. } \omega \in \{\hat{F}(U) > t\}$$

$$\omega \in \{\hat{F}(U) > t\} \xRightarrow{\text{F-værdi}} t \in \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) < U(\omega)\} \Rightarrow \omega \in \{F(t) < U\}$$

$$\text{Altså er } \{X > t\} = \{U > F(t)\} \in \mathcal{F}.$$

X er dermed en s.v.

Lad $x \in \mathbb{R}$ være vilkårlig

$$\begin{aligned} F_X(x) &:= P(X \leq x) = 1 - P(X > x) = 1 - P(U > F(x)) \\ &= P(U \leq F(x)) = \lambda_1([0, F(x)]) / \lambda_1([0, 1]) \\ &\quad \text{2.24} \\ &\quad \text{Hoffmann} \\ &= F(x) \end{aligned}$$

□

Påstand: $\forall h \in M(B(\mathbb{R}))_+ : \int h dF = \int_0^1 h(\hat{F}(u)) du$

Beweis:

Lad $h \in M(B(\mathbb{R}))_+$ være vilkårlig

$$\int h dF = \int h d\lambda_F = \int h dP_{\hat{F}} \stackrel{\text{setn. 3}}{=} \int h(\hat{F}) dP_U$$

$$\stackrel{\text{setn. 4}}{=} \int h(\hat{F}) 1_{(0,1)} d\lambda_1 =: \int_0^1 h(\hat{F}(u)) du$$

□

SS2, aflevering nr. 14, Gunnar Hellmünd

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ss-felt

X s.v. med kontinuert fordelingsfkt. F_X

Påstand: $F_X(X)$ er uniformt fordelt på $(0,1)$

Bewis:

Det er klart, at $F_X(X) \in [0,1]$

Hvis vi kan vise, at $0 < t < 1$: $P(F_X(X) \leq t) = t$
er vi jvf. 2.24 i Hoffmann færdige.

Lad $0 < t < 1$ være vilkårlig

$a := \sup \{x \mid F_X(x) = t\}$, da F_X er kontinuert
(specielt venstrekontinuert) gælder at $F_X(a) = t$

Lad $\omega \in \Omega$: $F_X(X(\omega)) \leq t \xRightarrow{F_X \text{ voksende}} X(\omega) \leq a$

$\omega \in \Omega$: $X(\omega) \leq a \xRightarrow{F_X \text{ voksende}} F_X(X(\omega)) \leq F_X(a) = t$

Dvs. $\{F_X(X) \leq t\} = \{X \leq a\}$

$P(F_X(X) \leq t) = P(X \leq a) = F_X(a) = t$

□

Påstand:

Antag at F er en kumuleret fordelingsfkt., da gælder

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(F(x)) dF(x) = \int_0^1 h(t) dt, \quad \forall h \in M(B(\mathbb{R}))_+$$

Beweis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(F(x)) dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(F(x)) \lambda_F(dx)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(F(x)) P_X(dx) \quad (\text{hvor } X \sim F)$$

$$\stackrel{\text{setn. 3}}{=} \int h dP_{F(X)} \stackrel{\text{setn. 4}}{=} \int_0^1 h(t) dt, \quad h \in M(B(\mathbb{R}))_+$$

□

Sandsynlighedsteori 2

Uge 49.

Forelæsninger: Konstruktion af mål specielt Lebesgue-Stieltjes målene.

Øvelser: 1) Denne opgave, som studerer integralet som funktion af en reel parameter, er meget vigtig. Hoffmann behandler samme emne i sektion 3.31. Det er godt at se på opgave nr. 2 samtidigt, samt at huske på at kontinuitet og differentierbarhed af reelle funktioner kan udtrykkes ved hjælp af følger. Lad $(E, \mathcal{E}, \mu)$ betegne et $(\sigma$ -endeligt målrum, og lad $g \in M(\mathcal{B}(\mathbf{R}) \otimes \mathcal{E})$ være givet så at $g(x, \cdot) \in L^1(\mu)$ for alle $x \in \mathbf{R}$. Definér

$$G(x) := \int g(x, t) \mu(dt).$$

a) Vis at $x \mapsto G(x)$ er kontinuert, hvis $x \mapsto g(x, t)$ er kontinuert for alle t , og der for alle $x \in \mathbf{R}$ findes et $\epsilon > 0$ og et $h \in L^1(\mu)$ så at

$$|g(u, t)| \leq |h(t)| \quad \text{for alle } t \in E \text{ og } u \in (x - \epsilon, x + \epsilon).$$

b) Vis at $x \mapsto G(x)$ er differentiel og beregn G' , hvis $x \mapsto g(x, t)$ er differentiel for alle t , og der for alle $x \in \mathbf{R}$ findes et $\epsilon > 0$ og et $h \in L^1(\mu)$ så at

$$|d/dx g(u, t)| \leq |h(t)| \quad \text{for alle } t \in E \text{ og } u \in (x - \epsilon, x + \epsilon).$$

I både a) og b) kan antagelsen 'alle t ' erstattes af ' μ -n.a.t.

c) Antag $\mu(E) < \infty$. Vis at det er nok, at $\{g(u, \cdot) \mid u \in (x - \epsilon, x + \epsilon)\}$ h.h.v. $\{g(u, \cdot) - g(x, \cdot) \mid u \in (x - \epsilon, x + \epsilon)\}$ er uniformt integrable for et $\epsilon > 0$.

2) Betragt i denne opgave flg. specialtilfælde af opgave 1. $(E, \mathcal{E}, \mu)$ er målrummet $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ udstyret med et sandsynlighedsmål μ og

$$g(x, t) := \cos(x \cdot t) \quad \text{for alle } x, t \in \mathbf{R}.$$

Vis at $x \mapsto G(x)$ er kontinuert. Antag yderligere at

$$\int |t|^2 \mu(dt) < \infty.$$

Vis at $x \mapsto G(x)$ er to gange kontinuert differentiel og find $G'(0)$ og $G''(0)$.

3) Øvelse 19 side 64. Antag for simpelhedsskyld at $f_1, \dots, f_n$ er parvis ortogonale. Beregn for $f \in L^2(\mu)$ den ortogonale projektion af f på V .

4) Vis ved anvendelse af den lille transformationssætning, at

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) := \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1} \cdot e^{-t} dt = \int e^{-x^2} \lambda_1(dx) = \sqrt{\pi}.$$

Afleveringsopgave: Vis ved hjælp af Fubini's Sætning, at

$$\int_0^\infty \sin xt \cdot t e^{-t^2/2} \lambda_1(dt) = x \int_0^\infty \cos xt \cdot e^{-t^2/2} \lambda_1(dt)$$

for ethvert $x \in \mathbf{R}$. Vink: Udnyt at $\sin xt = x \int_0^t \cos xu du$. Slut herudfra ved hjælp af opgave 1, at

$$p : x \mapsto \int_{\mathbf{R}} \cos xt \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \lambda_1(dt)$$

opfylder $p'(x) = -x \cdot p(x)$ for alle x . Find funktionen p .

Trykfejl. Ugesedlen til Uge 48 indeholder op til flere trykfejl.

Opg. 2): Henvisningen er til Lemma 10. Opg. 3): X_n erne skal være uafhængige. Opg. 5). Henvisningen er til side 61.

Øvrige meddelelser: Budskabet i formel (4.5.9) er følgende:

Hvis $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ er absolut kontinuert m.h.t. Lebesgue målet med tæthed f , så er enhver marginal $(X_{n_1}, \dots, X_{n_k})$ også absolut kontinuert og en tæthed findes ved at integrere de ikke-relevante variable ud. Nedenstående eksemplificerer dette.

SS2, TØ nr. 13

1)

$(E, \mathcal{E}, \mu)$ σ -endeligt målrum

$g \in M(B(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{E}) : \forall x \in \mathbb{R} : g(x, \cdot) \in L^1(\mu)$

Definer $G: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad \forall x \in \mathbb{R} : G(x) := \int g(x, t) \mu(dt)$

a)

Påstand:

Antag at $\forall t \in E : g(\cdot, t) \in C^0(\mathbb{R})$ samt, at
 $\forall x \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0, h \in L^1(\mu) \forall t \in E, u \in b(x, \varepsilon) :$

$$|g(u, t)| \leq |h(t)|$$

Da gælder, at $G \in C^0(\mathbb{R})$

Beweis:

Lad $(x_n) \in \mathbb{R} \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ være vilkårlig, for x vilkårlig.

Vi kan uden tab af generalitet antage, at $(x_n) \subseteq b(x, \varepsilon)$

$\forall t \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n, t) = g(x, t)$ (da $g(\cdot, t) \in C^0(\mathbb{R})$)

Da $\exists h \in L^1(\mu) : |g(x_n, t)| \leq |h(t)|$ følger af Lebesgues sætn.:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g(x_n, t) \mu(dt) = \int g(x, t) \mu(dt) = G(x)$$

□

b)

Påstand:

Antag, at $\forall t \in E: g(\cdot, t)$ diff. samt at $\forall x \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0, h \in L^1(\mu) \forall t \in E, u \in b(x, \varepsilon): \left| \frac{d}{dx} g(u, t) \right| \leq |h(t)|$

Da gælder, at G er diff. og $G' = \int g'(\cdot, t) \mu(dt)$

Beris:

Lad $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ være vilkårlig for x vilkårlig.

Uden tab af generalitet kan vi antage, at $(x_n) \subseteq b(x, \varepsilon)$

$$\forall t \in E: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(x, t) - g(x_n, t)}{x - x_n} = g'(x, t) \quad (g(\cdot, t) \text{ diff})$$

Af middelværdissætningen (7.12 i Thue) følger (jvf antagelserne)

$$\forall t \in E, n \geq 1: \left| \frac{g(x, t) - g(x_n, t)}{x - x_n} \right| \leq |h(t)| \text{ og dermed følger af}$$

Lebesgues sætning om domineret konvergens:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G(x) - G(x_n)}{x - x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{g(x, t) - g(x_n, t)}{x - x_n} \mu(dt)$$

$$= \int g'(x, t) \mu(dt) (= G'(x))$$

□

Jvf. resultatet i noterne er det klart at ovenstående resultater også holder hvis $\forall t$ -udtrykkene udskiftes med n.o.-udsagn.

c)

Antag $\mu(E) < \infty$

Påstand:

a) gælder hvis betingelsen $\forall x \in \mathbb{R} \exists \varepsilon_0, \eta \in \mathbb{N} \forall t \in E, \eta \leq b(x, \varepsilon) : |g(x, t)| \leq \eta$ erstattes af at $\forall x \in \mathbb{R} \exists \varepsilon_0 : \{g(x, \cdot) | \eta \leq b(x, \varepsilon)\}$ er U.I.

Beweis:

Lad $(x_n) \in \mathbb{R}$ $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ være vilkårlig for vilkårlig x

Vden tab af generalitet antages at $(x_n) \subseteq b(x, \varepsilon)$

$\forall t \in E : g(x_n, t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(x, t)$ ($g(\cdot, t) \in C^0(\mathbb{R})$) da $\mu(E) < \infty$ gælder

if. prop. 10 s. 51, at $g(x_n, \cdot) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(x, \cdot)$ i μ -mel, if antagelsen

om at $\{g(x, \cdot) | \eta \leq b(x, \varepsilon)\}$ U.I. følger af sætn. 6 s. 53, at

$g(x_n, \cdot) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(x, \cdot)$ i μ -middel, dvs.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g(x_n, t) \mu(dt) = \int g(x, t) \mu(dt) = G(x)$$

□

Påstand:

b) gælder hvis betingelsen

$\forall x \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0, h \in L^1(\mu) \forall t \in E, u \in b(x, \varepsilon) : \left| \frac{d}{dx} g(u, t) \right| \leq |h(t)|$ omtrent af
 $\forall x \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 : \{ (g(u, \cdot) - g(x, \cdot)) / (u - x) : u \in b(x, \varepsilon) \}$ u.I.

Beweis:

Lad $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ være vilkårlig for vilkårlig x

Uden tab af generalitet kan vi antage, at $(x_n) \subseteq b(x, \varepsilon)$

$$\forall t \in E : \frac{g(x_n, t) - g(x, t)}{x_n - x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g'(x, t) \quad (g(\cdot, t) \text{ diff})$$

Jf prop. 10 s. 51 gælder (da $\mu(E) < \infty$):

$$\frac{g(x_n, \cdot) - g(x, \cdot)}{x_n - x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(x, \cdot) \text{ i } \mu\text{-mål, jf antagelsen}$$

om at $\{ (g(u, \cdot) - g(x, \cdot)) / (u - x) : u \in b(x, \varepsilon) \}$ u.I. følger at

$$\frac{g(x_n, \cdot) - g(x, \cdot)}{x_n - x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(x, \cdot) \text{ i } \mu\text{-mål, dvs.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G(x_n) - G(x)}{x_n - x} = \int \frac{g(x_n, t) - g(x, t)}{x_n - x} \mu(dt) = \int g'(x, t) \mu(dt)$$

□

2)

$$(E, \mathcal{E}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu) \quad \mu \text{ ss-mål}$$

$$\forall x, t \in \mathbb{R}: g(x, t) := \cos(xt) \quad , \text{ definér } G \text{ som i 1)}$$

$$\text{Påstand: } G \in C^0(\mathbb{R})$$

Bevis:

Da $\forall x, t \in \mathbb{R}: |g(x, t)| \leq 1 \in L^1(\mu)$ (da μ ss-mål) opfylder g betingelserne i a) i 1), da $g(\cdot, t) \in C^0(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$, dvs. $G \in C^0(\mathbb{R})$

□

$$\text{Påstand: Hvis } \int |\mathbf{t}|^2 \mu(d\mathbf{t}) < \infty, \text{ da gælder at } G \in C^2(\mathbb{R})$$

Bevis:

$$D_x [\cos(xt)] = -t \cdot \sin(xt) \quad , \quad D_x [-t \sin(xt)] = -t^2 \cos(xt)$$

Jef. 1. b) med $h(t)$ hh. $|t|$ og $|t|^2$ følger, at G er 2 gange diff. og $G'(x) = \int -t \cdot \sin(xt) \mu(dt)$ samt $G''(x) = \int -t^2 \cos(xt) \mu(dt)$ (pr antagelse gælder $|t|^2 \in L^1(\mu)$ og dermed $|t| \in L^1(\mu)$, da $L^2(\mu) \subseteq L^1(\mu)$ fordi $\mu(\mathbb{R}) = 1 < \infty$)

Af 1 a) med $h(t) = -t^2 \cos(xt)$ følger (da $|t|^2 \in L^1(\mu)$) at $G' \in C^0(\mathbb{R})$.

□

$$G'(0) = \int -t \cdot \sin(0 \cdot t) \mu(dt) = 0$$

$$G''(0) = \int -t^2 \cos(0 \cdot t) \mu(dt) = -\int t^2 \mu(dt) \in L^1(\mu)$$

3)

Øvelse 19 s. 64

Lad $f_1, \dots, f_k \in L^2(\mu)$ være givet, jvf. Gram-Schmidt processen kan vi antage, at $f_i \perp f_j$ $i \neq j$ og at $\|f_i\|_2^2 = 1$ $i=1, \dots, k$

Lad $(g_n) \subseteq \text{span}\{f_1, \dots, f_k\}$, så $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g \in L^2(\mu)$ i kvadratisk middelværdi.

For at vise at $\text{span}\{f_1, \dots, f_k\}$ opfylder betingelserne i Projektionssætningen s. 62 skal vi vise at $\text{gespan}\{f_1, \dots, f_k\}$ idet de andre betingelser er trivielt opfyldt

$$\forall n \geq 1 \exists a_{n1}, \dots, a_{nk} : g_n = a_{n1}f_1 + \dots + a_{nk}f_k$$

(g_n) er en Cauchy-følge i $L^2(\mu)$ og derfor ser vi v.h.j.a pythagoras, at (a_{ni}) er cauchy-følge $i=1, \dots, k$, dvs.

$\exists a_1, \dots, a_k : \lim_{n \rightarrow \infty} a_{ni} = a_i$ $i=1, \dots, k$ og det er derfor klart, at $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = a_1f_1 + \dots + a_kf_k \in \text{span}\{f_1, \dots, f_k\}$.

Vi kalder f_v f 's ortogonale projektion på $\text{span}\{f_1, \dots, f_k\}$ for $f \in L^2(\mu)$. Da $f - f_v \in \text{span}\{f_1, \dots, f_k\}^\perp$ ser vi, at $\forall i=1, \dots, k : \langle f, f_i \rangle - \langle f_v, f_i \rangle = 0$ og dermed, at $f_v = \langle f, f_1 \rangle f_1 + \dots + \langle f, f_k \rangle f_k$

4)

Påstand: $\Gamma(1/2) := \int_0^\infty t^{1/2-1} e^{-t} dt = \int e^{-x^2} \lambda_1(dx) = \sqrt{\pi}$

Beris:

Juf 5) på US11 $\int e^{-x^2} \lambda_1(dx) = \sqrt{\pi}$, vi skal derfor vise, at $\int_0^\infty t^{1/2-1} e^{-t} dt = \int e^{-x^2} \lambda_1(dx)$

Def. $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ $\varphi(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$

$\lambda_{1\varphi}$ kan ses som et mål på $\mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \lambda_{1\varphi}([0, x]) &= \lambda_1(\varphi^{-1}([0, x])) = \lambda_1([- \sqrt{x}, 0] \cup [0, \sqrt{x}]) \\ &= 2\sqrt{x} = \int_0^\infty t^{1/2-1} \cdot 1_{[0, x]} \lambda_1(dt) \end{aligned}$$

Af korollæret s. 24 + def. s. 40 ser vi, at

$\lambda_{1\varphi}$ er a.k. mht. $\lambda_1|_{\mathbb{R}_+}$ med tæthed $t \mapsto t^{1/2-1}$

Vi får:

$$\begin{aligned} \int e^{-x^2} \lambda_1(dx) &\stackrel{\text{sætning 3}}{=} \int_0^\infty e^{-t} \lambda_{1\varphi}(dt) \stackrel{\text{sætning 4}}{=} \int_0^\infty t^{1/2-1} e^{-t} \lambda_1(dt) \\ &= \int_0^\infty t^{1/2-1} e^{-t} dt \end{aligned}$$

□

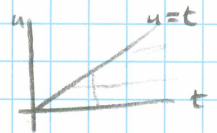
Pastand:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \int_0^\infty \sin(xt) t e^{-t^2/2} \lambda_1(dt) = x \int_0^\infty \cos(xt) e^{-t^2/2} \lambda_1(dt)$$

Bevis:

Da $\forall t, u \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}: |x \cos(xu) t e^{-t^2/2}| \leq xt e^{-t^2/2}$
 og $|x| \int_0^\infty t e^{-t^2/2} dt = |x|$, samt at $\sin(xt) = \int_0^t x \cos(xu) du$
 følger

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sin(xt) t e^{-t^2/2} \lambda_1(dt) &= \int_0^\infty \int_0^t x \cos(xu) t e^{-t^2/2} \lambda_1(du) \lambda_1(dt) \\ &\stackrel{\text{Fubini s. 48}}{=} \int_0^\infty \int_u^\infty x \cos(xu) t e^{-t^2/2} \lambda_1(dt) \lambda_1(du) \\ &= \int_0^\infty x \cos(xu) e^{-u^2/2} \lambda_1(du) = x \int_0^\infty \cos(xt) e^{-t^2/2} \lambda_1(dt) \quad \square \end{aligned}$$



Da $\forall x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+: |\sin(xt) t e^{-t^2/2}| \leq t e^{-t^2/2}$
 og $t e^{-t^2/2} 1_{\mathbb{R}_+} \in L^1(\lambda_1)$ gælder jvf opg. 1) på US B, at

$$\begin{aligned} D_x \left[\int_0^\infty \cos xt \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \lambda_1(dt) \right] &= - \int_0^\infty \sin(xt) t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \lambda_1(dt) \\ &= -x \int_0^\infty \cos xt e^{-t^2/2} \lambda_1(dt) \end{aligned}$$

Dvs. $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $G(x) = \int_0^\infty \cos xt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \lambda_1(dt)$ opfylder
 differentialligningen $G'(x) + xG(x) = 0$

Juf. Mat II-staf (se f.eks. Lindström) följer att

$$\underline{G(x) = e^{-x^2/2}}$$

Sandsynlighedsteori 2

Uge 48.

Forelæsninger: L^p -rummene afsluttes og vi starter på afsnittet *Konstruktion af mål*, der henter stof fra 1.21-1.27.

Øvelser: I de følgende opgaver betegner $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et givent sandsynlighedsfelt, hvorpå alle omtalte stokastiske variable antages defineret.

1) Lad $(X_n)_{n \geq 1}$ betegne en følge af kvadratisk integrable stokastiske variable. Vis at $\{X_n | n \geq 1\}$ er uniformt integrabel, hvis de to følger $(E[X_n])_{n \geq 1}$ og $(Var(X_n))_{n \geq 1}$ begge er begrænsede.

2) Lad $(X_n)_{n \geq 1}$ betegne stokastiske variable, så at $\{X_n | n \geq 1\}$ er uniformt integrabel. Definér for $n \geq 1$ $Y_n := (X_1 + \dots + X_n)/n$. Vis at $\{Y_n | n \geq 1\}$ er uniformt integrabel. Vink: Udnyt f.eks. Proposition 10.

3) Antag at X_n for alle $n \geq 1$ har middelværdi 0 og endelig andet moment σ^2 . Vis at X_n 'erne er parvis orthogonale i $L^2(P)$ og deducer herudfra ved brug af Pythagoras at $\sum_{n=1}^{\infty} X_n/n$ konvergerer i $L^2(P)$.

4) Lad $(X_n)_{n \geq 1}$ og X betegne givne stokastiske variable og f en kontinuert funktion fra $\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$. Vis at

$$X_n \rightarrow X \text{ } P\text{-n.o.} \Rightarrow f(X_n) \rightarrow f(X) \text{ } P\text{-n.o.}$$

Vis det tilsvarende for konvergens i sandsynlighed.

5) Lad $(E, \mathcal{E}, \mu)$ betegne et vilkårligt målrum og lad $(f_n)_{n \geq 1}$ og f betegne elementer i $L^2(\mu)$. Vis f.eks. ved brug af Cauchy-Schwarz's ulighed at $f_n^2 \rightarrow f^2$ i μ -middel, hvis $f_n \rightarrow f$ i μ -2-middel.

Som vist på side 26 gælder der et tilsvarende resultat for ethvert $p \geq 1$. ?

6) Antag at μ og ν er endelige ækvivalente mål på et måleligt rum $(E, \mathcal{E})$. Vis at der for givne elementer $(f_n)_{n \geq 1}$ og f i $M(\mathcal{E})$ gælder

$$f_n \rightarrow f \text{ } \mu\text{-n.o.} \Leftrightarrow f_n \rightarrow f \text{ } \nu\text{-n.o. og } f_n \rightarrow f \text{ } \mu\text{-mål} \Leftrightarrow f_n \rightarrow f \text{ } \nu\text{-mål.}$$

Afleveringsopgave: Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ betegne et sandsynlighedsfelt, og lad $(X_n)_{n \geq 1}$ og X betegne givne stokastiske variable, så at $X_n \rightarrow X$ i sandsynlighed, d.v.s. P -mål.

1) Vis under antagelsen $\{X_n^2 | n \geq 1\}$ uniformt integrabel, at

$$E[X_n] \rightarrow E[X], \quad E[X_n^2] \rightarrow E[X^2] \quad \text{og} \quad Var(X_n) \rightarrow Var(X).$$

2) Lad f betegne en kontinuert begrænset reel funktion. Vis ved brug af Proposition 10 punkt 2) at der findes en delfølge $(n_k)_{k \geq 1}$, så at

$$E[f(X_{n_k})] \rightarrow E[f(X)] \quad \text{for } k \rightarrow \infty.$$

Deducer herudfra at $E[f(X_n)] \rightarrow_{n \rightarrow \infty} E[f(X)]$.

Svend Erik Graversen

SS2, TD nr. 12

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ss.-filt

1)

$$(X_n) \in L^2(P)$$

Påstand: $\exists M_1, M_2 \forall n \geq 1: |E[X_n]| < M_1 \wedge \text{Var}(X_n) < M_2$ (*)
 $\implies (X_n) \text{ U.I.}$

Beris:

Det er klart, at $(X_n) \in L^1(P)$

Da $\text{Var}(X_n) = E[X_n^2] - (E[X_n])^2$, $\exists M \forall n \geq 1: E[X_n^2] < M$
jef. (*)

Lad $\varepsilon > 0$ være vilkårlig, vælg $K > \frac{M}{\varepsilon}$, da gælder $\forall n \geq 1$:

$$\int_{\{|X_n| > K\}} |X_n| dP = E[|X_n| \cdot 1_{\{|X_n| > K\}}] \leq \frac{1}{K} E[|X_n|^2 1_{\{|X_n| > K\}}] \leq \frac{M}{K} \leq \varepsilon$$

$$\text{thi} \quad \forall K \geq 1, p > 0: \frac{|X_n|}{K} 1_{\{|X_n| > K\}} \leq \left(\frac{|X_n|}{K}\right)^{1+p} 1_{\{|X_n| > K\}}$$

□

2)

(X_n) u.I.

$$\forall n \geq 1: \quad \bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Påstand: $(\bar{X}_n)$ u.I.

Beris:

Juf. Lemma 10 gælder $\sup_{n \geq 1} \int |X_n| dP < \infty$,

men $\forall n \geq 1: \int |\bar{X}_n| dP = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int |X_i| dP \leq \sup_{n \geq 1} \int |X_n| dP$

des. $\sup_{n \geq 1} \int |\bar{X}_n| dP \leq \sup_{n \geq 1} \int |X_n| dP < \infty$

Lad $\varepsilon > 0$ være vilkårlig

Juf. Lemma 10 $\exists \delta > 0 \forall A \in \mathcal{E}: \mu(A) \leq \delta: \sup_{n \geq 1} \int_A |X_n| dP \leq \varepsilon$

da $\forall n \geq 1: \int_A |\bar{X}_n| dP = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_A |X_i| dP \leq \sup_{n \geq 1} \int_A |X_n| dP \leq \varepsilon$

gælder $\sup_{n \geq 1} \int_A |\bar{X}_n| dP \leq \sup_{n \geq 1} \int_A |X_n| dP \leq \varepsilon$

Juf. Lemma 10 og ovenstående er $(\bar{X}_n)$ u.I.

□

3)

$(X_n)_{n \geq 1} \perp\!\!\!\perp \quad \forall n \geq 1: E[X_n] = 0, \text{Var}(X_n) = \sigma^2 < \infty$

(b.m. $\text{Var}(X_n) = E[X_n^2]$, da $E[X_n] = 0$)

Påstand: $\forall i \neq j: X_i \perp X_j \quad (i \in L^2(P))$

Beris:

$i \neq j$ vilk.

$$\langle X_i, X_j \rangle_{L^2(P)} = \int X_i X_j dP = E[X_i X_j] = 0$$

$X_i \perp X_j$
+ Tonelli-Fubini

□

Påstand: $\sum_{n=1}^{\infty} X_n/n$ konvergerer i $L^2(P)$

Beris:

Juf. lemma 13 skal vi vise, at $\sum_{n=1}^{\infty} \|X_n/n\|_2^2 < \infty$
(idet $X_i \perp X_j \Rightarrow X_i/i \perp X_j/j$), men
 $\|X_n/n\|_2^2 = 1/n^2 E[X_n^2] = 1/n^2 \text{Var}(X_n) = \sigma^2/n^2$, dvs.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|X_n/n\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2/n^2 = \sigma^2 \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \sigma^2 \pi^2/6 < \infty$$

□

4)

$(X_n), X$ s.v.

$f \in C^0(\mathbb{R})$

Påstand: $X_n \rightarrow X$ P-n.o. $\Rightarrow f(X_n) \rightarrow f(X)$ P-n.o.

Beris:

Velg $NEW(P) : \forall \omega \in \Omega \exists N : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$

Da f er kont. på hele $\mathbb{R}$ gjelder $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega) \Rightarrow f(X_n(\omega)) \rightarrow f(X(\omega))$, dvs. idet $NEW(P)$, at $f(X_n) \rightarrow f(X)$ P-n.o.

□

Påstand: $X_n \rightarrow X$ i P-mål $\Rightarrow f(X_n) \rightarrow f(X)$ i P-mål

Beris:

Lad $\epsilon, \tilde{\epsilon} > 0$ være vilkårlige

Da f er kont. gjelder at $\exists \delta > 0$:

$|X(\omega) - X_n(\omega)| < \delta \Rightarrow |f(X(\omega)) - f(X_n(\omega))| < \epsilon, \omega \in \Omega$ (*)

Da $X_n \rightarrow X$ i P-mål $\exists N \geq 1 \forall n \geq N$:

$P(|X - X_n| < \delta) \geq 1 - \tilde{\epsilon}$, men jf. (*) gjelder

$P(|X - X_n| < \delta) \leq P(|f(X) - f(X_n)| < \epsilon)$, dvs.

$\forall \epsilon, \tilde{\epsilon} > 0 \exists N \geq 1 \forall n \geq N : P(|f(X) - f(X_n)| \geq \epsilon) \leq \tilde{\epsilon}$

□

5)

$(E, \mathcal{E}, \mu)$ vilk. måltrom

$(f_n), f \in L^2(\mu)$

Påstand: $f_n \rightarrow f$ μ -2-middel $\Rightarrow f_n^2 \rightarrow f^2$ i μ -middel

Beweis:

Af Cauchy-Schwarz. følger, at

$$\forall n \geq 1: \int |f^2 - f_n^2| d\mu \leq \sqrt{\|f - f_n\|_2 \|f + f_n\|_2}$$

men $\|f + f_n\|_2 \leq 2\|f\|_2 + \|f - f_n\|_2$, dvs.,

$$\int |f^2 - f_n^2| d\mu \leq \sqrt{\|f - f_n\|_2 (2\|f\|_2 + \|f - f_n\|_2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

dvs. $f_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f^2$ i μ -middel

□

6)

$(E, \mathcal{E}) \text{ m. } \mu, \nu < \infty \text{ mål på } (E, \mathcal{E}) \quad \mu \approx \nu$

$(f_n), f \in M(E)$

Påstand:

$$f_n \rightarrow f \text{ } \mu\text{-n.o.} \iff f_n \rightarrow f \text{ } \nu\text{-n.o.}$$

Beris:

$\mu \approx \nu$, dvs. $N(\mu) = N(\nu)$, hvoraf påstanden flg. trivielt. $\square$

Påstand:

$$f_n \rightarrow f \text{ i } \mu\text{-mål} \iff f_n \rightarrow f \text{ i } \nu\text{-mål}$$

Beris:

Jf. øvelse 12 s. 27 gælder, da $\mu \approx \nu$, at ν er μ -kontinuerligt og μ er ν -kontinuerligt, dvs.

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0: \quad \mu(|f - f_n| \geq \varepsilon) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ &\iff \nu(|f - f_n| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$\square$

SS2, afliveringsoppgave nr. 12, Gunnar Hellmünd

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ss-felt

$(X_n), X$ s.v., $X_n \rightarrow X$ i P -mål

1)

Antag (X_n^2) u.i

Påstand: $E[X_n] \rightarrow E[X]$, $E[X_n^2] \rightarrow E[X^2]$

(og dermed, jvf. reglene for kovarians, idet $\text{Var}(U) = E[U^2] - (E[U])^2$,
at $\text{Var}(X_n) \rightarrow \text{Var}(X)$)

Beris:

Jvf. Setn. 6 gjelder, at $X_n \rightarrow X$ i P -2-middel
og af bemærkingen s. 61 følger at $E[X_n^2] \rightarrow E[X^2]$

$X_n \rightarrow X$ i P -2-middel $\Rightarrow X_n \rightarrow X$ i P -middel
jvf. korollar 5.43 og dermed, at $E[X_n] \rightarrow E[X]$

□

2)

$$f \in bC^0(\mathbb{R})$$

$$\text{Påstand: } \exists (n_k) : E[f(X_{n_k})] \rightarrow E[f(X)]$$

Beweis:

Juf. opg. 4) på US12 har vi, at $f(X_n) \rightarrow f(X)$ i P-mål

Af prop. 10 følger, at $\exists (n_k) : f(X_{n_k}) \rightarrow f(X)$ P-n.o.

Da f er begrænset følger af Lebesguesætn., at

$$E[f(X_{n_k})] \rightarrow E[f(X)]$$

□

$$\text{Påstand: } E[f(X_n)] \rightarrow E[f(X)]$$

Beweis:

Vi har, at (opg. 4 US12) $f(X_n) \rightarrow f(X)$ i P-mål

Juf. øvelse 16 er $(|f(X_n)|)$ u.I. (da f er begrænset)

dvs. af sætn. 6 følger, at $f(X_n) \rightarrow f(X)$ i P-middel

og dermed at $E[f(X_n)] \rightarrow E[f(X)]$

□

Sandsynlighedsteori 2

Uge 47.

Forelæsninger: Vi fortsætter med L^p -rum og behandler parallelt kapitel 4 afsnit 4.3.

Øvelser: 1) Betragt målrummet $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$, hvor μ er tællemalet. Vis at i dette specielle målrum, er konvergens μ -n.o. det samme som punktvis konvergens, hvorimod konvergens i μ -mål svarer til uniform konvergens. Sammenlign dette med Proposition 10.

2) Lad $(E, \mathcal{E})$ betegne et måleligt rum og lad $\mu := \delta_e$ for et givet $e \in E$. D.v.s. μ er punktmålet hørende til punktet e . Vis at

$$L(\mu) = \overline{M}(\mathcal{E}) \text{ og } L^1(\mu) = M(\mathcal{E}) \text{ samt } \int f d\mu = f(e) \text{ for alle } f \in \overline{M}(\mathcal{E}).$$

3) Øvelse 16 side 52. Husk at det underforstås, at målrummet er endeligt

4) Lad $(X_n)_{n \geq 1}$ betegne en følge af identisk fordelte stokastiske variable defineret på et givent sandsynlighedsfelt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Antag at $X_1 \in L^1(P)$ og vis at $\{X_n | n \geq 1\}$ er uniformt integrabel.

5) Vis at $\lambda_2(b(\mathbb{Q}, 1)) = \pi$ og vis ved brug af Tonelli's sætning samt opgave 2 på ugesedlen til Uge 45, at

$$\int e^{-x^2} \lambda_1(dx) = \sqrt{\pi}.$$

Vink: Se på $f: x \mapsto e^{-x^2}$. Vis herudfra at

$$\int \exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \lambda_n(d\mathbf{x}) = \pi^{n/2}.$$

Beregnes dette sidste integral ligeledes ved brug integrationsformlen side 49 samt Øvelse 10 side 25 finder man som vist side 82 ovenst, at

$$\lambda_n(b(\mathbb{Q}, 1)) = \pi^{n/2} / \Gamma(1 + n/2) \quad n \geq 1.$$

Afleveringsopgave: Lad $p \in (0, \infty)$ være givet. Vis at

$$E[|X|^p] = p \int_0^\infty P(|X| > t) \cdot t^{p-1} dt.$$

Vink: Vis og udnyt at billedmålet af $\mathbf{1}_{(0, \infty)} d\lambda_1$ ved afbildningen $x \mapsto |x|^{1/p}$ er absolut kontinuert m.h.t. λ_1 med tæthed $x \mapsto p x^{p-1} \cdot \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x)$.

Vis at hvis X og Y er uafhængige stokastiske variable, så er

$$E[|X + Y|^p] < \infty \Leftrightarrow E[|X|^p] + E[|Y|^p] < \infty$$

Vink: Anvend resultatet i Seksion 4.5.

Øvrige meddelelser: Lad mig benytte lejligheden til at uddrage en konseks af sidste afleveringsopgave, d.v.s. Exc. 4.11.

Lad U, V, Θ og R være som i 4.11, og definer for $f \in M_+(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ en funktion $\tilde{f} \in M_+(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ ved fastsættelsen

$$\tilde{f}(\theta, r) := f(r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (\theta, r) \in (-\pi, \pi] \times [0, \infty) \text{ og } 0 \text{ ellers.}$$

Pr. definition af U, V, Θ og R gælder derfor

$$f(U, V) = \tilde{f}(\Theta, R) \quad P\text{-n.o. og dermed } E[f(U, V)] = E[\tilde{f}(\Theta, R)].$$

Da Θ og R , som vist er uafhængige, kan denne lighed ved brug af Tonelli's Sætning og den lille transformationssætning skrives som

$$\int_{b(\mathbb{Q}, 1)} f(\mathbf{x}) d\lambda_2(d\mathbf{x}) = \int_0^1 \int_{-\pi}^\pi r \cdot f(r \cos \theta, r \sin \theta) \lambda_1(d\theta) \lambda_1(dr),$$

d.v.s. formelen for integration i polære koordinater. Ved at opskrive det tilsvarende for cirkler med vilkårlig radius R og dernæst lade $R \rightarrow \infty$ fås ifølge sætningen om Monoton konvergens formelen for integration over hele planet, d.v.s. ligheden

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) d\lambda_2(d\mathbf{x}) = \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi r \cdot f(r \cos \theta, r \sin \theta) \lambda_1(d\theta) \lambda_1(dr).$$

Udvildelsen til funktioner, som antager både positive og negative værdier, overlades til læseren.

Svend Erik Graversen

SS2, TD nr. 11

1)

Betrakt $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ μ tellermaßet

$n \geq 1: f_n, f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Påstand: $f_n \xrightarrow{\mu} f \iff f_n \xrightarrow{\text{n.o.}} f$ n.o.

Basis:

$\implies$: trivielt

$\impliedby$:

$\exists N \in \mathbb{N}(\mu): \forall x \in \mathbb{N} \setminus N: f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x)$, men $N \cap \mu = \{\emptyset\}$
Jf. opgave 1 på UST, dvs. $f_n \xrightarrow{\mu} f$

□

Påstand: $f_n \xrightarrow{\mu} f$ i μ -mål $\iff f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f$ (dvs. uniformt)

Basis:

$\implies$

$f_n \xrightarrow{\mu} f$ μ -mål, dvs. $\forall \varepsilon > 0, \delta > 0 \exists N \in \mathbb{N}(\forall n \geq N: P(|f_n - f| > \varepsilon) \leq \delta)$

Jf. def. på tellermaßet (valg $\delta < 1$) gælder dermed:

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}(\forall n \geq N \forall x \in \mathbb{N}: |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$, dvs. $f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f$

$\impliedby$:

$f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f$, dvs. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}(\forall n \geq N, x \in \mathbb{N}: |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$

men derfor gælder også (udfra def. på tellermaßet), at

$\forall \varepsilon > 0, \delta > 0 \exists N \in \mathbb{N}(\forall n \geq N: P(|f_n - f| > \varepsilon) = 0 \leq \delta)$

$\implies \forall \varepsilon > 0, \delta > 0 \exists N \in \mathbb{N}(\forall n \geq N: P(|f_n - f| > \varepsilon) \leq \delta)$, dvs. $f_n \xrightarrow{\mu} f$ μ -mål

□

Ud fra ovenstående og prop. 10 kan vi konkludere, at
 $f_n \xrightarrow{\mu} f$ i μ -p-værdi $\Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$
 og $f_n \xrightarrow{\mu} f$ i μ -værdi $\Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$

2)

$(E, \mathcal{E}) \text{ (m)} \quad \mu := \delta_e, e \in E, \text{ dvs } \mu(A) = 1_A(e)$

Påstand:

$L(\mu) = \overline{M}(E), L^1(\mu) = M(E), \forall f \in \overline{M}(E): \int f d\mu = f(e)$

Beweis:

Lad $f \in \overline{M}(E)$

$$\int f^+ d\mu = \int f^+ 1_E d\mu = \int f^+ 1_{\{e\}} d\mu = f^+(e) \quad (f^+ 1_E = f^+ 1_{\{e\}} \text{ n.v.})$$

Tilsvarende ses, at $\int f^- d\mu = f^-(e)$, og dermed er påstandene trivielle.

□

3)

Øvelse 16

$\mathcal{H} \subseteq L^1(\mu)$

Påstand: $\mathcal{H}$ endelig mængde $\Rightarrow \mathcal{H}$ U.I.

Beweis:

Lad $\varepsilon > 0$ være vilkårlig

Juf. Lebesgues sætning om domineret konvergens gælder ($H \subseteq L^1(\mu)$).

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \int_{\{ |f| > K \}} |f| d\mu = 0, \quad f \in H, \quad \text{idet } \mu \text{ endeligt} \Rightarrow \mu(\{ |f| > K \}) \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0$$

Da der er endelig mange elementer i H har vi dermed, at
 $\exists K > 0 \forall f \in H: \int_{\{ |f| > K \}} |f| d\mu \leq \varepsilon$, dvs $\sup_{f \in H} \int_{\{ |f| > K \}} |f| d\mu \leq \varepsilon$ $\square$

Påstand: $\exists g \in L^1(\mu) \forall f \in H: |f| \leq g \Rightarrow H$ u.I.

Beweis:

$\exists g \in L^1(\mu) \forall f \in H: |f| \leq g$ (*) , lad $\varepsilon > 0$ være vilkårlig

Juf. Lebesgues sætn., og idet μ er endeligt således at
 $\mu(\{ |g| > K \}) \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0$, følger at $\exists K > 0: \int_{\{ |g| > K \}} g d\mu \leq \varepsilon$

men juf. (*) gælder $\int_{\{ |f| > K \}} |f| d\mu \leq \int_{\{ |g| > K \}} g d\mu \leq \varepsilon, f \in H$
($\{ |f| > K \} \subseteq \{ |g| > K \}$) og dermed, at

$$\sup_{f \in H} \int_{\{ |f| > K \}} |f| d\mu \leq \varepsilon$$

$\square$

4)

(X_n) identisk fordelte s.v. defineret på ss.-feltet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Påstand: $X_1 \in L^1(P) \implies (X_n)$ u.i.

Beweis:

Lad $\varepsilon > 0$ være vilkårlig

Da $P(|X_1| > k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ følger af Lebesgues sætn. at

$$\exists k > 0 : \int_{\{|X_1| > k\}} |X_1| dP \leq \varepsilon$$

$\forall n \geq 1$:

$$\int_{\{|X_n| > k\}} |X_n| dP \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{integrationsformel} \\ \text{s. 49}}}{=} \int_0^\infty \mu(|X_n| \cdot 1_{\{|X_n| > k\}} > t) \lambda_1(dt)$$

$$= k \cdot \mu(|X_n| > k) + \int_k^\infty \mu(|X_n| > t) \lambda_1(dt)$$

$$\stackrel{X_n \sim X_1}{=} k \mu(|X_1| > k) + \int_k^\infty \mu(|X_1| > t) \lambda_1(dt)$$

$$= \int_{\{|X_1| > k\}} |X_1| dP \leq \varepsilon$$

$$\text{Dvs. } \sup_{n \geq 1} \int_{\{|X_n| > k\}} |X_n| dP \leq \varepsilon$$

□

Påstand: $\int e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2} \lambda_n(dx) = \pi^{n/2}$

Beris:

V. h.j.a. induktion ser vi, at vi umiddelbart kan generalisere Tonelli's sætn., dvs.,

$$\begin{aligned} \int e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2} \lambda_n(dx) &= \int \prod_{i=1}^n e^{-x_i^2} \lambda_n(dx) = \prod_{i=1}^n \int e^{-x_i^2} \lambda_1(dx_i) \\ &= (\sqrt{\pi})^n = \pi^{n/2} \end{aligned}$$

□

(Se s. 82 for ydeligere diskussion)

5)

Jvf. overvejelser fuldstændig ækvivalent med dem på s. 42 ser vi, at $\int_{\overline{b}(0,1)} d\lambda_2 = R \iint_{\overline{b}(0,1)} d(x,y)$ og dermed har vi

$$\text{at } \int_{\overline{b}(0,1)} d\lambda_2 = \int_{\overline{b}(0,1)} d\lambda_2 = R \iint_{\overline{b}(0,1)} d(x,y) = \pi$$

Påstand: $\int e^{-x^2} \lambda_1(dx) = \sqrt{\pi}$

Beweis:

Bm. jvf. Tonellis sætn. gælder

$$\int e^{-|x|^2} \lambda_2(dx) = \iint e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} \lambda_1(dx_1) \lambda_1(dx_2) = \left(\int e^{-x^2} \lambda_1(dx) \right)^2$$

Jvf. opg. 2 på US 9 gælder

$$\int e^{-|x|^2} \lambda_2(dx) = 2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2} \lambda_1(dr)$$

$$R \int_0^\infty 2\pi r e^{-r^2} dr = R \int_0^\infty \pi e^{-s} ds = \pi$$

Dvs. (jvf. BM s. 42) at $\int e^{-|x|^2} \lambda_2(dx) = \pi$ og

dermed ser vi, at $\int e^{-x^2} \lambda_1(dx) = \sqrt{\pi}$

□

SS2, afleveringsopgave nr. 11, Gunnar Hellmünd

$p \in (0, \infty)$ vilkårlig

$$\text{Påstand: } E[|X|^p] = p \int_0^\infty P(|X| > t) t^{p-1} dt$$

Beris:

$$E[|X|^p] \stackrel{\text{s. 49}}{=} \int_0^\infty P(|X|^p > t) dt = \int_0^\infty P(|X| > t^{1/p}) dt$$

$$\stackrel{\text{sectn. 3}}{=} \int_0^\infty P(|X| > s) \lambda_p(ds)$$

$$\stackrel{\text{sectn. 4}}{=} p \int_0^\infty P(|X| > t) t^{p-1} dt, \text{ hvor vi bruger flg. :}$$

$$\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, t \mapsto t^{1/p}$$

$$\lambda_{1,\varphi}([0, x]) = \lambda_1(\varphi^{-1}([0, x])) = \lambda_1([0, x^p]) = \int_0^x p t^{p-1} \lambda_1(dt)$$

Hvilket ifølge korollært s. 24 og def. s. 40 betyder at $\lambda_{1,\varphi}$ er a.k. mht. $\lambda_1|_{\mathbb{R}_+}$ med tæthed $t \mapsto p t^{p-1}$.

□

$$\text{Påstand: } X \perp\!\!\!\perp Y: X+Y \in L^p(P) \iff X, Y \in L^p(P)$$

Beris:

Påstanden er ækvivalent med at vise, at

$$X \perp\!\!\!\perp Y: E[|X+Y|^p] < \infty \iff E[|X|^p] + E[|Y|^p] < \infty$$

Antag derfor $X \perp\!\!\!\perp Y$:

$$\Leftarrow \text{ flg. af lin. af } E \text{ samt uligheden } |x+y|^p \leq 2^p (|x|^p + |y|^p)$$

$\Rightarrow$ Lad os nøjes med at vise $E[|X|^p] < \infty$ resten flg. tilsvarende

Af 4.5 og Tonelli-Fubini følger, at $\exists y \in \mathbb{R}: \int |X+y|^p dP < \infty$

$$\Rightarrow E[|X|^p] = \int |X|^p dP \leq 2^p (\int |X+y|^p dP + \int |y|^p dP) = 2^p \int |X+y|^p dP + 2^p |y|^p < \infty$$

□

Sandsynlighedsteori 2

Uge 46.

Forelæsninger: Vi færdiggør Kapitel 4 afsnit 4.1, 4.4, 4.5 og 4.6. og starter, hvis der er tid, på afsnittene *Konvergensformer* og *L^p -rum*, som henter stof fra 3.22 og 3.25.

Øvelser: 1) Lad X og Y betegne reelle stokastiske variable, som begge er absolut kontinuerte m.h.t. til Lebesgue målet λ_1 med tætheder f_X og f_Y . Vis ved hjælp af Tonelli's sætning, at X og Y er uafhængige, hvis og kun hvis

$$(x, y) \mapsto f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

er en tæthed for (X, Y) m.h.t. Lebesgue målet λ_2 .

2) Exc. 4.20 og 4.21.

3) Lad X og Y betegne uafhængige reelle stokastiske variable, som begge er absolut kontinuerte m.h.t. til Lebesgue målet λ_1 med tætheder f_X og f_Y . Vis ved hjælp af formel 4.5.3 og Tonelli's sætning at $X + Y$, $X - Y$, $X \cdot Y$ og X/Y alle er absolut kontinuerte m.h.t. til Lebesgue målet λ_1 med tætheder givet ved

$$\begin{aligned} X + Y : t &\mapsto \int f_X(t-s) \cdot f_Y(s) \lambda_1(ds), \quad X - Y : t \mapsto \int f_X(t+s) \cdot f_Y(s) \lambda_1(ds) \\ X \cdot Y : t &\mapsto \int f_X\left(\frac{t}{s}\right) \cdot f_Y(s) \cdot \frac{1}{|s|} \lambda_1(ds), \quad X/Y : t \mapsto \int f_X(t \cdot s) \cdot f_Y(s) \cdot |s| \lambda_1(ds). \end{aligned}$$

For at ikke al tiden skal gå med disse regnerier, kan I f.eks. koncentrere jer om et af de fire tilfælde, men alle formlerne er selvfølgelig vigtige.

4) Lad $(E, \mathcal{E}, \mu)$ betegne et målrum og lad r , s og t betegne ikke-negative reelle tal, så at $1/r = 1/s + 1/t$. Vis at

$$\left(\int |f \cdot g|^r d\mu \right)^{1/r} \leq \left(\int |f|^s d\mu \right)^{1/s} \cdot \left(\int |g|^t d\mu \right)^{1/t}$$

for alle $f, g \in M(\mathcal{E})$.

Vink: Overvej at det er nok at se på ikke-negative funktioner og udnyt så Hölder's ulighed. Bemærk at $1 = r/s + r/t$.

5) Betragt målrummet $(\mathbb{N}^2, 2^{\mathbb{N}^2}, \mu_2)$, hvor μ_2 er tællemålet på $(\mathbb{N}^2, 2^{\mathbb{N}^2})$. Vis at $\mu_2 = \mu_1 \otimes \mu_1$, hvor μ_1 er tællemålet på $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$.

Oversæt Tonelli's og Fubini's sætninger til udsagn om ombytning af summationsordenen vedrørende summer af dobbeltindicerede rækker af reelle tal.

Afleveringsopgave: Exc. 4.11. Det kan uden bevis benyttes, at λ_2 er rotationsinvariant samt at $\lambda_2(b(\underline{0}, r)) = \pi r^2$ for $r > 0$.

Svend Erik Graversen

1)

 X, Y s.v. a.k. mht. λ_1 med tæthed hh. f_X og f_Y

Påstand:

$$X \perp\!\!\!\perp Y \iff (X, Y) \text{ a.k. mht. } \lambda_2 \text{ med tæthed } (x, y) \mapsto f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Bevis:

 $\Rightarrow$

$$X \perp\!\!\!\perp Y$$

Lad $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, dvs. $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ Da $X \perp\!\!\!\perp Y$ følger af 2.10, at

$$\begin{aligned} P((X, Y) \in A \times B) &= P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B) \\ &= \int_A f_X(x) \lambda_1(dx) \cdot \int_B f_Y(y) \lambda_1(dy) \\ &= \int_A \left\{ \int_B f_X(x) f_Y(y) \lambda_1(dy) \right\} \lambda_1(dx) \\ &\stackrel{\text{Sect. 5 Tonelli s. 48}}{=} \int_{A \times B} f_X f_Y d(\lambda_1 \otimes \lambda_1) \stackrel{\text{Sect. 11 s. 25}}{=} \int_{A \times B} f_X \cdot f_Y d\lambda_2 \end{aligned}$$

Da $\mathcal{B}(\mathbb{R})^2 = \sigma(\mathcal{g})$, $\mathcal{g} = \{A \times B \mid A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$
 og idet $\mathcal{g}$ er π -stabil og $[n, n[x] \times]n, n[\uparrow \mathbb{R}^2$
 fås af korollaret s. 24 og def. s. 40 (idet $f_X \cdot f_Y \in \overline{\Pi}(\mathcal{B}(\mathbb{R})^2)_+$)
 at (X, Y) er a.k. mht. λ_2 med tæthed $f_X \cdot f_Y$

$\Leftarrow$:

(X, Y) a.k. mht. λ_2 med tæthed $(x, y) \mapsto f_X(x) \cdot f_Y(y)$

Lad $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P((X, Y) \in A \times B) = \int_{A \times B} f_X f_Y d\lambda_2$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Tonelli} \\ \text{s. 48}}}{=} \int_A \left\{ \int_B f_X(x) f_Y(y) \lambda_1(dy) \right\} \lambda_1(dx) = \int_A f_X d\lambda_1 \int_B f_Y d\lambda_1$$

$$= P(X \in A) P(Y \in B), \text{ dvs. (jvf. 2.9) at } X \perp Y$$

□

2)

Exc. 4.20

X s.v. Antag $\mu := E[X] \geq 0$, $0 < \tau := E[X^2] < \infty$

Påstand: $\forall 0 \leq t \leq 1$: $P(X > t\mu) \geq \frac{(1-t)^2 \mu^2}{\tau}$

Beweis:

$$X = X \cdot 1_{\{X \leq t\mu\}} + X \cdot 1_{\{X > t\mu\}} \leq t\mu 1_{\{X \leq t\mu\}} + X 1_{\{X > t\mu\}}$$

$\Downarrow$

$$\mu \leq t\mu + P(X > t\mu)$$

$\Downarrow$

$$(1-t)^2 \mu^2 \leq P(X > t\mu)^2 \quad (*)$$

Hölder anvendt på X og $X^2 1_{\{X^2 > (t\mu)^2\}}$ giver

$$P(X^2 > (t\mu)^2) \leq \frac{E[X^2] P(X^2 > (t\mu)^2)}{P(X^2 > (t\mu)^2)} \Rightarrow \tau \geq P(X > t\mu)$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} P(X > t\mu) \geq \frac{(1-t)^2 \mu^2}{\tau}$$

□

Exc. 4.21

X s.v. $\mu = E[X]$, $\sigma^2 = \text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = E[X^2] - \mu^2$

$\exists a < b : P(a \leq X \leq b) = 1$

Påstand: $\sigma^2 \leq (\mu - a)(b - \mu)$

og $\sigma^2 = (\mu - a)(b - \mu) \iff P(X=a) + P(X=b) = 1$

Bevis:

$$\begin{aligned} E[(X-a)(b-X)] &= E[bX - X^2 - ab + aX] \\ &= b\mu - E[X^2] - ab + a\mu \stackrel{(+)}{=} (\mu - a)(b - \mu) - \sigma^2 \quad (*) \end{aligned}$$

Da $P(a \leq X \leq b) = 1$ er $P((X-a)(b-X) \geq 0) = 1$, dvs. af (*) følger, at $\sigma^2 \leq (\mu - a)(b - \mu)$

Hvis $P(X=a) + P(X=b) = 1$, gjelder

$$E[(X-a)(b-X)] = \int_{X=a} (X-a)(b-X) + \int_{X=b} (X-a)(b-X) = 0$$

af (*) følger, at $\sigma^2 = (\mu - a)(b - \mu)$

Hvis $\sigma^2 = (\mu - a)(b - \mu) = 0$ gjelder at $E[(X-a)(b-X)] = 0$

$\implies (X-a)(b-X) = 0$ n.o. $\implies X=a \vee X=b$ n.o.

$\implies P(X=a) + P(X=b) = 1$

□

$$(+)\ (\mu - a)(b - \mu) = b\mu - \mu^2 - ab + a\mu$$

3)

$X \perp\!\!\!\perp Y$ s.v.

X, Y a.k. mht. λ_1 med tætheder f_X og f_Y

Def. 1) $(x, y) \mapsto f_X(x) f_Y(y)$ en tæthed for (X, Y)

Def. resultaterne for målelige fkt v $X+Y, X-Y, X \cdot Y$ og X/Y s.v.

Lad $x \in \mathbb{R}$ være vilkårlig

$$P(X+Y \leq x) = P((X, Y) \in \{(x, y) \mid x+y \leq x\})$$

$$= \int_{\{(x, y) \mid x+y \leq x\}} f_X \cdot f_Y \, d\lambda_2 \stackrel{\text{Tonelli s. 78 (*)}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{-\infty, x-u} f_X(u) \cdot f_Y(v) \, \lambda_1(dv) \right\} \lambda_1(du)$$

$$\stackrel{\text{setn. 3 s. 38}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{-\infty, x} f_X(u) \cdot f_Y(v-u) \, \lambda_1(dv) \right\} \lambda_1(du)$$

+ λ_1 translationsinv.

$$\stackrel{\text{Tonelli s. 48}}{=} \int_{[-\infty, x]} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f_X(u) \cdot f_Y(v-u) \, \lambda_1(du) \right\} \lambda_1(dv)$$

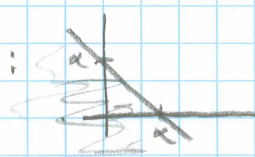
Tilsvarende ses, at

$$P(X+Y \leq x) = \int_{[-\infty, x]} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f_X(u-v) f_Y(v) \, \lambda_1(dv) \right\} \lambda_1(du)$$

Af korollaret s. 24 + def. s. 40 følger, at $X+Y$ er a.k. mht. λ_1 med tæthed $u \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_X(u-v) f_Y(v) \, \lambda_1(dv)$

(*)

$\{(x, y) \mid x+y \leq x\}$:



Lad $x \in \mathbb{R}$ være vilkårlig

$$P(X - Y \leq x) = P((X, Y) \in \{(x, y) \mid x - y \leq x\})$$

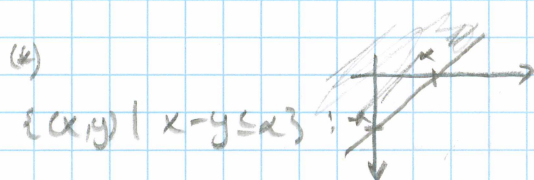
$$= \int_{\{(x, y) \mid x - y \leq x\}} f_X f_Y d\lambda_2 \stackrel{\text{Tonelli s. 42}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{-\infty, y+x} f_X(u) f_Y(v) \lambda_1(du) \right\} \lambda_1(dv)$$

$$\stackrel{\text{setn. 3 s. 39}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{-\infty, x] f_X(u+v) f_Y(v) \lambda_1(du) \right\} \lambda_1(dv)$$

+ λ_1 translationsinvariant

$$\stackrel{\text{Tonelli s. 48}}{=} \int_{-\infty, x] \left\{ \int_{\mathbb{R}} f_X(u+v) f_Y(v) \lambda_1(dv) \right\} \lambda_1(du)$$

Af korollært s. 24 + def. s. 40 følger, at $X - Y$ er a.k. mht. λ_1 med tæthed $u \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_X(u+v) f_Y(v) \lambda_1(dv)$



Lad $x \in \mathbb{R}$ være vilkårlig

$$P(X \cdot Y \leq x) = P((X, Y) \in \{(x, y) \mid x \cdot y \leq x\})$$

$$= \int_{\{(x, y) \mid x \cdot y \leq x\}} f_X f_Y d\lambda_2 \stackrel{\text{Tonelli s. 48}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f_X(u) f_Y(v) \lambda_1(du) \right\} \lambda_1(dv)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f_X\left(\frac{u}{v}\right) f_Y(v) \frac{1}{|v|} \lambda_1(du) \right\} \lambda_1(dv)$$

$$\stackrel{\text{Tonelli s. 48}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f_X\left(\frac{u}{v}\right) f_Y(v) \frac{1}{|v|} \lambda_1(du) \right\} \lambda_1(dv)$$

Af korollært s. 24 + def. s. 40 følger, at $X \cdot Y$ er a.k. mht. λ_1 med tæthed $u \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_X\left(\frac{u}{v}\right) f_Y(v) \frac{1}{|v|} \lambda_1(du)$

(*):

$$\{(x, y) \mid x \cdot y \leq x\} : \alpha \gg 0$$

(+)

Sætn. 3 s. 38 giver med $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\varphi(x) := v \cdot x$, at

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(u) f_Y(v) \lambda_1(du) = \int_{\mathbb{R}} f_X\left(\frac{t}{v}\right) f_Y(v) \lambda_{1,\varphi}(dt)$$

$$\stackrel{\text{Jf. sætn. 4 s. 41}}{=} \int_{\mathbb{R}} f_X\left(\frac{u}{v}\right) f_Y(v) \cdot \frac{1}{|v|} \lambda_1(du)$$

idet $\lambda_{1,\varphi}[a, b] = \lambda_1(\varphi^{-1}([a, b])) = \lambda_1\left[\frac{a}{v}, \frac{b}{v}\right] = \frac{1}{|v|} \lambda_1[a, b]$ + korollært s. 24

Lad $x \in \mathbb{R}$ være vilkårlig (Antag $P(\Xi \neq 0) = 1$)

$$P(X/\Xi \leq x) = P((X, \Xi) \in \{(x, y) \mid x/y \leq x\})$$

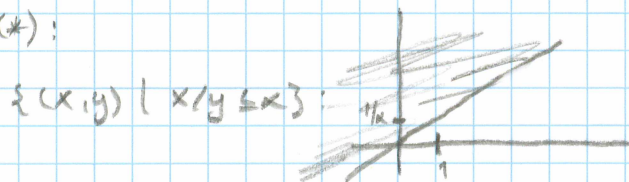
$$= \int_{\{(x, y) \mid x/y \leq x\}} f_X f_\Xi d\lambda_2 \stackrel{\text{Tonelli s. 48}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{]-\infty, x \cdot v]} f_X(u) f_\Xi(v) \lambda_1(du) \right\} \lambda_1(dv)$$

$$\stackrel{(+)}{=} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{]-\infty, x]} f_X(v \cdot u) f_\Xi(v) |v| \lambda_1(du) \right\} \lambda_1(dv)$$

$$\stackrel{\text{Tonelli s. 48}}{=} \int_{]-\infty, x]} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f_X(v \cdot u) f_\Xi(v) |v| \lambda_1(du) \right\} \lambda_1(dv)$$

Af korollært s. 24 + def. s. 40 følger, at X/Ξ er a.k. mht. λ_1 med tæthed $u \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_X(v \cdot u) f_\Xi(v) |v| \lambda_1(dv)$

(*):



(+)

Sæt. 3 s. 38 med $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\varphi(x) = x/v$ giver

$$\int_{]-\infty, x \cdot v]} f_X(u) f_\Xi(v) \lambda_1(du) = \int_{]-\infty, x]} f_X\left(\frac{t}{v}\right) f_\Xi(v) \lambda_{\varphi_p}(dt)$$

$$\nearrow = \int_{]-\infty, x]} f_X\left(\frac{t}{v}\right) f_\Xi(v) |v| \lambda_1(dt)$$

Juf. sætn. 4 s. 41

idet $\lambda_{\varphi_p}[a, b] = \lambda_1(\varphi^{-1}[a, b]) = |v| \lambda_1[av, bv]$ + korollært s. 24

4)

$(E, \mathcal{E}, \mu) \text{ } (\infty)$

$r, s, t \in \mathbb{R}_+ : \frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{1}{t}$

Påstand: $\forall f, g \in M(E) : \left(\int |fg|^r d\mu \right)^{1/r} \leq \left(\int |f|^s d\mu \right)^{1/s} \cdot \left(\int |g|^t d\mu \right)^{1/t}$

Bewis:

Lad $f, g \in M(E)$ være givet, da gælder $(x \mapsto |x|)$ kont.)
 $|f|, |g| \in M(E)_+$ og da $|fg| = |f||g|$ omhandler påstanden
 for så vidt kun et udsagn om de positive fkt. $|f|, |g|$
 $|f|^r, |g|^r$ er veldef. målelige fkt. og nu følger af
 Hölders ulighed:

$$\int |fg|^r d\mu = \int |f|^r |g|^r d\mu \leq \left(\int |f|^{r \cdot \frac{s}{s-1}} d\mu \right)^{r/s} \left(\int |g|^{r \cdot \frac{t}{t-1}} d\mu \right)^{r/t}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\int |fg|^r d\mu \right)^{1/r} \leq \left(\int |f|^s d\mu \right)^{1/s} \left(\int |g|^t d\mu \right)^{1/t}$$

□

5)

Betragt $(\mathbb{N}^2, 2^{\mathbb{N}^2}, \mu_2)$, hvor μ_2 er tællende målt på $(\mathbb{N}^2, 2^{\mathbb{N}^2})$, lad μ_1 betegne tællende målt på $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$

Påstand: $\mu_2 = \mu_1 \otimes \mu_1$

Beris:

Idet $2^{\mathbb{N}} \otimes 2^{\mathbb{N}} = \sigma(A \times B \mid A \subseteq \mathbb{N}, B \subseteq \mathbb{N}) = 2^{\mathbb{N}^2}$ ser vi, at μ_2 og $\mu_1 \otimes \mu_1$ er def. på den samme σ -algebra.

Lad $A, B \subseteq \mathbb{N}$ være givet, det er jvf.

bemærket s. 24 nok at vise, at $\mu_2(A \times B) = \mu_1 \otimes \mu_1(A \times B)$

$$\mu_2(A \times B) = \#A \cdot \#B = \mu_1(A) \cdot \mu_1(B) = \mu_1 \otimes \mu_1(A \times B) \quad \square$$

Jvf. s. 48 gælder flg. formulering af Tonelli's sætn.:

Lad $(x_{n,m})_{n,m \in \mathbb{Z}_+} \in \mathbb{R}_+$, da gælder

$$\sum_{n,m} x_{n,m} = \sum_n \sum_m x_{n,m} = \sum_m \sum_n x_{n,m}$$

Fubini giver flg.:

Lad $(x_{n,m})_{n,m \in \mathbb{Z}_+} \in \mathbb{R}$, da gælder, at

$\sum_{n,m} x_{n,m}$ er veldefineret og endelig, hvis

$$\sum_n \sum_m |x_{n,m}| = \sum_m \sum_n |x_{n,m}| < \infty \text{ og i så fald er}$$

$$\sum_{n,m} x_{n,m} = \sum_n \sum_m x_{n,m} = \sum_m \sum_n x_{n,m}$$

SS2, afleveringsopgave nr. 10, Gunna Hellelund

Exc. 4.11

Antag at (U, V) er uniformt fordelt på $\overline{B}(0, 1)$

$$\text{Dvs. } P((U, V) \in B) = \frac{\lambda_2(B \cap \overline{B}(0, 1))}{\lambda_2(\overline{B}(0, 1))}$$

Helt i tråd med resultatet på s. 42 og udfra Riemann-int. på $\mathbb{R}^2$ gælder at $\lambda_2(\overline{B}(0, r)) = \pi r^2$ og specielt, at $\lambda_2(\overline{B}(0, 1)) = \pi$ (samt at λ_2 er rotationsinvariant).

$$\text{Lad } x \in \mathbb{R} : \begin{cases} 0, & x \leq -1 & (1) \\ \frac{1}{\pi} (\pi - \cos^{-1}(x) + \cos x \cdot \sin x), & -1 < x \leq 0 & (2) \\ \frac{1}{\pi} (\cos^{-1}(x) - \cos x \cdot \sin x), & 0 < x \leq 1 & (3) \\ 1, & x > 1 & (4) \end{cases}$$

Vi ser, at $x \mapsto P(U \leq x)$ er i hvertfald stk. vis diff.

$$D[(1)] = D[(4)] = 0$$

$$D[(2)] = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2 \cdot \cos^2(x) - 1 \right)$$

$$D[(3)] = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2 \cdot \cos^2(x) - 1 \right) = -D[(2)]$$

Vi ser, at tætheden for U (og dermed pga symmetri V) er givet ved

$$f_U(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2} \pi} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2 \cos^2(x) - 1 \right) 1_{]-1, 1[}$$

Lad (R, Θ) betegne de polære koordinater for (U, V) ,
dvs. $0 \leq R \leq 1$, $-\pi < \Theta \leq \pi$ og $U = R \cdot \sin \Theta$, $V = R \cdot \cos \Theta$

Påstand: $R \perp \Theta$

Beweis:

Lad $r, t \in \mathbb{R}$

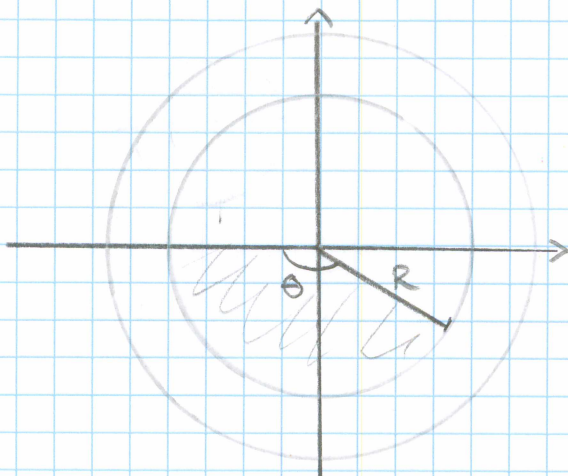
$$P(R \leq r) = \begin{cases} 0, & r \leq 0 \\ P(R^2 \leq r^2) = P(U^2 + V^2 \leq r^2) = \frac{\lambda_2(B(0, r))}{\lambda_2(B(0, 1))} = r^2, & 0 < r < 1 \\ 1, & r \geq 1 \end{cases}$$

(dvs. tætheden for R er $f_R(r) = 2r \cdot 1_{(0,1)}(r)$)

$$P(\Theta \leq t) = \begin{cases} 0, & t \leq -\pi \\ \frac{t + \pi}{2\pi}, & -\pi < t < \pi \\ 1, & t \geq \pi \end{cases}$$

(dvs. tætheden for Θ er $f_\Theta(t) = \frac{1}{2\pi} 1_{(-\pi, \pi)}(t)$)

$$P(R \leq r, \Theta \leq t) = \frac{\pi r^2 \cdot \frac{t + \pi}{2\pi}}{\pi} \\ = r^2 \cdot \frac{t + \pi}{2\pi} = P(R \leq r) P(\Theta \leq t) \quad (r, t) \in [0, 1] \times]-\pi, \pi]$$



Vi har indirekte brugt
resultater om Riemann
integralet og arealberegning
og dermed λ_2 .

□

Sandsynlighedsteori 2

Uge 45.

Forelæsninger: Vi færdiggør diskussionen af produktmål og går, hvis tiden tillader det, derefter i gang med Kapitel 4 afsnit 4.1, 4.4, 4.5 og 4.6.

Øvelser: 1) Exc. 4.23 og 4.1. Vink til 4.1: Udnyt Beppo Levi's Sætning. "Summable a.s." betyder konvergens med endelig grænseværdi P -n.o.

2) Vis ved hjælp af "den lille transformationssætning", at

$$\int_{\mathbf{R}^2} f(|\underline{x}|) \lambda_2(d\underline{x}) = 2\pi \int_0^\infty r \cdot f(r) \lambda_1(dr)$$

for alle ikke-negative Borel funktioner f defineret på $\mathbf{R}_+$. $|\underline{x}|$ betegner her den sædvanlige længde i $\mathbf{R}^2$, d.v.s. $|\underline{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2$. Vink. $\lambda_2(b(\underline{0}, 1)) = \pi$.

3) Øvelse 15 side 41.

4) Lad μ betegne et mål på $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ og lad $f \in L(\mu)$ være givet, så at $\int f d\mu \in \mathbf{R}$. Definer $F: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ ved

$$F(x) := \int_0^x f(t) d\mu \quad x \in \mathbf{R}_+.$$

Vis ved brug af Lebesgue's Sætning, at F er højrekontinuert med venstregrænseværdier. Hvornår er F kontinuert?

5) Lad $(E, \mathcal{E}, \mu)$ betegne et målrum. Vis at

$$\mu \text{ er } \sigma\text{-endeligt} \Leftrightarrow \exists f \in L^1(\mu) \text{ så at } f(e) > 0 \text{ for alle } e \in E.$$

Vink til $\Rightarrow$. Betragt funktioner af typen $\sum_n a_n \cdot \mathbf{1}_{A_n}$, hvor A_n 'erne alle har endeligt μ -mål og udgør en overdækning af E , og a_n 'erne er positive tal.

Udnyt dette samt opgave opgave 3) til at slutte, at hvis μ er σ -endeligt, så findes der et sandsynlighedsmål ν på $(E, \mathcal{E})$, så at μ og ν er ækvivalente.

6) Studer størrelsesforholdet mellem de forskellige L^p -rum for målrummene $(\mathbf{N}, 2^{\mathbf{N}}, \text{tællermålet})$ og $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \lambda_1)$. (svar: voksende i p , ingen inklusioner).

Afleveringsopgave: Lad $a, b \in \mathbf{R}$ være givet og antag $a > 0$. Bestem billedmålet $\lambda_1 \circ \varphi^{-1}$, hvor $\varphi: x \mapsto ax + b$, og udled herudfra ved hjælp af Sætning 3 ligheden

$$a \int g(ax + b) \lambda_1(dx) = \int g(x) \lambda_1(dx) \quad \text{for } g \in L(\lambda_1).$$

Betragt nu afbildningen $\psi: x \mapsto x^2$. Vis at $\lambda_1 \circ \psi^{-1}$ er absolut kontinuert m.h.t. λ_1 med tæthed $x \mapsto 1/\sqrt{x} \cdot \mathbf{1}_{(0, \infty)}$ og udled herudfra, at

$$\int g(x^2) \lambda_1(dx) = \int_0^\infty g(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \lambda_1(dx) \quad \text{for } g \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{B}(\mathbf{R}))_+.$$

Øvrige meddelelser: I forbindelse med introduktionen af middelværdibegrebet på et sandsynlighedsfelt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ indførtes fig. notation:

En stokastisk variabel X defineret på $(\Omega, \mathcal{F})$ siges at have middelværdi hvis $X \in L(P)$, og den siges at have endelig middelværdi hvis $X \in L^1(P)$. Tallet

$$\int X dP$$

kaldes i givet fald middelværdien af X og betegnes i noterne $E[X]$, hvorimod Hoffmann bruger betegnelsen EX .

I forbindelse med transformation af en stokastisk variabel X med en funktion φ , der kun er defineret og målelig på en Borel delmængde $D(\varphi) \subseteq \mathbf{R}$, som for eks. $x \mapsto \log x$ eller $x \mapsto x^\alpha$ for α vilkårlig reel, betegner $\varphi(X)$ variabelen, hvis værdier er fastlagt ved

$$\varphi(X(\omega)) \quad \text{hvis } X(\omega) \in D(\varphi) \quad \text{og} \quad 0 \quad \text{hvis } X(\omega) \notin D(\varphi).$$

Da vi kun skal betragte tilfælde, hvor $P(X \in D(\varphi)) = 1$, kan 0 erstattes af enhver anden værdi, idet $\varphi(X)$'s fordeling er uafhængig af den valgte værdi. Lignende notation benyttes i forbindelse med stokastiske vektorer.

Trykfejl. Linie 2 og 3 fra oven side 35 erstattes med: D.v.s. $L(\mu)$ består af funktioner, hvor enten den 'positive' eller den 'negative' del ikke er 'for stor', og $L^1(\mu)$ af funktioner, hvor begge dele ikke er 'for store'.

Svend Erik Graversen

SS2, TD nr. 9

1)

Exc. 4.23

$X \in L^1(P)$

Påstand: $X \geq 0$ n.o. : $E[1/X] \geq 1/E[X]$

Beris:

$x \mapsto 1/x$ er konveks på $\mathbb{R}_+$ ($1/0 := \infty$)

Af Jensens ulighed følger:

$$1/E[X] = 1/\int X dP \leq \int 1/X dP = E[1/X]$$

□

Påstand: $E[e^X] \geq e^{E[X]}$

Beris:

Af Jensens ulighed følger (da $x \mapsto e^x$ er konveks på $\mathbb{R}$), at

$$e^{E[X]} = e^{\int X dP} \leq \int e^X dP = E[e^X]$$

□

Påstand: $X \geq 0$ n.o. : $E[\log X] \leq \log E[X]$

Beris:

$x \mapsto -\log x$ er konveks på $\mathbb{R}_+$ ($-\log 0 := \infty$)

Af Jensens ulighed følger:

$$-\log E[X] = -\log \int X dP \leq \int -\log X dP = E[-\log X] = -E[\log X]$$

⇓

$$E[\log X] \leq \log E[X]$$

□

Påstand: $X \geq 0$ n.o. : $E[X \log X] \geq E[X] \cdot \log E[X]$

Bewis:

$x \mapsto x \log x$ er konvex på $\mathbb{R}_+$ ($D^2[x \log x] = 1/x \geq 0$ $x \geq 0$)

Af Jensen's ulighed følger, at

$$E[X] \cdot \log E[X] = \int X dP \cdot \log \int X dP \leq \int X \log X dP = E[X \log X] \quad \square$$

Exc. 4.1

(X_n) s.v., $X_n \sim E[\lambda_n]$

Påstand: $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} X_n$ summabel n.o.

Bewis:

$$E[X_n] = \int X_n dP = 1/\lambda_n$$

Da $X_n \geq 0$ gælder at $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ er summabel n.o. ifølge

Beppo-Levi sætning, da $\sum \int X_n dP = \sum 1/\lambda_n < \infty$ □

2)

$f \in \overline{M}(B(\mathbb{R}))_+$

$|\cdot|: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ betegner den euklidiske metrik på $\mathbb{R}^2$,

Påstand:
$$\int_{\mathbb{R}^2} f(|x|) \lambda_2(dx) = 2\pi \int_0^\infty r \cdot f(r) \lambda_1(dr)$$

Beris:

$\varphi := |\cdot|$

$$\lambda_{2\varphi}((-\infty, r]) = \lambda_2(\varphi^{-1}((-\infty, r])) = \begin{cases} \lambda_2(\overline{B}(0, r)) & , r \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Sammenligningen i $\mathbb{R}$ mellem Riemann og Lebesgue integralerne på s. 42 kan uden videre generaliseres til $\mathbb{R}^2$, heraf ser vi let, at $\lambda_2(\overline{B}(0, r)) = \int 1_{\overline{B}(0, r)} d\lambda_2 = \pi r^2$

Definer $\nu: B(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ $\nu(B) := \int 2\pi r 1_{[0, \infty)} d\lambda_1$,
 jvf. s. 39 er ν et mål på $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ og vi ser, at
 $\forall x \in \mathbb{R}: \lambda_{2\varphi}((-\infty, x]) = \nu((-\infty, x])$ af korollaret s. 24
 følger, at $\lambda_{2\varphi} \equiv \nu$, dvs.

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^\infty r \cdot f(r) \lambda_1(dr) &= \int 2\pi r 1_{[0, \infty)} f d\lambda_1 \stackrel{\text{setn. 4 s. 41}}{=} \int f d\nu \\ &= \int f d\lambda_{2\varphi} \stackrel{\text{setn. 3 s. 38}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} f(|x|) \lambda_2(dx) \end{aligned}$$

□

3)

Øvelse 15 s. 41

$(E, \mathcal{E}, \mu) \subsetneq (E, \mathcal{E}, \nu)$ a.k. mht. μ med tæthed $g \in \bar{F}(E)$.

Påstand: $g > 0$ ν -n.o.

$$\{g=0\} \in \mathcal{E} \quad \nu(\{g=0\}) = \int_{\{g=0\}} g \, d\mu = 0$$

□

Påstand: $g > 0$ μ -n.o. $\Rightarrow \mu \approx \nu$

Beris:

Vi skal vise, at $\mathcal{N}_\mu = \mathcal{N}_\nu$

$$N \in \mathcal{N}_\mu : \nu(N) = \int_N g \, d\mu = 0 \quad (\text{da } g \cdot 1_N = 0 \text{ n.o.})$$

Dus. $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{N}_\nu$

$N \in \mathcal{N}_\nu : 0 = \nu(N) = \int_N g \, d\mu = \int 1_N g \, d\mu$, da $1_N g \geq 0$ μ -n.o.
 må $g \cdot 1_N = 0$ μ -n.o., men $g > 0$ μ -n.o. $\Rightarrow 1_N = 0$ μ -n.o.

Dus. $N \in \mathcal{N}_\mu$ og dermed, at $\mathcal{N}_\nu \subseteq \mathcal{N}_\mu$

□

4)

μ mål på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ $f \in L^1(\mu)$

$F: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}_+$: $F(x) = \int_0^x f(x) \mu(dx)$

Da $f \in L^1(\mu)$ er F veldefineret.

Påstand: F er højrekontinueret

Beweis:

Lad $x \in \mathbb{R}_+$ $(x_n) \subseteq \mathbb{R}_+$ $x_n \downarrow x$ være vilkårlig

$f_n := f \cdot 1_{[0, x_n]}$ $f_n \rightarrow f \cdot 1_{[0, x]}$, $n \rightarrow \infty$

Da $|f_n| \leq |f|$ og $f \in L^1(\mu)$ følger af Lebesgues sætning, om domineret konvergens, at

$$F(x_n) = \int_0^{x_n} f(x) \mu(dx) = \int f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f \cdot 1_{[0, x]} d\mu = \int_0^x f(x) \mu(dx) = F(x)$$

□

Påstand: $\forall x \in \mathbb{R}_+$: $f(x-)$ eksisterer

Beweis:

$x=0$ trivielt

$x>0$, lad $(x_n) \subseteq \mathbb{R}_+$ $x_n \uparrow x$ være vilkårlig

$f_n := f \cdot 1_{[0, x_n]}$ $f_n \rightarrow f \cdot 1_{[0, x]}$, $n \rightarrow \infty$

Da $|f_n| \leq |f|$ og $f \in L^1(\mu)$ følger af Lebesgues sætning, om domineret konvergens, at

$$F(x_n) = \int_0^{x_n} f(x) \mu(dx) = \int f_n d\mu \rightarrow \int f \cdot 1_{[0, x]} d\mu, \text{ da } (x_n) \text{ var vilkårlig ser vi, at } F(x-) = \int f \cdot 1_{[0, x)} d\mu$$

□

Vi ser, at F er kont. hviss $\int f(x) \mu(dx) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$
dvs. hviss $f(x) \cdot \mu(\{x\}) = 0, x \in \mathbb{R}_+^{(x)}$

5)

$(E, \mathcal{E}, \mu) \text{ (m)}$

Påstand: μ σ -endeligt $\Leftrightarrow \exists f \in L^1(\mu) \forall e \in E: f(e) > 0$

Beweis:

$\Rightarrow$:

μ σ -endeligt, dvs. $\exists (A_n) \subseteq \mathcal{E}: \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = E$ og $\mu(A_n) < \infty$

Vi kan uden tab af generalitet antage, at $A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$ (vil evt. at se på disjunktionen af (A_n)) og at $\mu(A_n) > 0$

Definer $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ $e \in E: f(e) = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n}(e) \cdot \frac{1}{2^n \mu(A_n)}$

Det er klart, at $f(e) > 0$, $e \in E$ og da

$$\sum_{i=1}^n 1_{A_i}(e) \cdot \frac{1}{2^n \mu(A_i)} \uparrow f(e) \text{ og } \int \sum_{i=1}^n 1_{A_i} \cdot \frac{1}{2^n \mu(A_i)} d\mu = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^n}$$

fås af sætn. om monoton konvergens, at

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty$$

$\Leftarrow$:

$$\forall n \geq 1: \mu(f > 1/n) = \int 1_{\{f > 1/n\}} d\mu \leq \int n f d\mu \leq n \cdot \int f d\mu < \infty$$

Da $f > 0$ gælder, at $\{f > 1/n\} \uparrow \{f > 0\} = E$, dvs.

μ er σ -endeligt

□

Påstand: μ σ -endeligt $\Rightarrow \nu \in \mathcal{M}(E), \nu(E)=1 : \nu \approx \mu$

Beris:

Definer f som i ovenstående beris (beriset for $\Rightarrow$),
da $\int f d\mu = 1$ og $f \in \bar{M}(E)_+$ definerer $\nu: E \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $\nu(A) = \int_A f d\mu$, et ss-mål på $(E, \mathcal{E})$ og da $f \geq 0$
(og dermed $f \geq 0$ n.o.) følger af opg. 3 at $\nu \approx \mu$ $\square$

6)

Lad $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ være som i opgave 1. Udf

$f \in M(2^{\mathbb{N}})$ er element i $L^p(\mu)$ hvis $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^p < \infty$ ($p > 0$)

Lad $0 < p_1 < p_2$ være givet

$\exists \alpha > 1$: $p_1/p_2 \cdot \alpha \leq 1$

Definer $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(n) = (1/n)^{\alpha/p_2}$, vi ser, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^{p_2} = \sum_{n=1}^{\infty} |1/n^{\alpha}| < \infty, \text{ men}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^{p_1} = \sum_{n=1}^{\infty} |1/n^{(p_1/p_2) \cdot \alpha}| = \infty, \text{ dvs. } L^{p_2} \not\subset L^{p_1}$$

Lad $f \in L^{p_1}$ være givet, dvs. $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^{p_1} < \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^{p_2} < \infty, \text{ hvis } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^{p_2} = 0$$

Vi har, at $\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1 \forall n \geq N: \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^{p_1} < \epsilon$

Lad $0 < \epsilon \leq 1$ være givet $\exists N \geq 1 \forall n \geq N: \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^{p_1} < \epsilon < 1$

Da $p \mapsto x^p$ er aftagende på $[0, 1]$ ser vi, at $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^{p_2} < \epsilon$

Altså $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^{p_2} < \infty$ og dermed ser vi, at $L^{p_1} \subset L^{p_2}$

Betragt $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$

Lad $0 < p_1 < p_2$ være givet

Valg $\alpha > 1$: $\alpha \cdot p_1/p_2 \leq 1$

Definer $f := \sum_{n=1}^{\infty} 1_{(n-1, n]} (1/n)^{\alpha/p_2}$

$$\int |f|^{p_2} d\lambda_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1, n]} |f|^{p_2} d\lambda_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (1/n)^{\alpha} < \infty, \text{ men}$$

$$\int |f|^{p_1} d\lambda_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (1/n)^{\alpha p_1/p_2} = \infty, \text{ dvs. } f \in L^{p_2} \setminus L^{p_1}$$

Dvs. $L^{p_2} \not\subseteq L^{p_1}$, men gælder der så, at $L^{p_1} \subseteq L^{p_2}$

Sæt $p_1=1$, $p_2=2$, da er det klart, at

$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} 1_{(0,1]}$ er i L^1 men ikke i L^2

SS2, afløringsopgave nr. 9, Gunna Helleund

$$a, b \in \mathbb{R}, a > 0$$

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}: \varphi(x) = ax + b$$

Lad $r, s \in \mathbb{R}$ $r < s$:

$$\lambda_{1,\varphi}(\mathbb{J}r,s] = \lambda_1 \circ \varphi^{-1}(\mathbb{J}r,s] = \lambda_1(\mathbb{J}\frac{r-b}{a}, \frac{s-b}{a}] = \frac{1}{a} \lambda_1(\mathbb{J}r,s]$$

Juf. korollar 2 s. 24 er $\lambda_{1,\varphi} = \frac{1}{a} \cdot \lambda_1$, hvilket igen betyder, at $\lambda_{1,\varphi}$ er a.k. mht. λ_1 med tæthed $\frac{1}{a}$ (*)

$$\text{Påstand: } g \in L(\lambda_1): a \int g(ax+b) \lambda_1(dx) = \int g(x) \lambda_{1,\varphi}(dx)$$

Beweis:

$$\text{Juf. sætning 3 s. 38-39 gælder } \int g d\lambda_{1,\varphi} = \int g(ax+b) \lambda_1(dx)$$

$$\text{men ifølge sætn. 4 s. 41 + (*): } \int g d\lambda_{1,\varphi} = \frac{1}{a} \int g d\lambda_1$$

(det er klart at $g \in L(\lambda_{1,\varphi})$), dvs.

$$a \int g(ax+b) \lambda_1(dx) = \int g(x) \lambda_{1,\varphi}(dx)$$

□

$$\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}: \psi(x) = x^2$$

Lad $r, s \in \mathbb{R}$ $r < s$:

$$\lambda_{1,\psi}(\mathbb{J}r,s] = \lambda_1 \circ \psi^{-1}(\mathbb{J}r,s] = \begin{cases} \lambda_1(\emptyset), & r,s < 0 \\ \lambda_1(\mathbb{J}-\sqrt{s}, \sqrt{s}] & r < 0, s \geq 0 \\ \lambda_1(\mathbb{J}-\sqrt{s}, -\sqrt{r}] \cup \mathbb{J}\sqrt{r}, \sqrt{s}] & r,s \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Def. } \nu: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}): \nu(B) = \int_B \frac{1}{\sqrt{x}} 1_{[0,\infty)} \lambda_1(dx)$$

Vi ser, at

$$\nu(\mathbb{J}r,s] = \begin{cases} 0 = \lambda_1(\emptyset), & r,s < 0 \\ \int_0^s \frac{1}{\sqrt{x}} \lambda_1(dx) = 2\sqrt{s} = \lambda_1(\mathbb{J}-\sqrt{s}, \sqrt{s}] ; & r < 0, s \geq 0 \\ \int_r^s \frac{1}{\sqrt{x}} \lambda_1(dx) = 2(\sqrt{s} - \sqrt{r}) = \lambda_1(\mathbb{J}-\sqrt{s}, -\sqrt{r}] \cup \mathbb{J}\sqrt{r}, \sqrt{s}] , & r,s \geq 0 \end{cases}$$

Af korollært s. 24 og def. s. 40 ses at $\lambda_{1\psi}$ er a.k. mht λ_1 med tæthed $x \mapsto 1/\sqrt{x}$.

Lad $g \in \bar{M}(B(\mathbb{R}))_+$

Af overvejelserne s. 39 + s. 41 (sætn. 3+4) følger, at $g(x^2) \in L(\lambda_1) \iff g(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \in L(\lambda_1)$ og at

$$\int g(x^2) \lambda_1(dx) = \int g \circ \psi \lambda_1 = \int g \lambda_{1\psi} = \int g(x) \frac{1}{\sqrt{x}} \lambda_1(dx)$$

Altså har vi vist, at

$$\text{Påstand: } g \in \bar{M}(B(\mathbb{R}))_+ : \int g(x^2) \lambda_1(dx) = \int g(x) \frac{1}{\sqrt{x}} \lambda_1(dx)$$

Sandsynlighedsteori 2

Uge 44.

Forelæsninger: Vi fortsætter med emnerne *Uligheder og Produktmål, eksistens og egenskaber* d.v.s. sektionerne 3.9 – 3.12 samt 3.20, 3.21 og 3.30.

Øvelser: 1) Lad $(E, \mathcal{E}, \mu)$ betegne et målrum og lad $f \in L(\mu)$ være givet. Vis at hvis $\int f d\mu \in \mathbb{R}$ så er $f \in L^1(\mu)$ og $f = f \cdot \mathbf{1}_{\{|f| < \infty\}}$. Vis endvidere at $f \cdot \mathbf{1}_A \in L(\mu)$ for alle $A \in \mathcal{E}$.

2) Lad ν betegne et mål på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, så at $\nu(I) < \infty$ for ethvert endeligt interval I , og lad $g \in \overline{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))_+$ være givet. Udnyt Korollaret til Proposition 2 til at vise, at ν er absolut kontinuert m.h.t. λ_1 med tæthed g hvis og kun hvis

$$\nu([a, b]) = \int_a^b g d\lambda_1 \quad \text{for alle } a < b.$$

3) Vis at et mål ν på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, har højst én kontinuert tæthed m.h.t. λ_1 .

4) Betragt målrummet $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$. Lad f betegne funktionen $\mathbf{1}_Q$, hvor Q er mængden af rationale tal. Vis at $f \in L^1(\lambda_1)$ og beregn dets integral over hele $\mathbb{R}$. Vis at f ikke er Riemann integrabel over noget interval.

5) Lad $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ betegne en kontinuert funktion. Vis at hvis $g \in L^1(\lambda_1)$, så eksisterer det uegentlige Riemann integral $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$ og er lig $\int g d\lambda_1$.

6) Lad $(E, \mathcal{E}, \mu)$ betegne et målrum og lad $g \in L(\mu)$ være μ -integrabel d.v.s. $\int g d\mu \in \mathbb{R}$. Vis at

$$\lim_{\mu(A) \downarrow 0} \int_A g d\mu = 0, \text{ d.v.s. } \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \left| \int_A g d\mu \right| < \epsilon \text{ hvis } \mu(A) \leq \delta.$$

Vink. Reducer til tilfældet $g \geq 0$ og approksimer med $g_n = g \wedge n$.

Afleveringsopgave: Lad $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ betegne en kontinuert funktion. Definér for $n \geq 1$

$$f_n(x) := n(f(x + 1/n) - f(x)) \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Vis at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) d\lambda_1(dx) = f(b) - f(a)$$

for alle reelle tal $a < b$.

b) Antag at f er overalt differentiable, samt at $t \mapsto |f'(t)|$ er begrænset på ethvert begrænset interval. ^{Vis nu at f er differentiable.}

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) d\lambda_1(dt) \quad \text{for alle reelle tal } a < b.$$

Vink. Udnyt del a) samt Middelværdissætningen og Lebesgue's Sætning.

Øvrige meddelelser: I forbindelse med integraler på et målrum $(E, \mathcal{E}, \mu)$ benyttes fig. sprogbug. Vendingen "integralet af f m.h.t. μ eksisterer" betyder at $f \in L(\mu)$, hvorimod der med udsagnet " f er μ -integrabel" menes, at $f \in L(\mu)$ med $\int f d\mu \in \mathbb{R}$.

På grund af den nære sammenhæng med Riemann integralet skrives ofte $\int f(x) dx$ i stedet for $\int f d\lambda_1$ eller $\int f(x) \lambda_1(dx)$. Vi skal senere se en anden begrundelse for denne skrivemåde. Ligeses skrives som nævnt i noterne

$$\int_a^b f d\lambda_1 \quad \text{i stedet for} \quad \int_{[a,b]} f d\lambda_1.$$

Bemærk at da punkter har Lebesgue mål 0, er det ikke afgørende, om vi integrerer over $[a, b]$ eller $[a, b[$ i stedet for $[a, b]$. Men for mål med punktmasser er det vigtigt at vide, at notationen relaterer til integralet over $[a, b]$.

Trykfejl. Beviserne for Sætning 2 punkt 3) og 4) på side 37 er rodet lidt sammen, idet sætningen: "Homogeniteten viser, at de to udsagn er ækvivalente" hører hjemme under punkt 4) og ikke, som skrevet, under punkt 3).

SS2, TØ nr. 8

1)

$$(E, \mathcal{E}, \mu) \quad f \in L(\mu)$$

Påstand: $\int f d\mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \tilde{f} \in L^1(\mu) \wedge f = \tilde{f} \mu\text{-n.o.}$, hvor $\tilde{f} = f \cdot 1_{\{|f| < \infty\}}$

Beris:

$$\int f d\mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \int f^+ d\mu, \int f^- d\mu < \infty \stackrel{(+)}{\Rightarrow} \{f^+ = \infty\}, \{f^- = \infty\} \in \mathcal{N}_\mu$$

$$\Rightarrow \{f = \infty\} \in \mathcal{N}_\mu \Rightarrow f = \tilde{f} \mu\text{-n.o.}$$

$$\Rightarrow \tilde{f} \in L^1(\mu)$$

□

Påstand: $\forall A \in \mathcal{E}: f \cdot 1_A \in L(\mu)$

Beris:

$$(f \cdot 1_A)^+ = f^+ \cdot 1_A, (f \cdot 1_A)^- = f^- \cdot 1_A$$

$$\text{og } f^+ \cdot 1_A \leq f^+, f^- \cdot 1_A \leq f^- \Rightarrow \int (f \cdot 1_A)^+ d\mu, \int (f \cdot 1_A)^- d\mu < \infty$$

$$\Rightarrow f \cdot 1_A \in L(\mu)$$

□

2)

ν mål på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ $\forall I$, endeligt interval: $\nu(I) < \infty$ (*)

$g \in \overline{L^1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))_+$

Påstand: ν a.k. mht. λ_1 med tæthed g

$\Downarrow$

$$\nu([a, b]) = \int_a^b g d\lambda_1 \quad \forall a < b$$

Beris:

$\Downarrow$ følger af def. på a.k.

$\Uparrow$:

Idet $\mathcal{I}[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + 1/n, b - 1/n]$ er det klart at

$\mathcal{G} := \{[a, b] \mid a < b\}$ frembringer $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, idet $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ og

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\{\mathcal{I}[a, b] \mid a < b\}$$

g er σ -stabil, og hvis vi def. $\tilde{\nu} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\tilde{\nu}(A) = \int_A g d\lambda_1 \quad (\text{dvs. } \tilde{\nu} \text{ er a.k. mht } \lambda_1 \text{ og har tæthed } g) \text{ ser}$$

vi, at $\tilde{\nu}(F) = \nu(F)$, $F \in \mathcal{G}$, og dermed at $\tilde{\nu} = \nu$, idet

$$[-n, n] \uparrow \mathbb{R} \text{ og } \nu([-n, n]) < \infty \text{ jvf. (*)}$$

□

3)

ν mål på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Påstand: ν har højst en kontinuert tæthed mht. λ_1

Bevis:

Antag at ν har 2 kont. tætheder mht. λ_1 , g_1, g_2

Da λ_1 er σ -endeligt følger af lemma 1 s. 40, at

$g_1 = g_2$ n.o $\implies g_1 = g_2$ jvf. opg. 2 US4

□

4)

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ $f := 1_{\mathbb{Q}}$

Vi ser, at $f \in M(\mathbb{R})_+$ og at $\int f d\lambda_1 := \lambda_1(\mathbb{Q})$:

Idet $\mathbb{Q}$ er tællig $\exists (x_n) \subseteq \mathbb{R} : \mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$ $x_i \neq x_j$ $i \neq j$,

idet $\lambda(\{x_n\}) = 0$, $n \geq 1$ følger $\int f d\lambda_1 = \sum \lambda(\{x_n\}) = 0$

pr σ -additivitet af λ_1 .

Ligemeget hvilket interval vi danner Riemann-under/oversum

for er det klart (idet $\forall a < b \exists q \in \mathbb{Q}, r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : a < q < r < b$)

at enhver undersum er 0, mens enhver oversum er ≥ 1 ,

dvs. f er ikke Riemann integrabel over noget interval

5)

$$g \in C^0(\mathbb{R})$$

Påstand: $g \in L^1(\lambda) \Rightarrow \text{UR} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$ eksisterer og er lig $\int g d\lambda$.

Beweis:

$$g \in L^1(\lambda) \Rightarrow \forall n \geq 1 \quad g 1_{[-n, n]} \in L^1(\lambda) \quad |g 1_{[-n, n]}| \leq |g| \in L^1$$

Juf. Lebesgues sætn. om domineret konvergens mangler vi at vise, at $\int_{-\infty}^{\infty} g d\lambda = \mathbb{R} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$, men idet culture fkt. som er kont. på $\mathbb{R}$ er kont. på $[-n, n]$, $n \geq 1$ og dermed Riemann-integrabel følger det ensbede af sætningen på side 42.

□

6)

$$(E, \mathcal{E}, \mu) \quad g \in L^1(\mu) \text{ og } \int g d\mu \in \mathbb{R} \text{ (dvs. } g \in L^1(\mu))$$

Påstand: $\lim_{\mu(A) \downarrow 0} \int_A g d\mu = 0 \quad (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \mu(A) < \delta \Rightarrow |\int_A g d\mu| < \varepsilon)$

Beweis:

Idet $|\int g d\mu| = |\int g^+ d\mu - \int g^- d\mu| \leq \int g^+ d\mu + \int g^- d\mu$ er det nok at vise resultatet for positive fkt.

Lad $\varepsilon > 0$ være givet

$g_1, n \leq g$, $n \geq 1$ og $g_1, n \uparrow g$ af Lebesgues sætn. om domineret konvergens følger (idet $g \in L^1(\mu)$) at $\exists N \geq 1 \forall n \geq N$:

$\int (g - g_1, n) d\mu < \varepsilon/2$, sæt $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$, da følger

$$|\int g d\mu| = \int g d\mu = \int (g - g_1, n) d\mu + \int g_1, n d\mu \leq \varepsilon/2 + \frac{\varepsilon}{2n} \cdot n = \varepsilon$$

□

SS2, afledningsopgave nr. 8, Gunna Hellmünd

$$f \in C^0(\mathbb{R}) \quad (\Rightarrow f 1_{[a,b]} \in L^1(\lambda) \quad \forall a < b)$$

$$\forall n \geq 1: f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}: f_n(x) := n(f(x+1/n) - f(x))$$

$$\text{Påstand: } \forall a < b: \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \lambda(dx) = f(b) - f(a)$$

Beris:

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1: \int_a^b f_n d\lambda &= n \cdot \left(\int_a^b f(x+1/n) \lambda(dx) - \int_a^b f(x) \lambda(dx) \right) \\ &\stackrel{\text{s. 92}}{=} n \cdot \left(\int_{a+1/n}^{b+1/n} f(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right) = n \cdot \left(\int_{a+1/n}^{b+1/n} f(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right) \\ &= n \cdot \left(\int_b^{b+1/n} f(x) dx - \int_a^{a+1/n} f(x) dx \right) \stackrel{\text{s. 14: Theorem (Middelværdisætn. for integraler)}}{=} n \cdot (f(b_n)(1/n) - f(a_n)(1/n)) \\ &= f(b_n) - f(a_n), \text{ hvor } b \leq b_n \leq b+1/n, a \leq a_n \leq a+1/n \quad (*) \end{aligned}$$

Idet $b_n \rightarrow b$, $a_n \rightarrow a$, $n \rightarrow \infty$ og idet f er kontinuert følger at $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \lambda(dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(b_n) - f(a_n)) = f(b) - f(a)$ $\square$

Påstand: Antag at f er diff. på $\mathbb{R}$ og at $\forall a < b \exists M \geq 0 \forall x \in [a,b]: |f'(x)| \leq M$

Da gælder

$$\forall a < b: f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) \lambda(dt)$$

Beris:

$$a < b \text{ givet } \forall t \in [a,b]: f_n(t) \rightarrow f'(t) \quad (f \text{ diff. på } \mathbb{R})$$

Da f er kont. $\exists K \geq 0 \forall t \in [a,b]: |f(t)| \leq K \xrightarrow{(*)} (f_n)$ domineres af

$$2K 1_{[a,b]} \in L^1(\lambda) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \lambda(dx) = \int_a^b f'(t) \lambda(dt) \stackrel{(*)}{=} f(b) - f(a)$$

$\square$

Sandsynlighedsteori 2

Uge 43.

Forelæsninger: Vi fortsætter med afsnittet *Integralet, konstruktion og egenskaber* og begynder, hvis tiden tillader, på afsnittene *Ulighed* og *Produktmål, eksistens og egenskaber* d.v.s. sektionerne 3.9 – 3.12 samt 3.20, 3.21 og 3.30.

Øvelser: 1) Betragt målrummet $(\mathbf{N}, 2^{\mathbf{N}}, \mu)$, hvor μ er *tællermålet*, d.v.s.

$$\mu(A) := \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_A(j) \quad A \subseteq \mathbf{N}.$$

$\mu(A)$ er altså antallet af elementer i mængden A , hvilket forklarer navnet.

- a) Definer $A_n := \{n, n+1, \dots\}$ $n \geq 1$. Vis at $A_n \downarrow \emptyset$, men at $\mu(A_n) \equiv \infty$.
b) Vis at enhver reel funktion er målelig, samt at $\emptyset$ er den eneste μ -nulmængde. Slut heraf at i dette målrum er punktvis og μ -n.o. konvergens det samme, d.v.s. for reelle funktioner $(f_k)_{k \geq 1}$ og f gælder

$$f_k \rightarrow f \text{ } \mu\text{-n.o.} \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(n) = f(n) \text{ for alle } n \geq 1.$$

c) Vis at

$$\int f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

hvis $f \geq 0$ eller mere generelt $f \in L(\mu)$ og deducer herudfra, at

$$L^1(\mu) = \{f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty\}.$$

d) Reformuler f.eks. Lebesgue's Sætning som et udsagn om summer af reelle tal, idet en reel talfølge $(a_n)_{n \geq 1}$ opfattes som en funktion $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ givet ved $f(n) = a_n$ for alle $n \geq 1$.

2) Betragt situationen som beskrevet i Opgave 4 på ugesedlen til Uge 41-42, d.v.s. lad $(X_n)_{n \geq 1}$ betegne en følge af uafhængige stokastiske variable, som alle er fordelt $N(0, 1)$. Vis at

$$\frac{x}{1+x^2} \cdot e^{-x^2/2} \leq \int_x^{\infty} e^{-t^2/2} \, dt \quad \text{for } x > 0.$$

Udnyt f.eks. at $d/dx(x^{-1} \cdot e^{-x^2/2}) = -(1+x^{-2}) \cdot e^{-x^2/2}$.

Deducer herudfra under brug af resultatet i Opgave 4 og overvejelserne i 2.17.4 side 120, at $L = 1$ P -n.o.

3) Tillæg til afleveringsopgaven. Gennemfør de samme overvejelser for funktionsfølgen

$$f_n(x) = (1 - x/n)^n \cdot e^{x^2/2} \cdot \mathbf{1}_{[0, n]}(x).$$

Vink. Vis og udnyt at $x \mapsto e^{-x^2/2} \cdot \mathbf{1}_{[0, \infty)}(x) \in L^1(\lambda_1)$.

4) Diverse hængepartier.

Afleveringsopgave: Betragt målrummet $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \lambda_1)$, hvor λ_1 er det endimensionale Lebesgue mål. Vis at $(f_n)_{n \geq 1}$ konvergerer punktvis og angiv $\lim_n f_n(x)$ for alle x samt beregn $\lim_n \int f_n \, d\lambda_1$ i følgende to situationer

- a) $f_n(x) = n \cdot \mathbf{1}_{[0, 1/n]}(x)$;
b) $f_n(x) = f(x^n) \cdot \mathbf{1}_{[0, 1]}(x)$, hvor f er en given reel kontinuert funktion.

Øvrige meddelelser: Ingen.

Svend Erik Graversen

1)

$$(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu) \quad \mu(A) := \sum_{j=1}^{\infty} 1_A(j), \quad A \subseteq \mathbb{N} \quad (\mu(A) = \#A)$$

(Jvf. opg 3 US 4 er μ et mål på $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$)

a)

$$A_n := \{n, n+1, \dots\} = \bigcup_{i=n}^{\infty} \{i\}, \quad n \geq 1$$

$$\mu(A_n) = \infty, \quad A_n \downarrow \emptyset$$

$$\left(\mu(A_n) = \sum_{j=1}^{\infty} 1_{A_n}(j) = \sum_{j=n}^{\infty} 1 = \infty \text{ og } \forall x \in \mathbb{N} \exists n \geq 1 : x \notin A_n \right. \\ \left. \text{ samt } A_{n+1} \subseteq A_n \Rightarrow A_n \downarrow \emptyset \right)$$

b)

Påstand: f er $(2^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ måltig $\forall f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Beweis:

Lad $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ være vilk., : $f^{-1}(A) \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow f^{-1}(A) \in 2^{\mathbb{N}}$

□

Påstand: $\mathcal{N}_{\mu} = \{\emptyset\}$ (+)

Beweis:

Antag $N \in \mathcal{N}_{\mu}$, men $N \neq \emptyset$, dvs. $\exists x \in \mathbb{N} : x \in N \Rightarrow \mu(N) = \#N \geq 1$

Påstand: $(f_k), f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : f_n \xrightarrow{\text{n.o.}} f \iff f_n \xrightarrow{\text{p.o.}} f$

Beweis:

 $\Rightarrow$ Da $f_n \xrightarrow{\text{n.o.}} f$ gælder $\forall x \in \mathbb{N} \setminus \emptyset = \mathbb{N} : f_n(x) \xrightarrow{\text{n.o.}} f(x)$ jf. (+)
 $\Leftarrow$ trivielt

□

c)

Påstand: $f \in L(\mu) : \int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

Beweis:

$f \geq 0$:

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{1, \dots, n\}} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_{\{i\}} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(i) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

Dvs. $f \in L(\mu)$:

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f^+(n) - \sum_{n=1}^{\infty} f^-(n) \quad (*)$$

Hvis $\int f^+ d\mu = \infty$, $\int f^- d\mu < \infty$ (dvs. $\int f d\mu = \infty$):

$$\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f^+(n) - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f^-(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

jvf. regnearbejder for 'konvergente' følger.

Tilsvarende for $\int f d\mu = -\infty$

Hvis $\int f d\mu \in \mathbb{R}$ følger resultatet (jf. reglerne for konvergente rækker) $\square$

$$L^1(\mu) = \{f \in M(\mathbb{Z}^N) \mid |f| \in L(\mu)\} = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty\}$$

d)

$(a_n) \subseteq \mathbb{R} : f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(n) = a_n$

Hvis $a_{n,m} \in \mathbb{R} : n \geq 1, \lim_{m \rightarrow \infty} a_{n,m} = a_n$

og $\exists (b_n) \subseteq \mathbb{R} : \sum |b_n| < \infty$ og $|a_{n,m}| \leq |b_n| \quad n \geq 1$

da gælder (Lebesgues sætn. om domineret konvergens)

$$\sum a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum a_{n,m}$$

2)

Pöstand: $\forall x > 0: \frac{x}{1+x^2} e^{-x^2/2} \leq \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt$

Bewis:

$$\frac{d}{dt} (t^{-1} e^{-t^2/2}) = -t^{-2} e^{-t^2/2} - e^{-t^2/2} = -(1+t^{-2}) e^{-t^2/2} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt &= \int_x^\infty \frac{-(1+t^{-2})}{-(1+t^{-2})} e^{-t^2/2} dt \geq \int_x^\infty \frac{-(1+t^{-2})}{-(1+x^{-2})} e^{-t^2/2} dt \\ &= -\frac{1}{(1+x^{-2})} \int_x^\infty -(1+t^{-2}) e^{-t^2/2} dt \stackrel{(*)}{=} -\frac{1}{1+x^{-2}} x^{-1} e^{-x^2/2} = \frac{x}{1+x^2} e^{-x^2/2} \end{aligned}$$

□

$(X_n) \perp \text{s.v.} \quad X_n \sim N(0,1), n \geq 1$

$L = \limsup_n (X_n / \sqrt{2 \log n})$

Pöstand: $P(L=1)=1$

Bewis:

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^\infty P(X_n / \sqrt{2 \log n} > \alpha) &= \sum_{n=k}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha \sqrt{2 \log n}}^\infty e^{-y^2/2} dy \\ &\geq \sum_{n=k}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\alpha \sqrt{2 \log n}}{1 + (\alpha \sqrt{2 \log n})^2} e^{-(\alpha \sqrt{2 \log n})^2/2} = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=k}^\infty \frac{\sqrt{\log n}}{1 + 2\alpha^2 \log n} \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha^2} \end{aligned}$$

$\exists K \geq 1 \forall k \geq K: \frac{\sqrt{\log n}}{1 + 2\alpha^2 \log n} \geq \frac{1}{(\log n)^{\alpha^2}}, \alpha^2 > 1/2$

(idit $(\log n)^{\alpha^2 + 1/2} - 2\alpha^2 \log n - 1 \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty$)

Dus $k \geq K; 1 \geq \alpha^2 > 1/2: \sum_{n=k}^\infty P(X_n / \sqrt{2 \log n} > \alpha) \geq \sum_{n=k}^\infty \left(\frac{1}{\log n \cdot n}\right)^{\alpha^2} \stackrel{\text{Theor. 5.436}}{=} \infty$

Af 2.17.4 folgt, at $P(L \geq 1) = 1$, men ifølge opg. 4 US6

gælder, at $P(L \leq 1) = 1$, dus $P(L=1) = 1$

□

3)

$$\forall n \in \mathbb{N}: f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad x \in \mathbb{R}: f_n(x) = (1 - x/n)^n \cdot e^{x/2} \cdot 1_{[0, n]}(x)$$

$$\text{Vi ser, at } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = e^{-x/2} \cdot 1_{[0, \infty)}(x), \text{ idet}$$

$$1_{[0, n]} \rightarrow 1_{[0, \infty)}, \quad (1 - x/n)^n \rightarrow e^{-x}, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\left(\log(1 - x/n)^n = n \cdot \log(1 - x/n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{L'Hopital}} \frac{1/(1 - x/n) \cdot (-x/n^2)}{-1/n^2} = -x \right)$$

$$\text{Det gælder desuden, at } f_n \uparrow e^{-x/2} \cdot 1_{[0, \infty)}(x)$$

$$(n \cdot \log(1 - x/n) \leq (n+1) \cdot \log(1 - x/(n+1)), \quad x < n, \text{ d.s. } (1 - x/n)^n \leq (1 - x/(n+1))^{n+1})$$

Da $f_n \geq 0$ og $e^{-x/2} \cdot 1_{[0, \infty)}(x) \in L^1(\lambda_1)$ ($\int_0^\infty e^{-x/2} dx = [-2e^{-x/2}]_0^\infty = 2$),
følger af Lebesgues sætn. om domineret konvergens, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\lambda_1 = \int_0^\infty e^{-x/2} dx = 2$$

SS2, afleveringsopgave nr. 7, Gunna Hellenius

a)

$$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad x \in \mathbb{R}: f_n(x) := n \cdot 1_{[0, 1/n]}(x), \quad n \geq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0, \text{ men } \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \lambda([0, 1/n]) = 1$$

b)

$$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}: f_n(x) = f(x^n) \cdot 1_{[0, 1]}(x), \quad n \geq 1 \quad f \in C^0([0, 1])$$

$$\forall x \in [0, 1): x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ dvs. } f(x^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(0), f \in C^0([0, 1])$$

$$f(1^n) = f(1), \quad n \geq 1 \quad \text{Altså gælder } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} f(0), & x \in [0, 1) \\ f(1), & x = 1 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

$$\text{Da } f \in C^0([0, 1]) \quad \exists M \geq 0 \quad \forall n \geq 1, x \in [0, 1]: |f(x^n)| \leq M$$

dvs. $|f_n| \leq M \cdot 1_{[0, 1]} \in L^1(\lambda_1)$ og dermed ifølge Lebesgues sætning om domineret konvergens, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\lambda_1 = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda_1 = f(0) \cdot \lambda_1([0, 1]) = f(0)$$

Sandsynlighedsteori 2

Uge 41-42.

Forelæsninger: Vi starter på afsnittet *Integralet, konstruktion og egenskaber*, d.v.s. sektionerne 3.1 – 3.8 samt 3.15 og 3.17.

Øvelser: Alle hændelser og stokastiske variable nævnt i det følgende tænkes defineret på et givent sandsynlighedsfelt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1) Eftersom at for enhver følge af hændelser $(A_n)_{n \geq 1}$ er

$$P(\limsup_n A_n) \geq \limsup_n P(A_n) \quad \text{og} \quad P(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n P(A_n).$$

2) Exc. 2.55, samt at

$$P(L^* > y) \leq P(\limsup_n \{X_n > y\}) \leq P(L^* \geq y) \quad \text{for } y \in \mathbf{R}.$$

3) Eftersom formel (2.17.4) side 120. Vink: Udnyt f.eks. opgave 2.

4) Vis at for $x > 0$ er

$$\int_x^\infty e^{-y^2/2} dy \leq \frac{1}{x} \cdot e^{-x^2/2}.$$

Vink: Udnyt f.eks. at $y/x \geq 1$ på $[x, \infty)$.

Lad $(X_i)_{i \geq 1}$ betegne en følge af stokastiske variable, som alle er $N(0, 1)$ -fordelt, d.v.s. for alle $i \geq 1$ og $x \in \mathbf{R}$ er

$$P(X_i \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

Vis at $L \leq 1 + \epsilon$ P -n.o. for alle $\epsilon > 0$ og dermed $L \leq 1$ P -n.o., hvor

$$L = \limsup_n X_n / \sqrt{2 \log n}.$$

Antag yderligere at X_i erne er uafhængige. Vis at

$$P(|S_n| < 2 \cdot \sqrt{n \log n} \text{ fra et vist trin af}) = 1,$$

hvor $S_n = X_1 + \dots + X_n$ for alle $n \geq 1$, og deducer, at $S_n/n \rightarrow 0$ P -n.o.

Vink: Udnyt f.eks., at $S_n/\sqrt{n} \sim N(0, 1)$.

5) Eventuelle hængepartier fra tidligere øvelsesgange.

Afleveringsopgave: Lad $(X_i)_{i \geq 1}$ betegne en følge af uafhængige stokastiske variable alle $E(1)$ -fordelt d.v.s. for alle $i \geq 1$ og $x \in \mathbf{R}_+$ er

$$P(X_i \leq x) = \int_0^x e^{-y} dy.$$

Beregn for $\alpha > 0$ $P(H_\alpha)$, hvor $H_\alpha := \{X_n > \alpha \log n \text{ uendelig ofte}\}$. Benyt dette til at vise, at

$$\limsup_n M_n / \log n = 1 \quad P\text{-n.o.}, \text{ hvor } M_n := \max_{1 \leq k \leq n} X_k.$$

Øvrige meddelelser: Resultatet i Sektion 2.5 er formuleret for vilkårlige indeksnumre med fare for, at budskabet går tabt i bar notation. Lad mig derfor eksplicit formulere det både teoretisk og anvendelsesmæssige vigtigste specialtilfælde. Det generelle tilfælde er iøvrigt et simpelt korollar heraf. Da $\{\emptyset, \Omega\}$ er uafhængigt af alle andre mængdesystemer inklusiv sig selv, omfatter resultatet uden videre situationen, hvor vi som udgangspunkt har givet endelig mange uafhængige mængdesystemer.

Lad $(\mathcal{G}_i)_{i \geq 1}$ betegne en følge af uafhængige mængdesystemer i $\mathcal{F}$, som hver især er $\cap$ -stabile. Lad endvidere $(\alpha_j)_{j \geq 1}$ betegne en endelig eller tællelig familie af parvis disjunkte delmængder af $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$. Da er $(\mathcal{H}_j)_{j \geq 1}$ uafhængige, hvor $\mathcal{H}_j := \sigma(\cup_{i \in \alpha_j} \mathcal{G}_i)$ for $j \geq 1$.

Aflysning. På grund af MatOk'ernes studietur er forelæserne torsdag den 10. oktober afvst. Dette gælder også øvelserne og forelæserne mandag og tirsdag i Uge 42, da disse falder i Universitetets officielle efterårsferie.

Svend Erik Graversen

SS2, TD nr. 6

1)

$(A_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{F}$, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ss-felt.

Påstand: $P(\limsup A_n) \geq \limsup P(A_n)$

Beris:

$$\forall n \geq 1 \forall k \geq n: A_k \subseteq \bigcup_{m \geq n} A_m \Rightarrow P(A_k) \leq P(\bigcup_{m \geq n} A_m)$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1: \sup_{k \geq n} P(A_k) \leq P(\bigcup_{m \geq n} A_m)$$

$$\text{Da } P(\limsup A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\bigcup_{m \geq n} A_m)$$

$$\limsup P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{k \geq n} P(A_k)) \text{ følger det ønske}$$

□

Påstand: $P(\liminf A_n) \leq \liminf P(A_n)$

Beris:

$$\text{Vi har } P(\limsup A_n^c) \geq \limsup P(A_n^c) \quad (+)$$

$$P(\limsup A_n^c) = 1 - P(\liminf A_n)$$

$$\limsup P(A_n^c) = \limsup (1 - P(A_n))$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} (1 - P(A_k)) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} P(A_k) = 1 - \liminf P(A_n)$$

Det ønske følger dermed af (+)

□

2)

Exc. 2.55

 $X_{n,n \geq 1}$ betegner en følge af s.v.

$$L^* := \limsup X_n, \quad L_* := \liminf X_n$$

$$\text{Påstand: } P(L_* > y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(X_n > y) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} P(X_n > y) \leq P(L^* \geq y), y \in \mathbb{R}$$

Bevis:

Lad $y \in \mathbb{R}$ være givet.

$$\{L_* > y\} = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{j \geq n} X_j \right) > y \right\} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \inf_{j \geq n} X_j > y \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} \{X_j > y\} = \liminf \{X_n > y\} \quad (+)$$

$$\limsup \{X_n > y\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} \{X_j > y\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \sup_{j \geq n} X_j > y \right\} \subseteq \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{j \geq n} X_j \right) \geq y \right\} = \{L^* \geq y\} \quad (++)$$

$$\begin{aligned} P(L_* > y) &\stackrel{(+)+1.3.2}{\leq} P(\liminf \{X_n > y\}) \stackrel{1.4.4 \text{ } n \rightarrow \infty}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} P(X_n > y) \\ &\stackrel{1.4.5}{\leq} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(X_n > y) \stackrel{1.4.5}{\leq} P(\limsup \{X_n > y\}) \stackrel{(++)+1.3.2}{\leq} P(L^* \geq y) \end{aligned} \quad (++)$$

□

$$\text{Påstand: } P(L^* > y) \leq P(\limsup \{X_n > y\}) \leq P(L^* \geq y), y \in \mathbb{R}$$

Bevis:

 $y \in \mathbb{R}$ givet

$$\{L^* > y\} = \left\{ \inf_{n \geq 1} \sup_{m \geq n} X_m > y \right\} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \sup_{m \geq n} X_m > y \right\}$$

$$(\text{Da } \inf_{n \geq 1} \sup_{m \geq n} X_m(\omega) > y \Rightarrow \forall n \geq 1: \sup_{m \geq n} X_m(\omega) > y)^*$$

Af (++) følger det ønskede

□

3)

Påstand: (2.17.4)

(U_n) uafh. s.v. på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ss-felt.

$c := \sup \{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{j=1}^{\infty} P(U_j > x) < \infty\}$, da gælder

$\limsup U_n = c$ n.o.

Beris:

Vi skal vise, at $P(\limsup U_n = c) = 1$

$$P(\limsup U_n < x) = 1 - P(\limsup U_n \geq x)$$

$$\leq 1 - P(\limsup \{U_n > x\}) = 1 - 1 = 0, \quad \forall x < c$$

2)

def. på c
+ Borel-Cantelli

$$\text{Da } P(\limsup U_n < c - 1/n) \uparrow P(\limsup U_n < c) \quad (1)$$

ser vi

$$P(\limsup U_n < c) = 0$$

$$P(\limsup U_n \leq x) = 1 - P(\limsup U_n > x)$$

$$\geq 1 - P(\limsup \{U_n > x\}) = 1 - 0 = 1$$

def. på c
+ Borel-Cantelli

$$\text{Da } P(\limsup U_n \leq c + 1/n) \downarrow P(\limsup U_n \leq c) \quad (2)$$

ser vi

$$P(\limsup U_n \leq c) = 1$$

||

$$P(\limsup U_n = c) = 1$$

(tilfældene $c = -\infty$, $c = \infty$ behandles separat, men flg. af hh. (1) og (2))

□

4)

Påstand: $\forall x > 0 : \int_x^\infty e^{-y^2/2} dy \leq 1/x \cdot e^{-x^2/2}$

Beweis:

$\forall y \in [x, \infty) : 1 \leq y/x$

$$\int_x^\infty e^{-y^2/2} dy \leq \int_x^\infty \frac{y}{x} e^{-y^2/2} dy = \int_{x^2/2}^\infty \frac{1}{x} e^{-u} du = \left[-\frac{1}{x} e^{-u} \right]_{x^2/2}^\infty = \frac{1}{x} e^{-x^2/2}$$

□

(X_n) s.v. $\forall n \geq 1 : X_n \sim N(0, 1)$, dvs. $\forall n \geq 1, x \in \mathbb{R} :$

$$P(X_n \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy, \quad P(X_n > x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-y^2/2} dy$$

$L := \limsup X_n / \sqrt{2 \log n}$

Påstand: $P(L \leq 1) = 1$

Beweis:

Da $\{L \leq 1 + 1/n\} \downarrow \{L \leq 1\}$ er det tilstrækkeligt at vise, at

$P(L \leq 1 + \varepsilon) = 1, \quad \varepsilon > 0,$

$P(L \leq 1 + \varepsilon) = 1 \iff P(L > 1 + \varepsilon) = 0$

Jf 2): $P(L > 1 + \varepsilon) \leq P(\limsup \{X_n / \sqrt{2 \log n} > 1 + \varepsilon\}) \quad (*)$

$P(X_n / \sqrt{2 \log n} > 1 + \varepsilon) = P(X_n > (1 + \varepsilon) \sqrt{2 \log n})$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(1+\varepsilon)\sqrt{2 \log n}}^\infty e^{-y^2/2} dy \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(1+\varepsilon)\sqrt{2 \log n}} e^{-((1+\varepsilon)\sqrt{2 \log n})^2/2}$$

$$= \frac{1}{2(1+\varepsilon)\sqrt{\pi \log n}} \left(\frac{1}{n}\right)^{(1+\varepsilon)}$$

⇓

$$\sum_{n=3}^{\infty} P(X_n / \sqrt{2 \log n} > 1 + \varepsilon) \leq \frac{1}{2(1+\varepsilon)^{\sqrt{\pi}}} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\log n} \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\varepsilon}$$

$$\leq \frac{1}{2(1+\varepsilon)^{\sqrt{\pi}}} \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\varepsilon} < \infty, \text{ idet } \varepsilon > 0.$$

Af 2.11.1 samt (*) følger at $P(L > 1 + \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$
 dvs. $P(L \leq 1 + \varepsilon) = 1, \varepsilon > 0$

□

$$S_n := \sum_{i=1}^n X_i, \quad n \geq 1$$

Påstand: $P(|S_n| < 2 \cdot \sqrt{n \log n} \text{ fra et vist } t_n) = 1$ for $(X_i) \perp\!\!\!\perp$

Beris:

$(X_i) \perp\!\!\!\perp$

$$\{ |S_n| < 2 \cdot \sqrt{n \log n} \text{ fra et vist } t_n \} = \liminf \{ |S_n| < 2 \sqrt{n \log n} \}$$

Vi ser

$$P(|S_n| < 2 \cdot \sqrt{n \log n} \text{ fra et vist } t_n) = 1$$

⇕

$$P(\limsup \{ |S_n| > 2 \sqrt{n \log n} \}) = 0$$

$$X_i \sim N(0, 1), i \geq 1 \quad (X_i) \perp\!\!\!\perp \Rightarrow S_n / \sqrt{n} \sim N(0, 1)$$

$$\text{Dvs. } P(|S_n| > 2 \sqrt{n \log n}) = 2 P(S_n / \sqrt{n} > 2 \sqrt{\log n})$$

$$\leq 2 \int_{2\sqrt{\log n}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy \leq \frac{1}{\sqrt{\log n}} e^{-(2\sqrt{\log n})^2/2} = \frac{1}{\sqrt{\log n}} \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

⇓

$$\sum_{n=3}^{\infty} P(|S_n| > 2 \sqrt{n \log n}) \leq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\log n}} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \leq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

⇓ 2.11.1

$$P(\limsup \{ |S_n| > 2 \sqrt{n \log n} \}) = 0$$

□

SS2, afleveringsopgave nr. 6, Gunnar Hellmund

$(X_n)_{n \geq 1}$ uafh. ; $X_n \sim E(1) \quad n \geq 1$

$\alpha > 0$:

$$H_\alpha := \{X_n > \alpha \log n \text{ for uendelig mange } n\} \\ = \limsup_n \{X_n > \alpha \log n\}$$

Extra:

$$I_\alpha := \{X_n > \log n + \alpha \log(\log n) \text{ for uendelig mange } n\} \\ = \limsup_n \{X_n > \log n + \alpha \log(\log n)\}$$

$n \geq 1$:

$$P(X_n > \alpha \log n) = 1 - P(X \leq \alpha \log n) = 1 - \int_0^{\alpha \log n} e^{-y} dy = e^{-\alpha \log n} = \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha$$

$$P(X_n > \log n + \alpha \log(\log n)) = 1 - \int_0^{\log n + \alpha \log(\log n)} e^{-y} dy = e^{-\log n - \alpha \log(\log n)} = \frac{1}{n} \frac{1}{(\log n)^\alpha}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha = \infty, \alpha \leq 1 ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha < \infty, \alpha > 1 \quad (\text{Thm s. 78})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \quad (a_n) \in \mathbb{R}_+, \quad a_n \geq a_{n+1} \quad (\text{Thm s. 435})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{(\log n)^\alpha} < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{(\log 2^n)^\alpha} = \frac{1}{(\log 2)^\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty$$

$$\iff \alpha > 1$$

Af Borel-Cantelli følger

$$\alpha \leq 1: P(H_\alpha) = P(I_\alpha) = 1, \quad \alpha > 1: P(H_\alpha) = P(I_\alpha) = 0$$

$$M_n := \max_{1 \leq k \leq n} X_k$$

Juf opg. 2 US 6:

$$P(\limsup X_n / \log n > \alpha) \leq P(\limsup \{X_n / \log n > \alpha\}) = P(H_\alpha) \\ \leq P(\limsup X_n / \log n \geq \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$$

Specielt ser vi, at

$$P(\limsup X_n / \log n > \alpha) = 0 \quad \alpha > 1 \quad \text{og}$$

$$P(\limsup X_n / \log n \geq \alpha) = 1 \quad \alpha \leq 1$$

$\Downarrow$

$$P(\limsup X_n / \log n = 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(1 \leq \limsup X_n / \log n \leq 1 + 1/n) \\ = 1$$

Lad $\omega \in \{\limsup X_n / \log n = 1\}$ og antag modstridende
at $\limsup M_n / \log n(\omega) > 1$

(Bm. da $X_n \leq M_n: 1 = \limsup X_n / \log n(\omega) \leq \limsup M_n / \log n(\omega)$)

Idet $\limsup$ af en (rel)talfølge er karakteriseret som
det største fortætningspunkt gælder

$$\exists (M_{n_k}) : \lim_{k \rightarrow \infty} M_{n_k}(\omega) / \log n_k = \alpha > 1$$

$\Downarrow$

$$\varepsilon > 0 \text{ givet: } \exists k \geq 1 \forall k \geq K : M_{n_k}(\omega) / \log n_k > 1 + \varepsilon$$

$\Downarrow$

$$M_{n_k}(\omega) > \log n_k (1 + \varepsilon)$$

$\Downarrow$

$$\exists (X_{m_k})_{m_k \leq n_k} : X_{m_k}(\omega) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty \quad \text{og} \quad X_{m_k}(\omega) > \log n_k (1 + \varepsilon) \geq \log m_k (1 + \varepsilon)$$

$\Downarrow$

$$X_{m_k}(\omega) / \log m_k > (1 + \varepsilon)$$

$\Downarrow$

$$\limsup \frac{X_{m_k}}{\log m_k} \geq 1 + \varepsilon > 1 \quad \text{w.p. 1}$$

$$\text{Dus. } \omega \in \{ \limsup \frac{M_n}{\log n} = 1 \}$$

$\Downarrow$

$$P(\limsup \frac{M_n}{\log n} = 1) = 1$$

Sandsynlighedsteori 2

Uge 40.

Forelæsninger: Kapitel 2 sektionerne 2.1 – 2.17 færdiggøres. Sektionerne 2.19 – 2.25 overlades til selvstudium. Sektion 2.18 gennemgås senere. Der næst begynder vi på *Integralet, konstruktion og egenskaber*, d.v.s. sektionerne 3.1 – 3.8 samt 3.15 og 3.17.

Øvelser: 1) Exc. 2.1 og 2.4 (antag $a = 1$) se Sektion 2.24 for definitionen på uniforme sandsynligheder.
2) Exc. 2.19, 2.20, 2.21, 2.22 og 2.23.

3) Exc. 2.36 og 2.37.

4) Exc. 2.44.

5) Lad (S, d) betegne et separabelt metrisk rum og lad f og g betegne to målelige funktioner med værdier i S defineret på et måleligt rum $(E, \mathcal{E})$. Vis at

$$E \ni e \mapsto d(f(e), g(e))$$

ligger i $M(\mathcal{E})$. Vink: udnyt f.eks. spørgsmål 2 i afleveringsopgaven på ugeseddel nr. 37.

Afleveringsopgave: Exc. 2.39.

Øvrige meddelelser: Teksten side 18 linie 3-14 bør udskiftes med:

I forbindelse med integralteorien er det bekvemt at kunne betragte funktioner med værdier i de udvidede reelle tal, d.v.s. mængden $\bar{\mathbf{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Idet $\bar{\mathbf{R}}$ udstyres med σ -algebraen $\mathcal{B}(\bar{\mathbf{R}})$ frembragt af mængderne

$$\{\infty\}, \{-\infty\} \text{ og } (-\infty, x] \text{ for } x \in \mathbf{R}$$

betegner $\bar{M}(\mathcal{E})$ mængden af de $\mathcal{E}$ -målelige funktioner med værdier i $(\bar{\mathbf{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbf{R}}))$. Notationen $\mathcal{B}(\bar{\mathbf{R}})$ indikerer, at der findes en metrik $\bar{d}$ på $\bar{\mathbf{R}}$, så at $\mathcal{B}(\bar{\mathbf{R}})$ netop er Borel σ -algebraen. $\bar{d}$ kan f.eks. vælges som

$$\bar{d}(x, y) = \begin{cases} |x - y| \wedge 1 & x, y \in \mathbf{R} \\ 1 & \text{ellers} \end{cases}$$

Bemærk at $M(\mathcal{E})$ herved kan opfattes som en delmængde af $\bar{M}(\mathcal{E})$, idet en funktion $f : E \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ ligger i $\bar{M}(\mathcal{E})$, hvis og kun hvis

$$\{-\infty \leq f \leq x\} \in \mathcal{E} \quad x \in \bar{\mathbf{R}}.$$

Ved brug heraf samt de gængse udvidelser af regningsarterne $+$ og $\cdot$ samt $\max$ og $\min$ til $\bar{\mathbf{R}}$ ses, at $\bar{M}(\mathcal{E})$ er stabil under punktvis $\max$ og $\min$ samt produkt. Da $\infty + (-\infty)$ ikke kan gives en fornuftig mening, er $\bar{M}(\mathcal{E})$ ikke et vektorrum, men hvis addition af to elementer i $\bar{M}(\mathcal{E})$ blot har mening, f.eks. hvis funktionerne er ikke-negative, er summen igen målelig (tænk over dette).

Svend Erik Graversen

SS2, TD nr. 5

1)

$$\begin{aligned} P(\text{vilk. fam har } k \text{ piger}) &= \sum_{j=k}^{\infty} P(k \text{ piger} \mid j \text{ barn}) \cdot P(j \text{ barn}) \\ &= \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} q^k (1-q)^{j-k} \alpha p^j \stackrel{\substack{\text{barn om} \\ \text{totalt ss.}}}{=} \alpha (q/(1-q))^k \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} (p(1-q))^{j-k} \quad , k > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{vilk. fam har } 0 \text{ piger}) &= \frac{1 - (\alpha + 1)p}{1 - p} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} (p(1-q))^j \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1 - (\alpha + 1)p}{1 - p} + \frac{\alpha}{1 - p(1-q)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{vilk. fam har } 1 \text{ piger}) &= \frac{\alpha q}{1 - q} \sum_{j=1}^{\infty} j (p(1-q))^{j-1} \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{\alpha q}{1 - q} \frac{p(1-q)}{(1 - p(1-q))^2} = \frac{\alpha q p}{(1 - p(1-q))^2} \end{aligned}$$

$$(*) : \sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{1}{1-x}, \quad 0 < x < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} \sum_{j=1}^{\infty} j x^j = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} j x^j = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\begin{aligned} P(\geq 2 \text{ piger} \mid \text{fam har } \geq 1 \text{ piger}) &= \frac{P(\geq 2 \text{ piger})}{P(\geq 1 \text{ piger})} \\ &= \frac{1 - P(0 \text{ piger}) - P(1 \text{ piger})}{1 - P(0 \text{ piger})} = 1 - \frac{P(1 \text{ piger})}{1 - P(0 \text{ piger})} \\ &= 1 - \frac{\alpha q p}{(1 - p(1-q))^2} \cdot \frac{(1-p)(1 - p(1-q))}{(1 - (\alpha + 1)p)(1 - p(1-q)) + \alpha(1-p)} \end{aligned}$$

(Exc. 2.1)