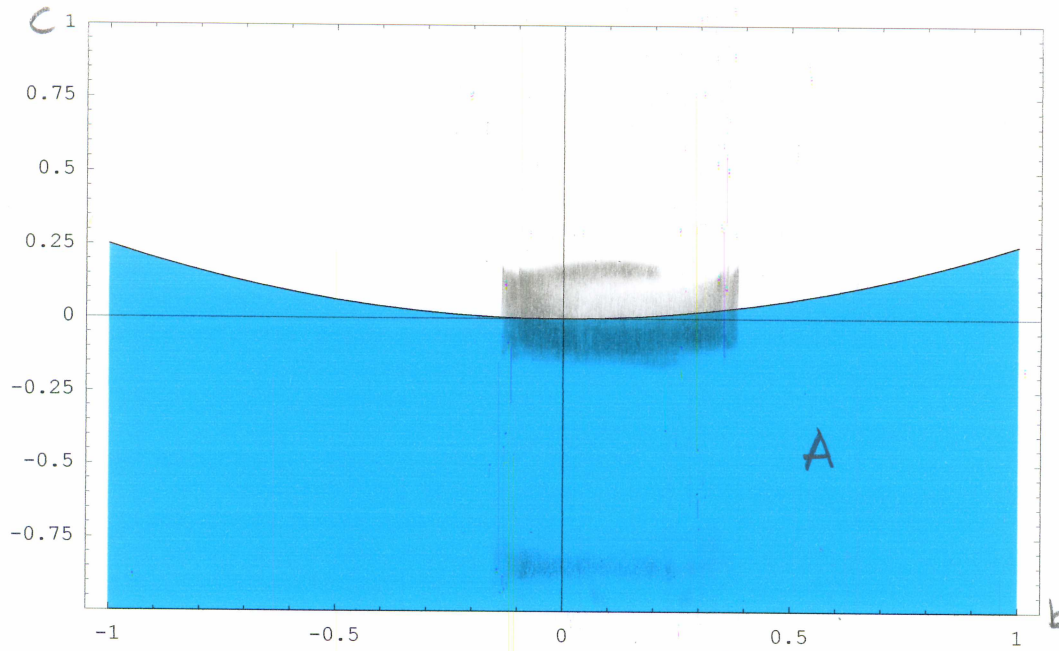


Exc. 2.4 (generelt)

$$P(ax^2 + bx + c \text{ har en reel rod}) = P(b^2 \geq 4ac) \quad (\text{for } a, b, c \in [-1, 1])$$

$$= \iiint f_a(x) \cdot f_b(y) \cdot f_c(z) dx dy dz$$
$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in [-1, 1] \wedge y^2 \geq 4az\}$$

$$= \frac{1}{8} \iiint_A dA = \frac{1}{8} \cdot 4 \left(1 - \int_0^1 \frac{y^2}{4} dy - \int_0^1 \int_{y^2/4}^1 \frac{y^2}{4x} dx dy \right) = \frac{-(6 \cdot \ln(2) - 31)}{72} \approx 0,37$$



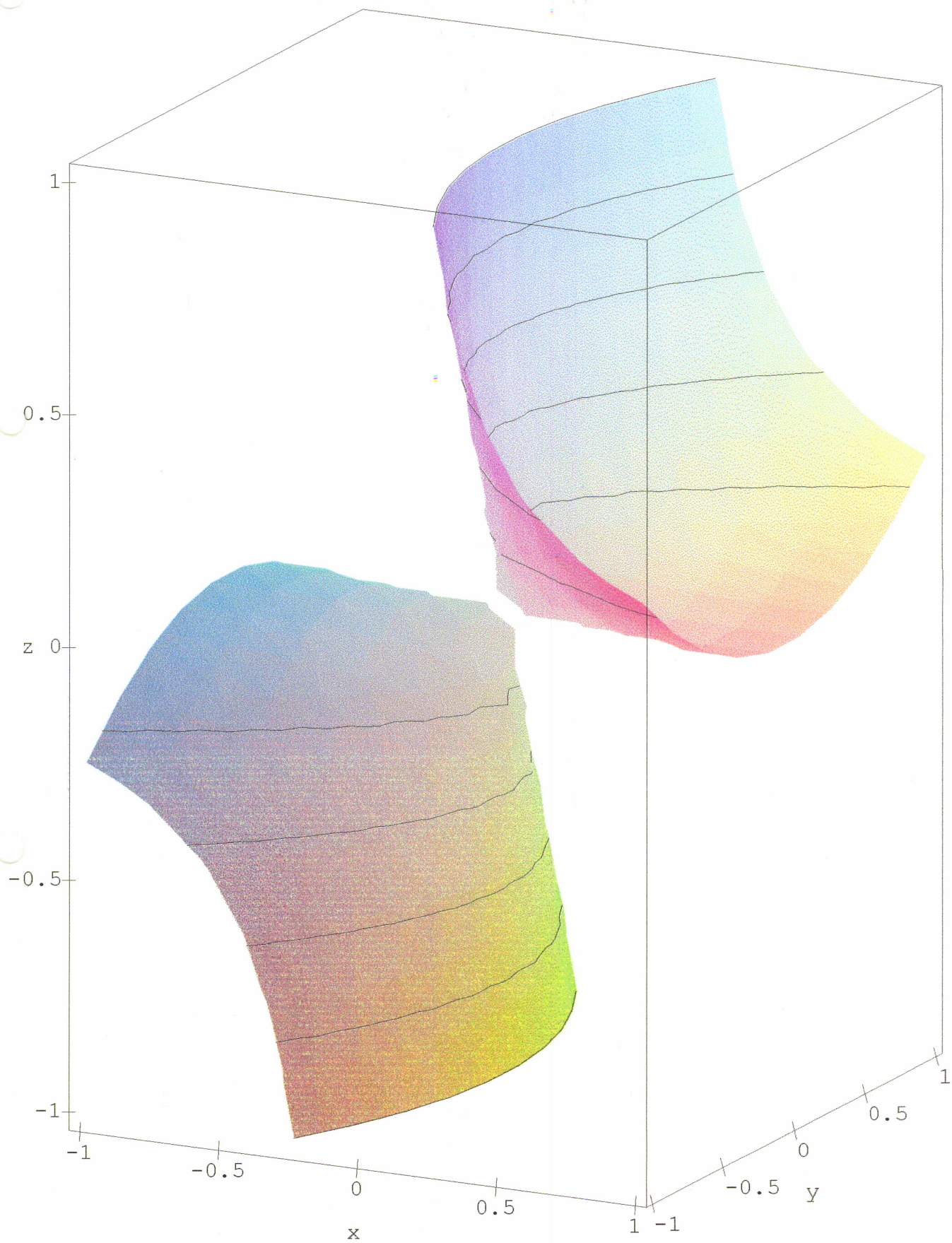
Exc. 2.4 ($a=1$)

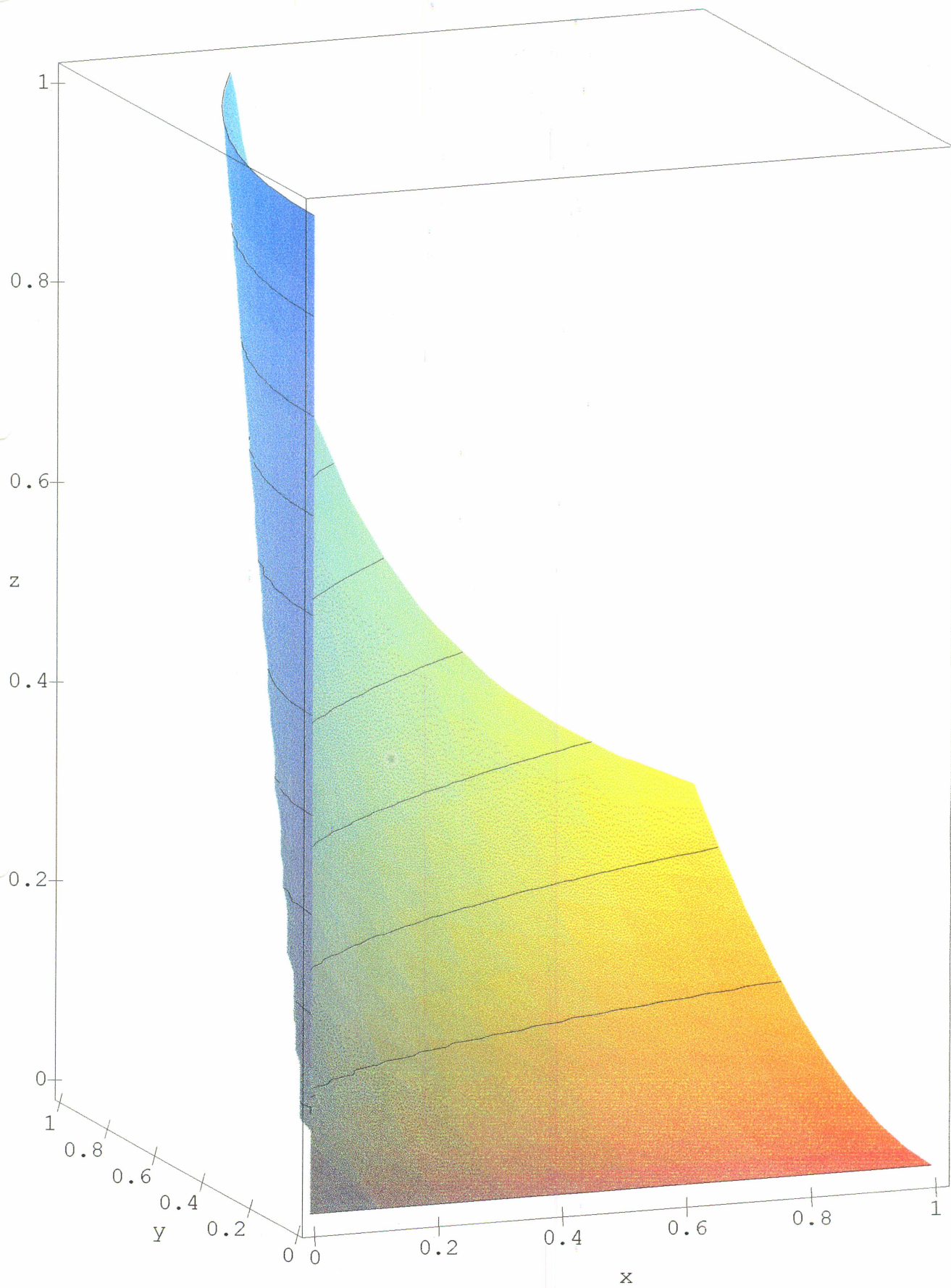
$$P(x^2 + bx + c \text{ has real root}) = P(b^2 \geq 4c)$$

$$|A| = 2 + \int_{-1}^1 \frac{x^2}{4} dx = 2 + \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx = 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{6}$$

$$\Rightarrow P(\quad) = \frac{1}{4} |A| = \underline{\underline{\frac{13}{24}}}$$

$b, c \in [-1, 1]$
uniform





2)

Exc. 2.19

 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ betegnert et ss-felt

$$\{A_n\} \subseteq \mathcal{F}$$

Påstand:

$$\forall n \geq 1: P(A_n) = 0 \Rightarrow P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$$

$$\forall n \geq 1: P(A_n) = 1 \Rightarrow P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$$

Beweis:

Antag, at $\forall n \geq 1: P(A_n) = 0$

$$\underset{2.1.4}{0} \leq \underset{1.4.1}{P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 \Rightarrow P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$$

Antag, at $\forall n \geq 1: P(A_n) = 1$

$$\underset{2.1.4}{1} \geq \underset{Exc. 2.16}{P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)} \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (1 - P(A_n)) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 1 \Rightarrow P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$$

□

Exc. 2.20

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ betiguer et ss-rum

$A_1, \dots, A_n$ uafh. $\in \mathcal{F}$

$\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad P_k := P(A_k)$

Påstand: $P(\bigcup_{k=1}^n A_k) \geq 1 - \exp(-\sum_{k=1}^n P_k)$

Bevis:

$$P(\bigcup_{k=1}^n A_k) \underset{\substack{\text{2.1.5} \\ + \text{P.2.1}}}{=} 1 - P(\bigcap_{k=1}^n A_k^c) \underset{\text{uafh.}}{=} 1 - \prod_{k=1}^n P(A_k^c) \underset{\text{2.1.5}}{=} 1 - \prod_{k=1}^n (1 - P(A_k))$$

$$\underset{\substack{1-x \leq e^{-x} \\ \text{def. på } P_k}}{\geq} 1 - \prod_{k=1}^n e^{-P_k} = 1 - \exp(-\sum_{k=1}^n P_k) \quad \square$$

Exc. 2.21

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ss-rum

Påstand:

$\forall \{A_n\}_{n=1}^\infty$ uafh. $\subseteq \mathcal{F} : \sum_{n=1}^\infty (1 - P(A_n)) = \infty$ galder $P(\liminf A_n) = 0$

Bevis:

Lad $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ uafh. $\subseteq \mathcal{F} : \sum_{n=1}^\infty (1 - P(A_n)) = \infty$ være givet

Af 2.1.5 har vi, at $1 - P(A_n) = P(A_n^c)$

$\{A_n\}_{n=1}^\infty$ uafh. $\Rightarrow \{A_n^c\}_{n=1}^\infty$ uafh.

Af det andet Borel-Cantelli lemma følger, at $P(\limsup A_n^c) = 1$

$$P(\liminf A_n) \underset{2.1.5}{=} 1 - P((\liminf A_n)^c) \underset{P.2.1}{=} 1 - P(\limsup A_n^c) = 0 \quad \square$$

Exc. 2.22

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ betegner et ss-rum

$$\forall n \geq 1: A_n \in \mathcal{F}, \quad \prod_{n \geq 1} A_n$$

$$A_* := \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} A_n, \quad A^* := \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} A_n$$

$$\forall n \geq 1: p_n := P(A_n)$$

Påstand:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty \implies P(A^*) = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty \implies P(A^*) = 1 \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-p_n) < \infty \implies P(A_*) = 1 \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-p_n) = \infty \implies P(A_*) = 0 \quad (4)$$

Beweis:

(1) og (2) er indh. af 2.11 (De to Borel-Cantelli Lemmaer)

$$\prod_{n \geq 1} A_n \xrightarrow{2.6} \prod_{n \geq 1} A_n^c \quad \text{Af 2.11 følger...}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-p_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-P(A_n)) \stackrel{2.15}{=} \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^c) =: S$$

$$S < \infty \implies \limsup A_n^c = 0 \stackrel{\substack{2.1.5 \\ P.2.4}}{\implies} \liminf A_n = 1$$

$$S = \infty \implies \limsup A_n^c = 0 \implies \liminf A_n = 0$$

□

Exc. 2.23

$$A_n \underset{n \geq 1}{\text{II}} ; P(A_n) < 1, n \geq 1 ; P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$$

Pastand: $P(\limsup A_n) = 1$

Beweis:

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1 \Rightarrow 0 = 1 - P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c) = \prod_{n=1}^{\infty} P(A_n^c),$$

$$P(A_n) < 1 \Rightarrow 0 < P(A_n^c) \quad n \geq 1$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1 : \prod_{k=n}^{\infty} P(A_k^c) = 0$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1 : P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = 1 - \prod_{k=n}^{\infty} P(A_k^c) = 1$$

$$\Rightarrow P(\limsup A_n) = 1 \quad (\text{pr. def. of } \limsup)$$

Exc. 2.19 ii)

□

3)

Exc. 2.36

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ betegner en n -dimensional s.v. med fordelingsfunktion F .

$$M := \max \{X_1, \dots, X_n\}$$

Påstand: $\forall s \in \mathbb{R} : P(M \leq s) = F(s, \dots, s)$

Bewis:

$$P(M \leq s) = P(X_1 \leq s, \dots, X_n \leq s) = F(s, \dots, s)$$

□

Exc. 2.37

$X_1, \dots, X_n$ er uafhængige reelle s.v. med fordelingsfunktioner $F_1, \dots, F_n$

$$M := \max \{X_1, \dots, X_n\}, \quad L := \min \{X_1, \dots, X_n\}$$

G, H, Φ betegner fordelingsfunktionerne for hh. M, L og (M, L)

$$\text{Påstand: } \forall s \in \mathbb{R} : G(s) = \prod_{j=1}^n F_j(s) \quad (i)$$

Bewis:

$$G(s) := P(M \leq s) = P(X_1 \leq s, \dots, X_n \leq s) = \prod_{j=1}^n P(X_j \leq s) = \prod_{j=1}^n F_j(s)$$

□

$$\text{Påstand: } \forall t \in \mathbb{R} : H(t) = 1 - \prod_{j=1}^n (1 - F_j(t)) \quad (ii)$$

Bewis:

$$H(t) := P(L \leq t) = P\left(\bigcup_{j=1}^n \{X_j \leq t\}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{j=1}^n \{X_j \leq t\}^c\right)$$

$$= 1 - \prod_{j=1}^n P(\{X_j \leq t\}^c) \stackrel{2.1.5}{=} 1 - \prod_{j=1}^n (1 - P(X_j \leq t)) \stackrel{P.2.1}{=} 1 - \prod_{j=1}^n (1 - F_j(t))$$

□

Pöstand:

$$P(M \leq s, L > t) = \begin{cases} \prod_{j=1}^n (F_j(s) - F_j(t)) & , s > t \\ 0 & , s \leq t \end{cases} \quad (\text{iii})$$

Bevis:

$$\begin{aligned} P(M \leq s, L > t) &= P\left(\bigcap_{j=1}^n \{X_j \leq s\} \cap \bigcap_{j=1}^n \{X_j > t\}\right) = P\left(\bigcap_{j=1}^n \{t < X_j \leq s\}\right) \\ &= \prod_{j=1}^n P(t < X_j \leq s) \stackrel{1.3.3}{=} \begin{cases} 0 & , s \leq t \\ \prod_{j=1}^n (P(X_j \leq s) - P(X_j \leq t)) = \prod_{j=1}^n (F_j(s) - F_j(t)) & , s > t \end{cases} \end{aligned}$$

□

Pöstand:

$$\Phi(s, t) = \begin{cases} \prod_{j=1}^n F_j(s) - \prod_{j=1}^n (F_j(s) - F_j(t)) & , s > t \\ \prod_{j=1}^n F_j(s) & , s \leq t \end{cases} \quad (\text{iv})$$

Bevis:

$$\begin{aligned} \Phi(s, t) &:= P(M \leq s, L \leq t) \stackrel{1.3.3}{=} P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^c) \\ &= \prod_{j=1}^n F_j(s) - \prod_{j=1}^n (F_j(s) - F_j(t)) & , s > t \\ &\stackrel{i + iii}{=} \begin{cases} \prod_{j=1}^n F_j(s) & , s \leq t \end{cases} \end{aligned}$$

□

4)

Exc. 2.44

X s.v., $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borel fkt.

Af 1.38.4 og def. på s.v. (2.7) følger, at $Y := g(X)$ er en s.v., og det er i øvrigt klart, at $\sigma(Y) \subseteq \sigma(X)$ (*) udfra def. 1.38.1 og 1.42.1.

Påstand: $X \perp\!\!\!\perp Y \iff \exists a \in \mathbb{R}: P(Y=a)=1$ (Y degenereret)

Bevis:

' $\implies$ ':

$X \perp\!\!\!\perp Y$

Sæt $X_n := X, n \geq 1$, idet $\sigma(Y) \subseteq \sigma(X)$ og Y dermed er $\sigma(X)$ målelig følger af 2.13 (0-1 loven for stokastiske funktioner), at $\exists a \in \mathbb{R}: P(Y=a)=1$

' $\Leftarrow$ ':

$\exists a \in \mathbb{R}: P(Y=a)=1$

Lad $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ være givet, der er to muligheder:

$a \in A: P(Y \in A)=1$

$a \notin A: P(Y \in A)=0$

Af Exc. 2.18, def. 2.9.1 følger, at $X \perp\!\!\!\perp Y$

□

5)

(S, d) separabelt metrisk rum, $(E, \mathcal{E})$ måleligt rum

$f, g: E \rightarrow S$ målelige

Definer $d_{fg}: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ $d_{fg}(e) = d(f(e), g(e))$, $e \in E$

Påstand: $d_{fg} \in M(E)$

Beweis:

Juf. afleveringsopgave nr. 2 spg. 2 er $d(\cdot, \cdot): S \rightarrow \mathbb{R}$ kontinuert, da $C^0(S, \mathbb{R}) \subseteq M(S)$ (seth. 7 s. 75)

Juf. M2 (s. 14) er $d_{fg} \in M(E)$ $\square$

SS2, afleveringsopgave nr. 5, Gunnar Hellmünd

Exc. 2.39

X betegner en s.v. med fordelingsfunktion F .

$$F(t-) = \lim_{s \uparrow t} F(s)$$

Påstand: X symmetrisk $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} : F(-t) = 1 - F(t-)$ (*)

Bevis:

' $\Rightarrow$ ':

$$X \text{ symmetrisk, dvs. } X \sim -X \equiv P_X = P_{-X} \stackrel{2.8.17}{\Leftrightarrow} F_X = F_{-X} \quad (*)$$

Lad $t \in \mathbb{R}$ være vilk.

$$\begin{aligned} F(-t) &:= P(X \leq -t) = P(-X \geq t) = 1 - P(-X < t) \\ &= 1 - P(-X < t) + P(-X = t) - P(-X = t) \end{aligned}$$

$$= 1 - P(-X \leq t) + P(-X = t)$$

$$= 1 - F(t) + F(t) - F(t-) = 1 - F(t-)$$

(*)
Exc. 2.39 ii
+ 2.8.5



' $\Leftarrow$ ':

$$\forall t \in \mathbb{R} : F(-t) = 1 - F(t-) \quad (*)$$

Lad $t \in \mathbb{R}$ være vilk.

$$F_X(t) = F(t) = 1 - F(-t-) = 1 + P(X = -t) - F(-t)$$

Exc. 2.39 ii
+ 2.8.5

$$= 1 + P(X = -t) - P(X \leq -t) = 1 + P(X = -t) - (1 - P(X > -t))$$

$$= P(X > -t) + P(X = -t) = P(-X < t) + P(-X = t)$$

$$= P(-X \leq t) =: F_{-X}(t), \quad t \text{ vilk. dvs. } F_X = F_{-X}$$

1.3.5



Påstand:

$$X \perp\!\!\!\perp Y, X \sim Y \implies X - Y \text{ symmetrisk}$$

Beweis:

$$X \sim Y \implies F_X = F_Y =: F(*) \text{ jf. 2.8.17}$$

$$X \perp\!\!\!\perp Y \xRightarrow{2.9.1} \forall s, t \in \mathbb{R}: F_{X,Y}(s, t) = P(X \leq s, Y \leq t) = P(X \leq s)P(Y \leq t) \\ = F_X(s) \cdot F_Y(t)$$

$$\text{Tilsvarende gælder } \forall s, t \in \mathbb{R}: F_{Y,X}(t, s) = F_Y(t)F_X(s) = F_X(s) \cdot F_Y(t)$$

$$\text{Vi ser, at } F_{X,Y}(s, t) = F_{Y,X}(t, s) = F(s) \cdot F(t), (s, t) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{Af 2.8.17 følger } (X, Y) \sim (Y, X) \quad (+)$$

$$\text{Definer } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2: f(x, y) := x - y$$

$f \in C^0(\mathbb{R}^2)$ og bm. i 1.39 s.47 giver dermed, at f er en Borel fkt.

$$\text{af 2.8.15 og (+) følger, at } X - Y \sim Y - X = -(X - Y)$$

At $X - Y \sim -(X - Y)$ er netop def. på, at $X - Y$ er symmetrisk.



Sandsynlighedsteori 2

Uge 39.

Forelæsninger: Vi færdiggør afsnittet *Mål* og starter, hvis tiden tillader, på Kapitel 2 sektionerne 2.1-2.17.

Øvelser: 1) Exc. 1.16. ('content' = endelig additiv mængdefunktion.)

2) Betragt målrummet $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \lambda_1)$. Vis at $A \in \mathcal{N}_\lambda$, hvis $A \subseteq \mathbf{R}$ er tællelig. Vis at kontinuerte funktioner $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ er ens, hvis $f = g$ λ_1 -n.o.

3) Lad $(E, \mathcal{E})$ betegne et måleligt rum. Vis at $m(\mathcal{E})$ er stabil under tællelig sum. Udnyt dette til at vise, at hvis $\Omega = (\omega_i)_{i \geq 1}$ er en tællelig mængde og $(p_i)_{i \geq 1}$ ikke negative reelle tal, så definerer

$$\mu(A) := \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot \mathbf{1}_A(\omega_i) \quad A \subseteq \Omega$$

et mål på $(\Omega, 2^\Omega)$ med total masse $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$.

4) Øvelserne nr. 10, 11 og 12 siderne 25 og 27.

5) Betragt det målelige rum $(\mathbf{R}, \mathcal{E})$, hvor $\mathcal{E}$ er σ -algebraen defineret i øvelsen på side 4. Vis at flg. mængdefunktion μ er et ikke σ -endeligt mål på $(\mathbf{R}, \mathcal{E})$.

$$\mu(A) := 0 \text{ hvis } A \text{ tællelig og } \mu(A) := \infty \text{ hvis } A^c \text{ tællelig.}$$

6) Lad S betegne intervallet $]0, 1[$. Lad d_1 og d_2 være defineret ved

$$d_1(x, y) := |x - y| \quad \text{og} \quad d_2(x, y) := |1/x - 1/y| \quad x, y \in S.$$

Vis at d_1 og d_2 er ækvivalente metrikker, og at d_2 , men ikke d_1 , er fuldstændig.

Lad mig rette en fejl angående kugler i $\mathbf{R}^2$. For ethvert $p \geq 1$ er

$$d_p(\underline{x}, \underline{y}) := (|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p)^{1/p}$$

en produktmetrik på $\mathbf{R}^2$ med konvekse kugler. Tilfældet $p = 2$ er karakteriseret ved, at kuglerne er invariante under rotation omkring centrum.

Afleringsopgave: Lad $(E, \mathcal{E})$ betegne et måleligt rum og μ og ν to endelige mål på $(E, \mathcal{E})$. Vis at

$$\{A \in \mathcal{E} \mid \mu(A) \leq \nu(A)\}$$

er $\uparrow$ -stabil (voksende foreningsmængde), $\downarrow$ -stabil (aftagende fællesmængde) samt Σ -stabil (tællelig disjunkt forening.)

Vis herudfra at hvis μ_1 og μ_2 er to endelige mål på $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$, så at

$$\mu_1(U) \leq \mu_2(U) \text{ for alle } U \subseteq \mathbf{R} \text{ åben,}$$

så er $\mu_1(A) \leq \mu_2(A)$ for alle $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$. Vink: Udnyt Øvelse 4 side 12.

Bemærkning. Det er nok, det holder for alle U af formen $]a, b[$, hvor $a < b$.

Øvrige meddelelser: Vi skal kun behandle følgende specialtilfælde af resultatet i sektion 2.4. Beviset findes på side 106 linie 4 og afsnittet ud.

Lad $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ betegne mængdesystemer, som alle er indeholdt i $\mathcal{F}$ og stabile under endelig gennemsnit. σ -algebraerne $\sigma(\mathcal{G}_1), \dots, \sigma(\mathcal{G}_n)$ er da uafhængige, hvis og kun hvis

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n G_i\right) = \prod_{i=1}^n P(G_i) \quad \text{for alle } G_1 \in \mathcal{G}_1^*, \dots, G_n \in \mathcal{G}_n^*.$$

Svend Erik Graversen

SS2, TØ nr. 4

1)

Exc. 1.16

ν, μ indhold på $(E, \mathcal{E})$, $\nu(E) = \mu(E) < \infty$

$\forall F \in \mathcal{E}: \nu(F) \leq \mu(F)$

Påstand: $\forall F \in \mathcal{E}: \nu(F) = \mu(F)$

Bevis:

Antag modstridsvis $\exists F \in \mathcal{E}: \nu(F) < \mu(F)$

$\Rightarrow \nu(E) = \nu(F) + \nu(F^c) < \mu(F) + \mu(F^c) = \mu(E) \quad \text{m}$

2)

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$

Påstand: $A \subseteq \mathbb{R}$ tællig $\Rightarrow A \in \mathcal{N}_{\lambda_1}$

Bevis:

Lad $x \in \mathbb{R}$ være vilkårlig

Sæt $A_n := (x - 1/n, x + 1/n)$, $n \geq 1$ $\lambda_1(A_n) := 2/n$

$A_n \downarrow \{x\}$, $\lambda_1(A_1) = 2/1 = 2 < \infty$, dvs. jf lemma 7

pkt. 4 s. 23 gælder $\lambda_1(\{x\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2/n = 0$

$A \subseteq \mathbb{R}$ tællig $\Rightarrow \exists (x_n) \subseteq \mathbb{R}: A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$

$\Rightarrow 0 \leq \mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x_n\}) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{N}_{\lambda_1}$

lemma 7 pkt. 5

□

$$f, g \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

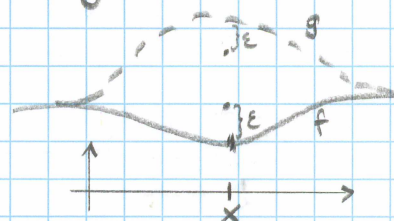
Påstand: $f=g$ λ_1 -n.o. $\implies f=g$

Beweis:

Antag $f \neq g$, dvs. $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)$

Antag (uden tab af generalitet) at $f(x) < g(x)$

Vælg $\varepsilon > 0 : f(x) + \varepsilon < g(x) - \varepsilon$



Da f, g er kontinuerte $\exists \delta_f, \delta_g > 0$

$$b(x, \delta_f) \subseteq f^{-1}(b(f(x), \varepsilon)), \quad b(x, \delta_g) \subseteq g^{-1}(b(g(x), \varepsilon))$$

$$\text{Vælg } \delta = \min(\delta_f, \delta_g) : b(x, \delta) \subseteq f^{-1}(b(f(x), \varepsilon)) \cap g^{-1}(b(g(x), \varepsilon))$$

Dvs. $\forall x' \in (x - \delta, x + \delta) : f(x') < g(x')$, men

$$\lambda_1(x - \delta, x + \delta) = 2\delta \neq 0$$

□

3)

$(E, \mathcal{E})$ måleligt rum

Påstand: $\mu(E)$ er stabil under tællelig sum

Beweis:

$$(\mu_n) \subseteq \mathcal{M}(E) \quad \mu := \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \quad \mu : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

$$\mu(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\emptyset) = 0$$

Lad $(A_k)_{k \geq 1} \subseteq E$ p.d., dvs. $\forall n \geq 1 : \mu_n(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(A_k)$

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

$\uparrow$
 sum af
 positive led

□

Betrægt $\Omega = (\omega_i)$ en tællelig mængde, $(p_i) \in \mathbb{R}_+$

Definer $\mu: 2^\Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ $A \subseteq \Omega: \mu(A) := \sum_{i=1}^{\infty} p_i 1_A(\omega_i)$

Påstand: μ er et mål på $(\Omega, 2^\Omega)$ med total masse $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$

Beweis:

$$\mu(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i 1_{\emptyset}(\omega_i) = 0$$

$$(A_n) \subseteq 2^\Omega \text{ p.d.}$$

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i 1_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}(\omega_i) \stackrel{\text{p.d.}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} p_i \left(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n}(\omega_i) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} p_i 1_{A_n}(\omega_i) \stackrel{\text{sum af positive led}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

$$\mu(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i 1_{\Omega}(\omega_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i$$

□

4)

Øvelse 10 s. 25

Lad $r > 0$, definer $m_r: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $m(x) = rx$ ($x \in \mathbb{R}^n$)

Påstand: $\lambda_n \circ m_r^{-1} = r^{-n} \cdot \lambda_n$ ($\lambda_{nm} = r^{-n} \lambda_n$)

Beweis:

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} \exists e, f \in \mathbb{R}: (a, b) \cap (c, d) = (e, f)$$

$$\text{Da } (\cap A_n) \cap (\cap B_n) = \cap (A_n \cap B_n) \text{ (P. 2.14)}$$

er m.g.d. $\{\prod_{i=1}^n (a_i, b_i) \mid a_i, b_i \in \mathbb{R} \ i=1, \dots, n\}^{(*)}$ nf-stabil

Sæt $A_k = \prod_{i=1}^n (-k, k)$, da gælder $A_k \uparrow \mathbb{R}^n$ og

$$\lambda_n(A_k) = \prod_{i=1}^n 2k = (2k)^n < \infty$$

Da d_{eucl} er ækvivalent med den euklidiske metrik på $\mathbb{R}^n$

frambringer udgørelse i $(*) B(\mathbb{R}^n)$, jvf. korollar 2 s. 24
 gælder derfor, at $\lambda_n \circ m_r^{-1} = r^{-n} \cdot \lambda_n$, hvis
 $\lambda_n \circ m_r^{-1}|_{(*)} = r^{-n} \cdot \lambda_n|_{(*)}$

Lad $a_i, b_i \in \mathbb{R} \quad i=1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \lambda_n \circ m_r^{-1} \left(\prod_{i=1}^n (a_i, b_i) \right) &= \lambda_n \left(\prod_{i=1}^n (a_i/r, b_i/r) \right) \\ &= \prod_{i=1}^n (b_i/r - a_i/r) = r^{-n} \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = r^{-n} \lambda_n \left(\prod_{i=1}^n (a_i, b_i) \right) \end{aligned} \quad \square$$

Øvelse 11 s. 25

Påstand: $\forall n \geq 1 \quad \lambda_{n+1} = \lambda_n \otimes \lambda_1$

Beris:

Som ovenstående argument er det nok at vise,
 at $\lambda_{n+1} = \lambda_n \otimes \lambda_1$ på alle $(n+1)$ -dimensionale kasser.

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} \left(\prod_{i=1}^{n+1} (a_i, b_i) \right) &= \prod_{i=1}^{n+1} (b_i - a_i) = \left(\prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \right) \cdot (b_{n+1} - a_{n+1}) \\ &= \lambda_n \left(\prod_{i=1}^n (a_i, b_i) \right) \cdot \lambda_1(a_{n+1}, b_{n+1}) \stackrel{(+)}{=} \lambda_n \otimes \lambda_1 \left(\prod_{i=1}^{n+1} (a_i, b_i) \right) \end{aligned}$$

Da $\prod_{i=1}^n (a_i, b_i) \in B(\mathbb{R}^n)$, $(a_{n+1}, b_{n+1}) \in B(\mathbb{R})$

$\square$

Øvelse 12 s. 27

$(E, \mathcal{E})$ måltomt rum μ, ν mål på $(E, \mathcal{E})$

Påstand: $\nu_\mu \leq \nu, \nu$ endeligt $\stackrel{(*)}{\implies} \nu$ μ -kontinueret

Beris:

Lad ν være μ -satureret og endeligt $(*)$

Vi skal vise, at $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A \in \mathcal{E}: \mu(A) \leq \delta \implies \nu(A) \leq \varepsilon$

Antag modstridssvis

$$\neg (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A \in \mathcal{E}: \mu(A) \leq \delta \implies \nu(A) \leq \varepsilon)$$

$$= \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists A \in \mathcal{E}: \mu(A) \leq \delta \wedge \nu(A) > \varepsilon$$

Vælg $\varepsilon > 0, (A_n) \subseteq \mathcal{E}: \mu(A_n) \leq 1/n^2 \wedge \nu(A_n) > \varepsilon, n \geq 1$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < \infty \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{1. Borel-Cantelli} \\ \text{Lemma 8}}}{\implies} \mu(\limsup A_n) = 0$$

$$\implies \nu(\limsup A_n) = 0$$

ν μ -satureret

$(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m) \downarrow \limsup A_n$ ν endeligt mål

$$\stackrel{\substack{\text{Lemma 7} \\ \text{stk. 4}}}{\implies} \nu(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m) \downarrow 0 \implies \exists n \geq 1: \nu(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m) \leq \varepsilon$$

men $\forall n \geq 1: \nu(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m) \geq \nu(A_n) > \varepsilon$

$\leadsto$

5)

$(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ ($\mathcal{E}$ defineret i øvelse 1 s. 4, opg 2 us1)

Definer $\mu: \mathcal{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

$A \in \mathcal{E}: \mu(A) := 0$, A tællig $\mu(A) := \infty$, A^c tællig

Påstand: μ er et ikke σ -endeligt mål på $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$

Bewis:

$$\mu(\emptyset) = 0$$

$$(A_n) \subseteq \mathcal{E} \text{ p.d.}$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0, \forall n \geq 1: A_n \text{ tællig} \quad \left(\begin{array}{l} \text{tællig forening} \\ \text{af tællige m\u00e5d t\u00e6llig} \end{array}\right)$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \infty, \exists n \geq 1: A_n^c \text{ t\u00e6llig} \quad \left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \subseteq A_n^c\right)$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Dus. μ er et mål på $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$

Antag modstridende, at $\exists (A_n) \subseteq \mathcal{E}: \mu(A_n) < \infty \wedge \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}$
dus, at μ er σ -endeligt.

$$\forall (A_n) \subseteq \mathcal{E}: \mu(A_n) < \infty \Rightarrow \mu(A_n) = 0, n \geq 1$$

Dus. $\forall n \geq 1: A_n \text{ t\u00e6llig} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R} \text{ t\u00e6llig}$

6)

$$S :=]0, 1]$$

$$d_1: S \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \forall x, y \in S: d_1(x, y) = |x - y|$$

$$d_2: S \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \forall x, y \in S: d_2(x, y) = ||x - y|$$

Påstand: d_1, d_2 er ækvivalente metrikker på S

Beweis:

$$i = 1, 2, \quad x, y, z \in S:$$

$$d_i(x, y) = d_i(y, x)$$

$$d_i(x, y) = 0 \iff x = y:$$

$\Leftarrow$: klar

$$\Rightarrow: i=1: |x - y| = 0 \Rightarrow x = y$$

$$i=2: ||x - y| = 0 \Rightarrow |x| = |y| \Rightarrow x = y$$

$$d_i(x, y) \leq d_i(x, z) + d_i(z, y)$$

$$i=1: |x - y| \leq |x - z| + |z - y|$$

$$i=2: ||x - y| = ||x - z| + |z - y| \leq ||x - z| + ||z - y|$$

Dus. d_1, d_2 er metrikker på S

Lad $x_n \xrightarrow{d_1} x \quad (x_n) \subseteq S, x \in S$

Da $x \in S$. $\exists \varepsilon > 0, N \geq 1 \forall n \geq N: 0 < \varepsilon < x_n \wedge 0 < \varepsilon < x$

$$\text{Dus. } \forall n \geq N: \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_n} \right| = \left| \frac{x_n - x}{x \cdot x_n} \right| \leq \frac{|x - x_n|}{\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow x_n \xrightarrow{d_2} x$$

Lad $x_n \xrightarrow{d_2} x$ $(x_n) \in S$, $x \in S$:

$$\forall n \geq 1: |x - x_n| \leq \left| \frac{x_n - x}{x x_n} \right| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_n} \right| \Rightarrow x_n \xrightarrow{d_1} x$$

□

Påstand: d_2 er en fuldstændig metrik

Beweis:

Vi skal vise at enhver Cauchy-følge i (S, d_2) er konvergent

Lad $(x_n) \in S$ være en Cauchy-følge mht. d_2

Vi kan da se $(1/x_n) \in [1, \infty)$ som en Cauchy-følge i $\mathbb{R}$, dvs. $(1/x_n)$ er konvergent mht. den sædvanlige euklidiske metrik. Da $[1, \infty)$ er lukket tilhører grænseværdier for $(1/x_n)$ også $[1, \infty)$, men dvs.

$$\exists x \in S: x_n \xrightarrow{d_2} x$$

□

Påstand: d_1 er ikke en fuldstændig metrik.

Beweis:

$$\text{Sæt } x_n = 1/n, n \geq 1$$

Lad $\varepsilon > 0$ være vilkårlig

Vælg $N \geq 1$ så $1/N \leq \varepsilon/2$, da gælder $\forall n, m \geq N$:

$$|x_n - x_m| = |1/n - 1/m| \leq 1/n + 1/m \leq 2/N \leq 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Dvs. (x_n) er en Cauchy-følge

Antag modstridende, at $\exists x \in S: x_n \xrightarrow{d_1} x$

$$\exists N \geq 1 \forall n \geq N: 0 < 1/n < x$$

↯

SS2, aflevering nr. 4, Gunnar Hellmund

$(E, \mathcal{E})$ betegner et måleligt rum

μ, ν er endelige mål på $(E, \mathcal{E})$

$$\mathcal{M} := \{A \in \mathcal{E} \mid \mu(A) \leq \nu(A)\}$$

Påstand: $\mathcal{M}$ er $(\uparrow, \downarrow, \Sigma c)$ -stabil

Beweis:

$\uparrow$:

$$\text{Lad } (A_n) \subseteq \mathcal{M} \quad A_n \uparrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\text{Jef. Lemma 7, pkt. 3 s. 23: } \nu(A_n) \uparrow \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

$$\text{og } \mu(A_n) \uparrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

$$\text{Antag modstridvis } \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

$$\Rightarrow \exists N \geq 1 \quad (\forall n \geq N: \nu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) < \mu(A_n))$$

$$\text{men } \nu(A_n) \leq \nu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \quad n \geq 1 \Rightarrow \exists N \geq 1: \nu(A_N) < \mu(A_N) \quad \text{!}$$

$\downarrow$

$$\text{Lad } (A_n) \subseteq \mathcal{M} \quad A_n \downarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Da μ, ν er endelige mål gælder jef. Lemma 7 pkt. 4 s. 23, at $\nu(A_n) \downarrow \nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$, $\mu(A_n) \downarrow \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$

$$\text{Antag modstridvis, at } \nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

$$\text{Dvs. } \exists N \geq 1: \nu(A_N) < \mu\left(\bigcap_{n=1}^N A_n\right) \leq \mu(A_N) \quad \text{!}$$

Σc :

Lad $(A_n) \subseteq \mathcal{E}$ p.d.

$$\text{Dus: } \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

□

Påstand:

Antag at μ_1, μ_2 er endelige mål på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
og at $\forall U \subseteq \mathbb{R}$ åbne: $U \in \mathcal{M}$

Da gælder, at $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Beweis:

Da $\mathcal{G} := \{U \subseteq \mathbb{R} \mid U \text{ åbne}\} \subseteq \mathcal{M}$ og $\mathcal{M}$ er $(\uparrow, \downarrow)$ -stabil
gælder $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_0(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ jf øvelse
4 side 12.

□

Sandsynlighedsteori 2

Uge 38.

Forelæsninger: *Mål*, d.v.s. sektionerne 1.3, 1.4, 1.7, 1.13-1.15, 1.19, 1.20 og 1.44.

Øvelser: I det følgende betegner $(E, \mathcal{E})$ et måleligt rum.

- 1) Exc. 1.77.
- 2) Antag at $\mathcal{E} = \{\emptyset, E\}$. Vis at $M(\mathcal{E})$ kun indeholder konstante funktioner.
- 3) Vis at $S(\mathcal{E}) = \{f \in M(\mathcal{E}) \mid f(E) \text{ endelig mængde}\}$. Udnyt dette til at vise, at ethvert $f \in S(\mathcal{E})$ er på formen $\sum_i a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$, hvor summen er endelig og A_i 'erne parvis disjunkte elementer i $\mathcal{E}$.
- 4) Lad grundmængden være $\mathbb{N}$, d.v.s. de ikke-negative hele tal. Betragt fig. elementer i $2^{\mathbb{N}}$. $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 4\}$ og $A_3 = \{2, 3, 4\}$. Bestem den tilhørende partition (se side 5 nederst) og beregn antallet af elementer i $\sigma(A_1, A_2, A_3)$.
- 5) Vis at $\mathcal{E}$ er tællelig frembragt hvis og kun hvis $\mathcal{E}$ er af formen $\sigma(f)$ for et $f \in M(\mathcal{E})$. Vink til 'kun hvis'-delen. Definier

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n} \cdot \mathbf{1}_{A_n},$$

- hvor A_n 'erne frembringer $\mathcal{E}$. Studer mængderne $\{[10^n \cdot f] \text{ er et ulige tal}\}$ for $n \geq 0$. $[x]$ betegner her heltalsdelen af et reelt tal x .
- 6) (ikke helt let) Vis at hvis $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ er målelig m.h.t. til $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$, hvor

$\mathcal{E}$ er σ -algebraen på $\mathbf{R}$ defineret i øvelse 1 på side 4, så er f på formen

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$$

hvor a_i 'erne er forskellige reelle tal, A_i 'erne parvis disjunkte elementer i $\mathcal{E}$, hvor $(A_i)_{i \geq 1}$ alle er tællelige og $A_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Vis endvidere at enhver funktion $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ er målelig m.h.t. til $(\mathcal{B}(\mathbf{R}), \mathcal{E})$.

Aflæsningsopgave: Vis **Faktoriseringsætningen**, d.v.s. øvelse 8 side 21. Vink. Man kan benytte standardbeviset.

Øvrige meddelelser: For enhver ikke tom mængde E kaldes mængden bestående af alle delmængder af E , d.v.s. $\{A \mid A \subseteq E\}$, *potensmængden* over E . Dette skyldes, at i mængdelæren nærmere bestemt i teorien om kardinaltal betegner notationen 2 en mængde med præcis to elementer, lad os sige 0 og 1 , d.v.s. $2 = \{0, 1\}$. 2^E kan derfor opfattes som mængden af funktioner fra $E \rightarrow \{0, 1\}$. Men relationen

$$2^E \ni f \mapsto A_f = \{e \in E \mid f(e) = 0\} \subseteq E$$

definerer tydeligvis en bijektion mellem 2^E og $\{A \mid A \subseteq E\}$, hvorfor notationen forekommer vel valgt.

Svend Erik Graversen.

SS2, TØ nr. 3

$(E, \mathcal{E})$ er et måleligt rum

1)

Exc. 1.77

$A \in \mathcal{E}$

Påstand: $1_A \in M(\mathcal{E}) \iff A \in \mathcal{E}$

Beris:

$\implies$

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}): 1_A^{-1}(B) \in \mathcal{E} \implies 1_A^{-1}(\{1\}) = A \in \mathcal{E}$$

$\Leftarrow$

$A \in \mathcal{E}$, vi skal vise, at $\forall x \in \mathbb{R}: \{1_A \leq x\} \in \mathcal{E}$

$$\forall x < 0: \{1_A \leq x\} = \emptyset \in \mathcal{E}$$

$$\forall 0 \leq x < 1: \{1_A \leq x\} = A^c \in \mathcal{E}$$

$$\forall x \geq 1: \{1_A \leq x\} = E \in \mathcal{E}$$

□

2)

Antag $\mathcal{E} = \{\emptyset, E\}$

Påstand: $M(\mathcal{E}) = \mathbb{R}$

Beris:

$\supseteq$ er klar

$\subseteq$:

Lad $f \in M(\mathcal{E})$ være vilkårlig vælg $\omega_1, \omega_2 \in E: f(\omega_1) = a_1$

$\wedge f(\omega_2) = a_2$. Antag modstridvis, at $a_1 < a_2$

$\{f \leq a_1\}, \{f \leq a_2\} \in \mathcal{E}$, men $\omega_2 \in \{f \leq a_2\} \setminus \{f \leq a_1\}$ og

$\omega_1 \in \{f \leq a_1\} \neq \emptyset$, dvs. $\exists A_1 \in \mathcal{E}: \emptyset \subset A_1 \subset E$

$\leadsto$

3)

Påstand: $S(E) = \{f \in M(E) \mid \#f(E) < \infty\}$

Bevis:

$\leq$ klar (en $S(E)$ -fkt. bestående af n led har højst 2^n værdier)

$\geq$:

Lad $f \in H.S.$ og lad $\{a_1, \dots, a_n\} = f(E)$

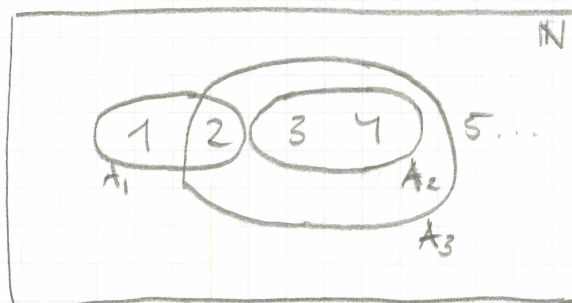
Da gælder $\forall x \in E: f(x) = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\{f=a_i\}}(x) \in S(E)$

□

Af ovenstående følger $\forall f \in S(E) \exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} A_1, \dots, A_n$ p.d.
i $E: f = \sum a_i 1_{A_i}$, idet vi i beviset har $\{f=a_i\} \cap \{f=a_j\} = \emptyset$

4)

$N = \{0, 1, \dots, n, \dots\}$



Den tilhørende partition er $\{1\} = A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c$, $\{2\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3^c$, $\{3, 4\} = A_1^c \cap A_2 \cap A_3$, $\{5, \dots\} = A_1^c \cap A_2^c \cap A_3$

$\{3, 4\} = A_2$, $\{5, \dots\} = A_1^c \cap A_2^c \cap A_3$

$\emptyset = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c = A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c = A_1^c \cap A_2^c \cap A_3$

$\# \sigma(A_1, A_2, A_3) = 2^4 = 16$

5)

Påstand:

$$\exists (A_n)_{n \geq 1} \subseteq E : E = \sigma((A_n)_{n \geq 1}) \iff \exists f \in M(E) : E = \sigma(f)$$

Beris:

$\Leftarrow$:

$$\forall q \in \mathbb{Q} : \{f \leq q\} \in E$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists (q_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{Q} : q_n \downarrow x \implies \{f \leq x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f \leq q_n\}$$

$$\text{Dvs. } E = \sigma(f) = \sigma(\{f \leq x\}_{x \in \mathbb{R}}) = \sigma(\{f \leq q\}_{q \in \mathbb{Q}})$$

$\Rightarrow$:

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n} \cdot 1_{A_n}$$

f er målelig⁽⁺⁾ da den er grænseværdien af en voksende følge af simple funktioner, dvs. $\sigma(f) \subseteq E$

Vi skal vise at $\forall n \geq 1 : A_n \in \sigma(f)$

Lad $n \geq 1$ være vilkårlig

$$\begin{aligned} A_n &= \{\omega \in E \mid f(\omega) \text{ har et } 1\text{-tal på } n\text{te decimal}\} \\ &= \{\omega \in E \mid \lfloor 10^n \cdot f \rfloor \text{ ulige}\} \end{aligned}$$

Da f er målelig er $10^n \cdot f$ målelig

Definer $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \lfloor x \rfloor$, da er g målelig, thi $g^{-1}(-\infty, x] = (-\infty, \lfloor x \rfloor + 1) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}$, da sammensætningen af målelige funktioner er målelig (MZ s. 17) dvs.

$\lfloor 10^n \cdot f \rfloor$ er målelig og dermed gælder

$$A_n = \{\lfloor 10^n \cdot f \rfloor \text{ ulige}\} \in E$$

□

6)

$\mathcal{E} := \{A \mid A \text{ tællelig} \vee A^c \text{ tællelig}\}$ Vi ved, at $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ måleligt

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f \in (\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ målelig

Påstand: $\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}, (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j \quad i, j \geq 1$

$$A_0^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n : \quad f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 1_{A_n}$$

Beweis:

Betragt $M = \{x \mid \{f \leq x\} \text{ tællelig}\}$

Antag modstridsvis at M er tom, så gælder $(f \in M(\mathcal{E}))$

$\forall x \in \mathbb{R}: \{f > x\} \text{ tællelig} \Rightarrow \mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f > -n\} \text{ tællelig} \quad \text{v}$

Antag modstridsvis M opad ubegrænset: $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f \leq n\} \text{ tællelig} \quad \text{v}$

Dvs. $\sup M$ er et reelt tal, idet M er et interval
($\{f \leq x\} \subseteq \{f \leq y\} \quad x \leq y$)

Sæt $x^* = \sup M$.

Da $f \in M(\mathcal{E})$ gælder p.v. def. af M og $x^* \quad \forall n \geq 1 \quad \{f > x^* + 1/n\} \text{ tællelig}$

$\Rightarrow \{f > x^*\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f > x^* + 1/n\} \text{ tællelig}$

Deruden har vi $\{f < x^*\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f \leq x^* - 1/n\} \text{ tællelig}$

Da $\mathbb{R}$ er overtællelig må gælde at $\{f = x^*\}$ er overtællelig

Sæt $a_0 = x^*$ og vælg (a_n) : $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{f > x^*\} \cup \{f < x^*\}$

$A_0 = \{f = x^*\} \quad A_n = \{f = a_n\}, n \geq 1$, da gælder
det ønskede.

□

SS2, afleveringsopgave nr. 3, Gunnar Hellmund

Lad $g: E \rightarrow F$ ($F, \mathcal{F}$) måleligt rum og antag $E = \sigma(g)$

Påstand: $M(E) = \{\varphi \circ g \mid \varphi \in M(F)\}$

Beris:

$\supseteq$: konsekvens af M2 s. 14

$\subseteq$:

$V := H.S.$

Lad $1_A \in M(E) \iff A \in E = \sigma(g)$, dvs. $\exists B \in \mathcal{F}: g^{-1}(B) = A$

Men da gælder, at $1_A = 1_B \circ g$ og $1_A \in V$.

Dvs. V indeholder alle indikatorfunktioner

Lad $f, h \in V$, dvs. $\exists \varphi_f, \varphi_h \in M(F): f = \varphi_f \circ g, h = \varphi_h \circ g$

$\Rightarrow f+h = \varphi_f \circ g + \varphi_h \circ g = (\varphi_f + \varphi_h) \circ g$ og da $\varphi_f + \varphi_h \in M(F)$

jf. Lemma 4 s. 16 må gælde, at $f+h \in V$

Lad $a \in \mathbb{R}$, $f \in V$ være vilkårlig, dvs. $\exists \varphi \in M(F): f = \varphi \circ g$

men $af = a \cdot (\varphi \circ g) = (a\varphi) \circ g$ og $a\varphi \in M(F)$ jf. Lemma 4 s. 16

dvs. $af \in V$

Altså er V et vektorrum.

Lad $(f_n) \subseteq V$, $\forall n \geq 1: f_n \leq f_{n+1}$ og $\{\sup_n f_n < \infty\} = E$

Dvs. $\exists (\varphi_n) \subseteq M(F): f_n = \varphi_n \circ g$; men der må gælde at

$\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$, $n \geq 1$, samt at $\sup_n f_n = \sup_n (\varphi_n \circ g) = (\sup_n \varphi_n) \circ g$

Sæt $\psi_n = \varphi_n \cdot 1_{g(E)}$, da gælder $f_n = \psi_n \circ g$, $\psi_n \leq \psi_{n+1}$

og $\sup_n f_n = (\sup_n \psi_n) \circ g$ samt $\{\sup_n \psi_n < \infty\} = F$

Af korollaret s. 18 følger at $\sup_n \psi_n \in M(F)$, dvs.

$\sup_n f_n \in V$. Jvf. Standardberismetoden s. 20 er vi færdige

□
1/1

Sandsynlighedsteori 2

Uge 37.

Forelæsninger: Borel σ -algebraer og Målelige funktioner, d.v.s. sektionerne 1.8, 1.9, 1.10 og 1.43 samt 1.38, 1.39, 1.40, 1.41, 1.42, 1.43, 1.45, 1.46 og 1.48.

Øvelser: 1) Lad $(E, \mathcal{E})$ betegne et måleligt rum og lad f og g betegne elementer i $M(\mathcal{E})$, d.v.s. f og g er målelige reelle funktioner defineret på E . Vis at $\{f \neq g\}$ og $\{f \leq g\} \in \mathcal{E}$. Vink: Opskriv de to mængder ved hjælp af vektorfunktionen (f, g) .

2) Lad $(E_i, \mathcal{E}_i)$ for $i = 1, 2$ betegne målelige rum. Vis at for alle $A \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ og $e_1 \in E_1$ er

$$A(e_1) := \{e_2 \in E_2 \mid (e_1, e_2) \in A\} \in \mathcal{E}_2.$$

$A(e_1)$ kaldes e_1 -sektionen af A (tegn).

Vink. Definer $\mathcal{D}(e_1) := \{A \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \mid A(e_1) \in \mathcal{E}_2\}$. Vis at $\mathcal{D}(e_1)$ er en σ -algebra, og at den indeholder alle frembringere for produkt σ -algebraen.

3) Lad S betegne en ikke-tøm mægte og d_1 og d_2 to metrikker på S . Antag at d_1 og d_2 er ækvivalente, d.v.s.

$$x_n \rightarrow x \text{ i } d_1\text{-metrikken} \Leftrightarrow x_n \rightarrow x \text{ i } d_2\text{-metrikken}.$$

Vis at enhver d_1 -kugle indeholder en d_2 -kugle med samme centrum og tilsvarende omvendt. Vink: Argumenter f.eks. modsætningsvis.

Slut heraf at en mængde $U \subseteq S$ er d_1 -åben, hvis og kun hvis den er d_2 -åben, samt at S er d_1 -separabel, hvis og kun hvis S er d_2 -separabel.

4) Lad (S, d) betegne et metrisk rum. Vis at d_1 og d_2 definerer metrikker på S , som er ækvivalente med d , hvor

$$d_1(x, y) = d(x, y) \wedge 1 \quad \text{og} \quad d_2(x, y) = d(x, y)/(1 + d(x, y)).$$

Vink: Udnyt at enhver ikke-negativ konkav funktion φ på $\mathbf{R}_+$ er subadditiv, d.v.s.

$$\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y) \quad x, y \in \mathbf{R}_+.$$

5) Betragt σ -algebraen $\mathcal{E}$ i øvelsen på side 4. Vis at $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{R})$, men at $\mathcal{E}$ ikke er tællelig frembragt, d.v.s. ikke på formen $\sigma((A_i)_{i \geq 1})$.

Vink: Antag at $\mathcal{E} = \sigma((A_i)_{i \geq 1})$. Overvej at det kan antages, at A_i er tællelig for alle i . Vis dernæst, at for alle $A \in \sigma((A_i)_{i \geq 1})$ gælder

$$B \subseteq A \quad \text{eller} \quad B \cap A = \emptyset \quad \text{hvor} \quad B = \mathbf{R} \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Overvej at dette strider mod antagelsen $\mathcal{E} = \sigma((A_i)_{i \geq 1})$. Udnyt at $\mathbf{R}$ er o-vertællelig.

Afleveringsopgave: Lad (S, d) betegne et metrisk rum. En funktion $f : S \rightarrow \mathbf{R}$ siges at være kontinuert, hvis den opfylder en af flg. tre ækvivalente udsagn

$$\forall x \in S, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \text{hvis} \quad d(x, y) < \delta, \quad (1)$$

$$\forall x \in S, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : b(x, \delta) \subseteq f^{-1}(b(f(x), \epsilon)) \quad (2)$$

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x) \quad \text{for vilkårlige elementer} \quad (x_n)_{n \geq 1}, x \text{ i } S. \quad (3)$$

1) Vis at $x \mapsto d(x, x_0)$ er kontinuert for ethvert $x_0 \in S$ og mere generelt $x \mapsto d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y)$ for enhver delmængde $A \subseteq S$.

Vink. Vis og udnyt at trekantsuligheden ækvivalent kan skrives som

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z) \quad \text{for alle } x, y, z \in S.$$

2) Vis at $(x, y) \mapsto d(x, y)$ er kontinuert fra $S^2 \rightarrow \mathbf{R}$, hvis S^2 udstyres med en produktmetrik, d.v.s. en metrik hvori konvergens svarer til konvergens af koordinaterne. Jævnfør noterne øverst side 11.

3) Vis at $A = \{x \mid d(x, A) = 0\}$, hvis og kun hvis A er lukket.

Øvrige meddelelser: Ingen

Svend Erik Graversen.

1)

 $(E, \mathcal{E})$ måleligt rum, $f, g \in M(E)$ Påstand: $\{f \neq g\}, \{f \leq g\} \in \mathcal{E}$

Bevis:

Juf. $M(E) \cong (f, g) \in (E, B(\mathbb{R}) \otimes B(\mathbb{R}))$ -målelig *Idet $B(\mathbb{R}) \otimes B(\mathbb{R}) = B(\mathbb{R}^2)$ og $\{(x, y) \mid x \neq y\}$ er åben i $\mathbb{R}^2$ og $\{(x, y) \mid x \leq y\}$ er lukket i $\mathbb{R}^2$ følger påstanden af *.

□

2)

 $(E_1, \mathcal{E}_1), (E_2, \mathcal{E}_2)$ målelige rum $A \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2, e_1 \in E_1$: $A(e_1) := \{e_2 \in E_2 \mid (e_1, e_2) \in A\}$ Påstand: $A(e_1) \in \mathcal{E}_2$

Bevis

Definer $D(e_1) := \{A \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \mid A(e_1) \in \mathcal{E}_2\}$ Det er klart $\forall M_1 \in \mathcal{E}_1, M_2 \in \mathcal{E}_2$: $M_1 \times M_2(e_1) = M_2, e_1 \in M_1$; $M_1 \times M_2(e_1) = \emptyset, e_1 \notin M_1$ Da $M_2, \emptyset \in \mathcal{E}_2$ (og $M_1 \times M_2 \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ pr. def.) ser vi, at $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \subseteq \sigma(D(e_1))$, da $D(e_1) \subseteq \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ er påstanden vist, hvis $D(e_1)$ er en σ -algebra (dvs $\sigma(D(e_1)) = D(e_1)$) $E_1 \times E_2 \in D(e_1)$ Antag $A \in D(e_1)$ $A^c(e_1) := \{e_2 \in E_2 \mid (e_1, e_2) \in A^c\}$

$$= \{e_2 \in E_2 \mid (e_1, e_2) \in A\}^c = A(e_1)^c \in \mathcal{E}_2$$

Dvs. $D(e_1)$ er (c) -stabil

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(e_1)$ det restere at vise, at $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}(e_1)$

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)(e_1) = \{e_2 \in E_2 \mid (e_1, e_2) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n(e_1) \in E_2$$

□

3)

S (ikke tom mængde.)

d_1, d_2 to metrikker på S , der er ækvivalente ($x_n \xrightarrow{d_1} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{d_2} x$)

Lad $x \in S$, $r > 0$ være vilkårlige

Påstand: $\exists r_2 > 0 : b_{d_2}(x, r_2) \subseteq b_{d_1}(x, r_1)$

Beweis:

Antag modstridswis, at $\forall r_2 > 0 : b_{d_2}(x, r_2) \cap (b_{d_1}(x, r_1))^c \neq \emptyset$

$\forall n \in \mathbb{N}$ vælg $x_n \in b_{d_2}(x, 1/n) \cap (b_{d_1}(x, r_1))^c$

Pr. def. har vi $|x - x_n| \leq 1/n$, dvs. $x_n \xrightarrow{d_2} x$

$\Rightarrow x_n \xrightarrow{d_1} x$, men $|x - x_n| \geq r_1$ $\nwarrow$

Fuldstændig tilsvarende gælder $\forall x \in S, r_2 > 0 \exists r_1 > 0 : b_{d_1}(x, r_1) \subseteq b_{d_2}(x, r_2)$

Lad $U \subseteq S$

Påstand: U d_1 -åben $\Leftrightarrow U$ d_2 -åben

Beweis:

Vi vil nøjes med at vise $\Rightarrow$ ($\Leftarrow$ vices tilsvarende)

U d_1 -åben $\Rightarrow \forall x \in U \exists r_x > 0 : b_{d_1}(x, r_x) \subseteq U$

$\Rightarrow \forall x \in U \exists r_{x_2} > 0 : b_{d_2}(x, r_{x_2}) \subseteq b_{d_1}(x, r_x) \subseteq U \Rightarrow U$ d_2 -åben

jf.
anvendte
resultat

□

S siges at være separabel mht. metrikken d , hvis (S.9)

$$\exists (x_n)_{n \geq 1} \subseteq S \quad \forall x \in S, r > 0 \exists i \geq 1 : x_i \in B(x, r)$$

$\Uparrow$

$$\exists (x_n)_{n \geq 1} \subseteq S \quad \forall x \in S \exists (x_{n_k}) \subseteq (x_n) : x_{n_k} \rightarrow x$$

Sidstnævnte karakterisation giver

(S, d_1) separabelt $\Leftrightarrow (S, d_2)$ separabelt.

4)

(S, d) metrisk rum

$$d_1, d_2 : S \times S \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad (x, y) \in S \times S :$$

$$d_1(x, y) = d(x, y) \wedge 1, \quad d_2(x, y) = d(x, y) / (1 + d(x, y))$$

Påstand: d, d_1, d_2 er ækvivalente metrikker på S

Beweis

$$\text{Lad } (x_n) \subseteq S, x \in S : x_n \xrightarrow{d} x \Leftrightarrow d(x, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Dvs. } \exists N \geq 1 \forall n \geq N \quad d(x, x_n) < 1 \Rightarrow d(x, x_n) = d_1(x, x_n) \quad n \geq N$$

$$\Rightarrow d_1(x, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow x_n \xrightarrow{d_1} x$$

$$\text{Omvendt hvis } x_n \xrightarrow{d_1} x \quad \exists N \geq 1 \forall n \geq N \quad d_1(x, x_n) < 1$$

$$\Rightarrow d_1(x, x_n) = d(x, x_n) \quad n \geq N \Rightarrow d(x, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow x_n \xrightarrow{d} x$$

d og d_1 er altså ækvivalente.

$$\text{Antag } x_n \xrightarrow{d} x \quad \text{da} \quad d_2(x, x_n) = \frac{d(x, x_n)}{1 + d(x, x_n)} \leq d(x, x_n)$$

$$\text{må} \quad x_n \xrightarrow{d_2} x$$

$$\text{Antag } x_n \xrightarrow{d_2} x, \text{ dvs. } \exists N \geq 1 \forall n \geq N : d_2(x, x_n) \leq 1/2$$

$$\text{Da } d_2(x, x_n) = \frac{d(x, x_n)}{1 + d(x, x_n)} \Rightarrow d(x, x_n) = \frac{d_2(x, x_n)}{1 - d_2(x, x_n)} \quad \text{ser vi}$$

$$\forall n \geq N : d(x, x_n) \leq 2d_2(x, x_n) \Rightarrow x_n \xrightarrow{d} x$$

d, d_2 er altså ækvivalente

□

5)

$$\mathcal{E} := \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ el. } A^c \text{ tællelig}\}$$

I opg. 2 $\S 1$ (sætn 1 s. 4) viste vi, at $\mathcal{E}$ er en σ -alg.
samt at $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{G})$, $\mathcal{G} = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$

Påstand: $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Beris: $\mathcal{G}$ består af lukkede mængder $\Rightarrow \mathcal{E} = \sigma(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\square$

Påstand: $\mathcal{E}$ er ikke tællelig frembragt

Beris:

Antag modstridende, at $\exists (A_n) \in \mathcal{E} : \sigma(A_n) = \mathcal{E}$

$\forall n \geq 1$: Hvis A_n er tællelig gør vi intet, hvis A_n ikke er tællelig erstattes A_n med A_n^c (som er tællelig)

Det er klart (under antagelsen) at vi stadig har $\sigma(A_n) = \mathcal{E}$
($A_n' = A_n$ el. $A_n' = A_n^c$)

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n'$ er tællelig, dvs. $\exists (x_n) \in \mathbb{R} : \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$

Sæt $A_0 = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n' = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$

Definer $\mathcal{H} := \{\bigcup_{i \in I} B_i \mid B_0 = A_0, n \geq 1: B_n = \{x_n\}\}$

$\mathbb{R} \in \mathcal{H}$ og da $(\bigcup_{i \in I} B_i)^c = \bigcap_{i \in I} B_i^c$ og

$(H_n) \subseteq \mathcal{H} \exists I_n \subseteq \mathbb{N}_0 : H_n = \bigcup_{i \in I_n} B_i \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = \bigcup_{i \in \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n} B_i$

er $\mathcal{H}$ en σ -algebra

Det er klart, at $\sigma(A_n) \subseteq \mathcal{H} \stackrel{(*)}{=} \sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{E}$, hvor

(*) skyldes at $\forall x \in \mathbb{R} : x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n' \Rightarrow \{x\} \notin \mathcal{H}$ $\rightsquigarrow$

SS2, afleveringsopgave nr. 2, Gunnar Hellmund

(S, d) betegner et metrisk rum

$f: S \rightarrow \mathbb{R}$ siges at være kontinuert, hvis et af flg. tre ækvivalente udsagn er opfyldt:

$$\forall x \in S, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: d(x, y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon \quad (1)$$

$$\forall x \in S, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: b(x, \delta) \subseteq f^{-1}(b(f(x), \epsilon)) \quad (2)$$

$$\forall (x_n) \subseteq S: x_n \xrightarrow{d} x \implies f(x_n) \rightarrow f(x) \quad (3)$$

1)

Definer $d_{x_0}: S \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto d(x, x_0)$ ($x_0 \in S$)

Påstand: d_{x_0} er kontinuert

Basis:

Lad $(x_n) \subseteq S$, $x_n \xrightarrow{d} x$ være vilk.

$$d(x, x_0) \leq d(x, x_n) + d(x_n, x_0) \implies d(x, x_0) - d(x_n, x_0) \leq d(x, x_n) \quad (+)$$

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x) + d(x, x_0) \implies d(x_n, x_0) - d(x, x_0) \leq d(x, x_n)$$

$$(+)\implies |d(x, x_0) - d(x_n, x_0)| \leq d(x, x_n) \quad (*)$$

$$(*)\implies d_{x_0}(x_n) \rightarrow d_{x_0}(x) \text{ og } d_{x_0} \text{ er dermed kont. jf (3)}$$

□

Lad $A \subseteq S$ og definier $d_A: S \rightarrow \mathbb{R}_+$ $x \mapsto \inf_{y \in A} d(x, y)$

Påstand: d_A er kontinuert

Beweis:

Lad $(x_n) \subseteq S$ $x_n \xrightarrow{d} x$ være vilkårlig

Vi skal vise, at $d_A(x_n) \rightarrow d_A(x)$ eller ækvivalent

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1 \forall n \geq N: d_A(x) - \varepsilon < d_A(x_n) < d_A(x) + \varepsilon$$

Lad $\varepsilon > 0$ være vilkårlig

$$\exists x_0 \in A: d(x_n, x_0) < d_A(x_n) + \varepsilon/2$$

$$\exists N_0 \geq 1 \forall n \geq N_0: d(x, x_0) - \varepsilon/2 < d(x_n, x_0) \Rightarrow d(x, x_0) < d(x_n, x_0) + \varepsilon/2 \\ \Rightarrow d_A(x) - \varepsilon \leq d(x, x_0) - \varepsilon < d(x_n, x_0) - \varepsilon/2 < d_A(x_n)$$

$$\exists x_1 \in A: d(x, x_1) < d_A(x) + \varepsilon/2$$

$$\exists N_1 \geq 1 \forall n \geq N_1: d(x_n, x_1) < d(x, x_1) + \varepsilon/2 \Rightarrow d_A(x_n) \leq d(x_n, x_1) < d(x, x_1) + \varepsilon/2 < d_A(x) + \varepsilon$$

$$\text{Dvs. } \exists N \geq 1 \forall n \geq N: d_A(x) - \varepsilon < d_A(x_n) < d_A(x) + \varepsilon$$

□

2)

Definier $d_S: S^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ $(x, y) \mapsto d(x, y)$

Påstand: d_S er kontinuert (mht. en produktmetrik på S^2 mht. d)

Beweis:

Lad $(x_n, y_n) \subseteq S^2$ $(x_n, y_n) \xrightarrow{d_{S^2}} (x, y)$ være vilkårlig

Dvs. $d(x, x_n), d(y, y_n) \xrightarrow{d} 0$ og vi skal vise, at

$|d(x, y) - d(x_n, y_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, dette følger da

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y) \text{ og}$$

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$$

$$\Rightarrow |d(x, y) - d(x_n, y_n)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y)$$

□ 2/3

3)

Påstand: $A = \{x \mid d(x, A) = 0\} \iff A$ er lukket

Bewis:

$\implies$:

Lad $(x_n) \subseteq A$, $x_n \rightarrow x$ være vilkårlig

Vi skal vise at $x \in A$, men juf. 1) har vi, at

$$d(x_n, A) \rightarrow d(x, A), \quad d(x_n, A) = 0 \implies d(x, A)$$

$$\implies x \in A$$

$\impliedby$:

Lad $x \in \{x \mid d(x, A) = 0\}$, dvs. $d(x, A) = 0$

Juf. def. på $d(\cdot, A)$ gælder $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in A : d(x, x_n) \leq d(x, A) + 1/n$

Dvs. $(x_n) \subseteq A$ og $x_n \rightarrow x \implies x \in A$, da A er lukket, dvs.

$$A = \{x \mid d(x, A) = 0\}$$

$\subseteq$:

Antag modstridsvis at $x \in A$ og $d(x, A) > 0$

da gælder $\forall y \in A : d(x, y) \geq d(x, A) > 0 \implies x \neq y, \forall y \in A$

□

Sandsynlighedsteori 2

Uge 36.

Forelæsninger: *Målelige rum*, d.v.s. sektionerne 1.1, 1.2, 1.5, 1.6, 1.11, 1.12 og 1.43.

Øvelser: 1) Exc. 1.1 og 1.2.

2) Øvelse 1 på side 4. Vis endvidere at $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{G})$, hvor $\mathcal{G} := \{\{x\} \mid x \in \mathbf{R}\}$.

3) Vis, f.eks. ved hjælp af identiteterne øverst side 5, at $\sigma(\mathcal{G}_1)$ og $\sigma(\mathcal{G}_2)$ er identiske σ -algebraer på $\mathbf{R}$, hvor

$$\mathcal{G}_1 = \{[a, b[\mid -\infty < a < b < \infty\} \quad \text{og} \quad \mathcal{G}_2 = \{[a, b] \mid -\infty < a < b < \infty\}.$$

4) Lad $(A_i)_{i \geq 1} \subseteq 2^E$ være givet. Definer

$$\mathcal{F}_n := \sigma(A_1, \dots, A_n) \quad n \geq 1 \quad \text{og} \quad \mathcal{A} := \bigcup_n \mathcal{F}_n.$$

Vis at $\mathcal{A}$ er en algebra indeholdende højst tællelig mange elementer.

Flg. eksempel viser, at $\sigma((A_i)_{i \geq 1})$ og $\mathcal{A}$ kan være forskellige. Sæt $E = \mathbf{N}$ og $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$ for $n \geq 1$. Da $A_1 = \{1\}$ og $A_n \setminus A_{n-1} = \{n\}$ for $n \geq 2$, er $\sigma((A_i)_{i \geq 1}) = 2^{\mathbf{N}}$, d.v.s. alle delmængder af $\mathbf{N}$. Ethvert element i $\mathcal{A}$ er derimod af formen B_n eller $B_n \cup [n+1, \infty[$ for et $n \geq 1$, hvor $B_n \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, og mængden af alle lige tal er derfor f.eks. ikke element i $\mathcal{A}$.

5) Appendiks P1, P2 og P3 (skulle være bekendte, men er meget vigtige.)

Afleveringsopgave: Eftervis (P.2.4).

Øvrige meddelelser: Kursets timeplan er ifølge studielederen ændret til Forelæsninger. Tirsdag 8-10 Aud. D3 og Torsdag 9-11 Aud. D2.

Øvelser. Mandag 13-16 Koll. D. Instruktør. Rune Eliassen.

Svend Erik Graversen.

1)

Exc. 1.1

P.2.1

Påstand: $(\bigcup_{j \in J} A_j)^c = \bigcap_{j \in J} A_j^c$

Bevis:

$$\begin{aligned} (\bigcup_{j \in J} A_j)^c &= \{\omega \in \Omega \mid \neg (\exists j \in J: \omega \in A_j)\} = \{\omega \in \Omega \mid \forall j \in J: \omega \notin A_j\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid \forall j \in J: \omega \in A_j^c\} = \bigcap_{j \in J} A_j^c \quad \square \end{aligned}$$

Påstand: $(\bigcap_{j \in J} A_j)^c = \bigcup_{j \in J} A_j^c$

Bevis:

Af ovenstående følger $\bigcup_{j \in J} A_j^c = ((\bigcap_{j \in J} A_j)^c)^c = (\bigcap_{j \in J} (A_j^c)^c)^c = (\bigcap_{j \in J} A_j)^c \quad \square$

P.2.2

$$\begin{aligned} (A \setminus B)^c &= \{\omega \in \Omega \mid \neg (\omega \in A \wedge \omega \notin B)\} = \{\omega \in \Omega \mid \neg (\omega \in A \wedge \neg (\omega \in B))\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid \neg (\omega \in A) \vee \neg (\neg (\omega \in B))\} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A \vee \omega \in B\} \\ &= A^c \cup B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A \Delta B)^c &= \{\omega \in \Omega \mid \neg ((\omega \in A \vee \omega \in B) \wedge (\neg (\omega \in A \wedge \omega \in B)))\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid \neg (\omega \in A \vee \omega \in B) \vee (\omega \in A \wedge \omega \in B)\} \\ &= (A \cup B)^c \cup (A \cap B) \end{aligned}$$

P. 2.3

$$(A^c)^c = \{\omega \in \Omega \mid \neg (\neg (\omega \in A))\} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A\} = A$$

$$\Omega^c = \{\omega \in \Omega \mid \neg (\omega \in \Omega)\} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin \Omega\} = \emptyset$$

$$\emptyset^c = \{\omega \in \Omega \mid \neg (\omega \notin \Omega)\} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in \Omega\} = \Omega$$

P. 2.4

$$(\limsup A_n)^c = \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=j}^{\infty} A_n \right)^c \stackrel{\text{P.2.1}}{=} \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=j}^{\infty} A_n \right)^c \stackrel{\text{P.2.1}}{=} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=j}^{\infty} A_n^c = \liminf A_n^c$$

$$(\limsup A_n^c)^c = \liminf A_n \Rightarrow \limsup A_n^c = (\liminf A_n)^c$$

Exc. 1.2

P.2.5

$$\begin{aligned} B \cap \left(\bigcup_{j \in J} A_j \right) &= \{ \omega \in \Omega \mid \omega \in B \wedge (\exists j \in J : \omega \in A_j) \} \\ &= \{ \omega \in \Omega \mid \exists j \in J : \omega \in B \wedge \omega \in A_j \} \\ &= \{ \omega \in \Omega \mid \exists j \in J : \omega \in A_j \cap B \} = \bigcup_{j \in J} (B \cap A_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \cap \left(\bigcap_{j \in J} A_j \right) &= \{ \omega \in \Omega \mid \omega \in B \wedge (\forall j \in J : \omega \in A_j) \} \\ &= \{ \omega \in \Omega \mid \forall j \in J : \omega \in B \wedge \omega \in A_j \} \\ &= \{ \omega \in \Omega \mid \forall j \in J : \omega \in B \cap A_j \} = \bigcap_{j \in J} (B \cap A_j) \end{aligned}$$

P.2.6

$$\begin{aligned} B \cup \left(\bigcup_{j \in J} A_j \right) &= \{ \omega \in \Omega \mid \omega \in B \vee (\exists j \in J : \omega \in A_j) \} \\ &= \{ \omega \in \Omega \mid \exists j \in J : \omega \in B \vee \omega \in A_j \} \\ &= \{ \omega \in \Omega \mid \exists j \in J : \omega \in B \cup A_j \} = \bigcup_{j \in J} (B \cup A_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \cup \left(\bigcap_{j \in J} A_j \right) &= \{ \omega \in \Omega \mid \omega \in B \vee (\forall j \in J : \omega \in A_j) \} \\ &= \{ \omega \in \Omega \mid \forall j \in J : \omega \in B \vee \omega \in A_j \} \\ &= \{ \omega \in \Omega \mid \forall j \in J : \omega \in B \cup A_j \} = \bigcap_{j \in J} (B \cup A_j) \end{aligned}$$

P.2.7

$$B \cap A^c = \{ \omega \in \Omega \mid \omega \in B \wedge \omega \notin A \} =: B \setminus A$$

$$\begin{aligned}
B \cap (C \Delta D) &= \{w \in \mathcal{R} \mid w \in B \wedge ((w \in C \vee w \in D) \wedge \neg (w \in C \wedge w \in D))\} \\
&= \{w \in \mathcal{R} \mid (w \in B \wedge (w \in C \vee w \in D)) \wedge \neg (w \in C \wedge w \in D)\} \\
&= \{w \in \mathcal{R} \mid ((w \in B \wedge w \in C) \vee (w \in B \wedge w \in D)) \wedge (w \notin C \vee w \notin D)\} \\
&= \{w \in \mathcal{R} \mid (w \in B \cap C \vee w \in B \cap D) \wedge (w \notin C \vee w \notin D)\} \\
&= \{w \in \mathcal{R} \mid (w \in B \cap C \wedge w \notin D) \vee (w \in B \cap D \wedge w \notin C)\} \\
&= \{w \in \mathcal{R} \mid (w \in B \cap C \wedge w \notin B \cap D) \vee (w \in B \cap D \wedge w \notin B \cap C)\} \\
&= \{w \in \mathcal{R} \mid (w \in B \cap C \vee w \in B \cap D) \wedge (w \notin B \cap C \vee w \notin B \cap D)\} \\
&= \{w \in \mathcal{R} \mid (w \in B \cap C \vee w \in B \cap D) \wedge \neg (w \in B \cap C \wedge w \in B \cap D)\} \\
&= (B \cap C) \Delta (B \cap D)
\end{aligned}$$

P.2.8

$$B \cup A^c = ((B \cup A^c)^c)^c \underset{\text{P.2.1}}{=} (B^c \cap A)^c \underset{\text{P.2.7}}{=} (A \setminus B)^c$$

$$\begin{aligned}
B \cap (C \setminus D) &\underset{\text{P.2.7}}{=} B \cap C \cap D^c = (B \cap C) \cap (D^c \cup B^c) \underset{\text{P.2.1}}{=} (B \cap C) \cap (B \cap D)^c \\
&= (B \cap C) \setminus (B \cap D)
\end{aligned}$$

P.2.9

$$\begin{aligned}
B \cap \limsup A_n &= B \cap \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=j}^{\infty} A_n \right) \underset{\text{P.2.5}}{=} \bigcap_{j=1}^{\infty} (B \cap \bigcup_{n=j}^{\infty} A_n) \underset{\text{P.2.5}}{=} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=j}^{\infty} (B \cap A_n) \\
&= \limsup (B \cap A_n)
\end{aligned}$$

P.2.10

$$\begin{aligned}
B \cap \liminf A_n &= B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=j}^{\infty} A_n \right) \underset{\text{P.2.5}}{=} \bigcup_{j=1}^{\infty} (B \cap \bigcap_{n=j}^{\infty} A_n) \underset{\text{P.2.5}}{=} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=j}^{\infty} (B \cap A_n) = \liminf (B \cap A_n)
\end{aligned}$$

P.2.11

$$B \cup \limsup A_n = B \cup \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=j}^{\infty} A_n \right) \stackrel{P.2.6}{=} \bigcap_{j=1}^{\infty} (B \cup \bigcup_{n=j}^{\infty} A_n) \stackrel{P.2.6}{=} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=j}^{\infty} (B \cup A_n) = \limsup (B \cup A_n)$$

P.2.12

$$B \cup \liminf A_n = B \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=j}^{\infty} A_n \right) \stackrel{P.2.6}{=} \bigcup_{j=1}^{\infty} (B \cup \bigcap_{n=j}^{\infty} A_n) \stackrel{P.2.6}{=} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=j}^{\infty} (B \cup A_n) = \liminf (B \cup A_n)$$

P.2.13

Påstand:

$$J^I := \{\sigma \mid \sigma: I \rightarrow J\}$$

$$\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{ij} = \bigcup_{\sigma \in J^I} \bigcap_{i \in I} A_{i\sigma(i)}$$

Beris:

$$\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{ij} = \{w \in \mathcal{U} \mid \forall i \in I \exists j \in J: w \in A_{ij}\}$$

$$\bigcup_{\sigma \in J^I} \bigcap_{i \in I} A_{i\sigma(i)} = \{w \in \mathcal{U} \mid \exists \sigma: I \rightarrow J \forall i \in I: w \in A_{i\sigma(i)}\}$$

$\subseteq$:

Antag $w \in \mathcal{U}$: $\forall i \in I \exists j \in J: w \in A_{ij}$

Dus, $\forall i \in I$ kan vi vælge et $j \in J$ således $w \in A_{ij}$

- dette definerer klart en fkt. $\sigma: I \rightarrow J$: $w \in A_{i\sigma(i)}$

$\supseteq$:

Antag $w \in \mathcal{U}$: $\exists \sigma: I \rightarrow J \forall i \in I: w \in A_{i\sigma(i)}$

Dus, $\forall i \in I \exists j \in J: w \in A_{ij}$

□

Påstand: $\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{ij} = \bigcap_{\sigma \in J^I} \left(\bigcup_{i \in I} A_{i\sigma(i)} \right)$

Beris:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{ij} &= \left(\left(\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{ij} \right)^c \right)^c \stackrel{P.2.1}{=} \left(\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{ij}^c \right)^c = \left(\bigcup_{\sigma \in J^I} \bigcap_{i \in I} A_{i\sigma(i)}^c \right)^c \\ &\stackrel{P.2.1}{=} \bigcap_{\sigma \in J^I} \bigcup_{i \in I} A_{i\sigma(i)} \end{aligned}$$

□

P.2.14

Påstand: $\bigcap_{j \in J} \prod_{i \in I} A_{ij} = \prod_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J} A_{ij} \right)$

Beris:

Lad $w \in \prod_{i \in I} \Omega_i$, dit i 'te komponent ($i \in I$) betegnes w_i

$$\begin{aligned} \bigcap_{j \in J} \prod_{i \in I} A_{ij} &= \{ w \in \prod_{i \in I} \Omega_i \mid \forall j \in J \forall i \in I: w_i \in A_{ij} \} \\ &= \{ w \in \prod_{i \in I} \Omega_i \mid \forall i \in I: w_i \in \bigcap_{j \in J} A_{ij} \} = \prod_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{ij} \end{aligned}$$

□

P.2.15

Påstand: $\prod_{i=1}^n A_i \setminus \prod_{j=1}^n B_j = \bigcup_{j=1}^n \left(\prod_{i=1}^n C_{ij} \right)$, hvor

$$C_{ij} = A_i \cap B_i, i < j; \quad C_{ij} = A_i \setminus B_i, i = j; \quad C_{ij} = A_i, i > j$$

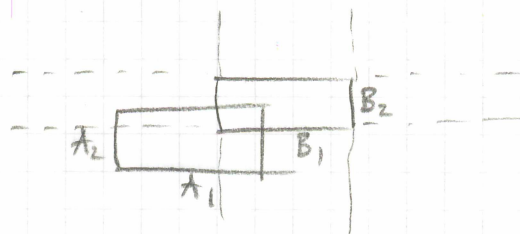
Beris:

Induktion:

$n=1$: ok ✓

Antag at påstanden er korrekt for n , vis at tilfældet $n+1$ er ok.:

illustration (Venn-diagram):



$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 \setminus B_1 \times B_2 &= (A_1 \times A_2 \cap B_1^c \times \Omega_2) \cup (A_1 \times A_2 \cap B_1 \times B_2^c) \\ &= (A_1 \setminus B_1) \times A_2 \cup (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \setminus B_2) \quad (*) \end{aligned}$$

P.2.14

Dette giver:

$$\prod_{i=1}^{n+1} A_i \setminus \prod_{j=1}^{n+1} B_j = \left(\prod_{i=1}^n A_i \right) \times A_{n+1} \setminus \left(\prod_{j=1}^n B_j \right) \times B_{n+1}$$

$$= (*) \left(\left(\prod_{i=1}^n A_i \right) \setminus \left(\prod_{j=1}^n B_j \right) \right) \times A_{n+1} \cup \left(\left(\prod_{i=1}^n A_i \right) \cap \left(\prod_{j=1}^n B_j \right) \right) \times (A_{n+1} \setminus B_{n+1})$$

$$= \bigcup_{j=1}^n \left(\prod_{i=1}^n C_{ij} \right) \times A_{n+1} \cup \left(\prod_{i=1}^n A_i \cap B_i \right) \times (A_{n+1} \setminus B_{n+1})$$

tilfældet n
+ P.2.14

$$= \bigcup_{j=1}^{n+1} \left(\prod_{i=1}^{n+1} C_{ij} \right)$$

□

2)

Øvelse 1

$$E = \mathbb{R}$$

$$E := \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ el. } A^c \text{ tællelig}\}, \quad \mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ el. } A^c \text{ endelig}\}$$

Både E og $\mathcal{A}$ er klart $(\subset)$ -stabile

Lad $A, B \in \mathcal{A}$:

A, B endelige: $A \cup B$ er endelig dvs. $A \cup B \in \mathcal{A}$

A^c endelig el B^c endelig: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ endelig, dvs. $A \cup B \in \mathcal{A}$

Dvs. $\mathcal{A}$ er en algebra, idet $E \in \mathcal{A}$ (da $E^c = \emptyset$ er endelig)

Lad $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq E$

$(A_n)_{n \geq 1}$ tællelige $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ tællelig (tællelig forening af tællelige mængder, tællelig)

$$\text{Dvs. } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in E$$

$\exists m \geq 1: A_m^c$ tællelig $\Rightarrow (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \subseteq A_m^c$, dvs. $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c$ er tællelig

$$\text{Dvs. } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in E$$

Alt i alt kan vi konkludere, at E er en σ -algebra, idet $E \in E$ (da $E^c = \emptyset$ er tællelig).

$$\mathcal{G} := \{ \{x\} \mid x \in \mathbb{R} \}$$

Påstand: $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{E}$

Beris:

$\subseteq$:

Da $\mathcal{E}$ er en σ -algebra, er det nok at vise, at $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}$

Men dette er trivielt opfyldt, da $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$ er tællelig og alle mnd. i $\mathcal{G}$ derfor er tællelige (og dermed elementer i $\mathcal{E}$).

$\supseteq$:

$A \in \mathcal{E}$, dvs. A el. A^c tællelig

A tællelig: $\exists (x_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{R} \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\} \in \sigma(\mathcal{G})$ (da $\sigma(\mathcal{G})$ er en σ -alg.)

A^c tællelig: $A^c \in \sigma(\mathcal{G})$ jf. ovenstående argument $\Rightarrow A \in \sigma(\mathcal{G})$ (da $\sigma(\mathcal{G})$ σ -alg.)

□

3)

$$\mathcal{G}_1 = \{ \]a, b[\mid -\infty < a < b < \infty \} \quad \mathcal{G}_2 := \{ \]a, b] \mid -\infty < a < b < \infty \}$$

Paßand: $\sigma(\mathcal{G}_1) = \sigma(\mathcal{G}_2)$

Beweis:

$$-\infty < a < b < \infty$$

$$\]a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \]a - 1/n, b + 1/n[\Rightarrow \mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{G}_{1\delta} \Rightarrow \sigma(\mathcal{G}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{G}_{1\delta}) = \sigma(\mathcal{G}_1) \quad \uparrow \text{S. 4}$$

$$\exists N \geq 1: \]a, b[= \bigcup_{n=N}^{\infty} \]a + 1/n, b - 1/n] \Rightarrow \mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_{2\sigma}$$

$$\Rightarrow \sigma(\mathcal{G}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{G}_{2\sigma}) = \sigma(\mathcal{G}_2)$$

□

4)

$$(A_i)_{i \geq 1} \subseteq 2^E$$

$$\forall n \geq 1: \mathcal{F}_n := \sigma(A_1, \dots, A_n) ; \quad \mathcal{A} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$$

Påstand: $\mathcal{A}$ er en algebra (højest tællelig)

Beweis:

$\forall n \geq 1: \mathcal{F}_n$ er endelig tællelig $\Rightarrow \mathcal{A}$ er højest tællelig,
da en tællelig foreningsmængde af endeligt tællelige mængder er højest tællelig. (* Jvf Kap. 1.11)

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists N \geq 1: A \in \mathcal{F}_N \quad \forall n \geq N$$

$\mathcal{F}_N$ er en σ -alg., dvs. $A^c, A \cup A^c \in \mathcal{F}_N$

$\mathcal{A}$ er dermed (C)-stabil og indeholder E

$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists M \geq 1: A, B \in \mathcal{F}_M, \quad \forall n \geq M$$

$\mathcal{F}_M$ er en σ -alg., dermed $A \cup B \in \mathcal{F}_M \subseteq \mathcal{A}$.

Dvs. $\mathcal{A}$ er (vf)-stabil.

I ovenstående har vi benyttet, at $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ er en voksende følge af σ -algebraer.

□

Se desuden ugesedlen

SS2, afleveringsopgave nr. 1, Gunnar Hellmund

P.2.4

Påstand: $(\limsup A_n)^c = \liminf A_n^c$

Bewis:

$$(\limsup A_n)^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \right)^c \stackrel{\text{P.2.1}}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m^c = \liminf A_n^c \quad \square$$

Påstand: $(\liminf A_n)^c = \limsup A_n^c$

Bewis:

$$(\liminf A_n)^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \right)^c \stackrel{\text{P.2.1}}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m^c = \limsup A_n^c \quad \square$$