Sierpiński's Stabilitets Lemma (1.6)

$\mathcal{D}, \mathcal{G} \subseteq 2^{\Omega}$ $(\mathcal{D}, \mathcal{G} \neq \emptyset)$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}$

$\mathcal{D}$ er $(\alpha, \beta, \ldots)$ stabil $\alpha, \beta, \ldots$ er mængdeoperationer (forskellig fra C)

$\mathcal{D}_0 :=$ den mindste $(\alpha, \beta, \ldots)$ stabile delmængde indeholdende $\mathcal{G}$

Da gælder:

(1) $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}$, og ...

Antag $\forall G, G' \in \mathcal{G} : G \cap G' \in \mathcal{D}_0$ da gælder

(2) $\mathcal{D}_0$ er $(\cap_f, \alpha, \beta, \ldots)$-stabil

---

Antag, at for hver mængdeoperation γ i $(\alpha, \beta, \ldots)$ optræder γ^c (den komplementære mængdeoperation) i $(\alpha, \beta, \ldots)$, $\forall G \in \mathcal{G} : G^c \in \mathcal{D}_0$, da gælder

(3) $\mathcal{D}_0$ er $(C, \alpha, \beta, \ldots)$-stabil

Specielt gælder at hvis $(\alpha, \beta) = (\cup_c, \cap_c)$ at $\mathcal{D}_0 = \sigma(\mathcal{G})$ og
hvis $(\alpha, \beta) = (\cup_f, \cap_f)$ at $\mathcal{D}_0 = \alpha(\mathcal{G})$.

Under de to ovenstående antagelse gælder

(4) $\mathcal{D}_0$ er $(\cap_f, C, \alpha, \beta, \ldots)$-stabil
og $\alpha(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{D}_0$, specielt gælder hvis $(\alpha, \beta) = (\uparrow, \downarrow) : \mathcal{D}_0 = \sigma(\mathcal{G})$

Bevis:

1)

$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}_0$, pr. def. af $\mathcal{D}_0$

$\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}$ idet $\mathcal{D}_0$ og $\mathcal{D}$ er $(\alpha, \beta, \ldots)$-stabile brolægninger indeholdende $\mathcal{G}$, og pr. def. af $\mathcal{D}_0$ som den mindste (se 1.5.1) brolægning med disse egenskaber $\square$

2)

Antag $\forall G, G' \in \mathcal{G}: G \cap G' \in \mathcal{D}_0$ (*)

Definer $\mathcal{G}_A := \{B \subseteq \mathcal{R} \mid B \cap A \in \mathcal{D}_0\}$, $\forall A \subseteq \mathcal{R}$

Da $\mathcal{D}_0$ er $(\alpha, \beta, \ldots)$-stabil$^{(\dagger)}$ følger, jvf. de 'distributive love' for mængdeoperationer, at $\mathcal{G}_A$ er $(\alpha, \beta, \ldots)$-stabil ...

$\cap$f: $\hat{A}, \tilde{A} \in \mathcal{G}_A$ $\quad (\hat{A} \cap \tilde{A}) \cap A = (\hat{A} \cap A) \cap (\tilde{A} \cap A) \in \mathcal{D}_0$ da $\mathcal{D}_0$ er $\cap$-stabil $\square$

$\cup$f: $\hat{A}, \tilde{A} \in \mathcal{G}_A$ $\quad (\hat{A} \cup \tilde{A}) \cap A = (\hat{A} \cap A) \cup (\tilde{A} \cap A) \in \mathcal{D}_0$ da $\mathcal{D}_0$ er $\cup$-stabil $\square$

$\setminus$: $\hat{A}, \tilde{A} \in \mathcal{G}_A$ $\quad (\hat{A} \setminus \tilde{A}) \cap A = (\hat{A} \cap A) \setminus (\tilde{A} \cap A) \in \mathcal{D}_0$ da $\mathcal{D}_0$ er $\setminus$ stabil $\square$

$-$: $\hat{A}, \tilde{A} \in \mathcal{G}_A, \hat{A} \subseteq \tilde{A}$ $\quad (\tilde{A} - \hat{A}) \cap A = (\tilde{A} \cap A) - (\hat{A} \cap A) \in \mathcal{D}_0$, da $\mathcal{D}_0$ er $-$-stabil $\square$

$\uparrow$: $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{G}_A, A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots, A_n \uparrow \hat{A}$ $\quad (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A) \uparrow \hat{A} \cap A \in \mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_0 \uparrow$-stabil $\square$

$\downarrow$: $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{G}_A, A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots, A_n \downarrow \hat{A}$ $\quad (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \cap A = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A) \downarrow \hat{A} \cap A \in \mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_0 \downarrow$-stabil $\square$

$\cup c$: $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{G}_A$ $\quad (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A) \in \mathcal{D}_0$, da $\mathcal{D}_0$ er $\cup c$-stabil $\square$

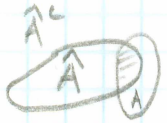
$\cap c$: $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{G}_A$ $\quad (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \cap A = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A) \in \mathcal{D}_0$, da $\mathcal{D}_0$ er $\cap$f-stabil $\square$

Σf: $\hat{A}, \tilde{A} \in \mathcal{G}_A$, $\hat{A} \cap \tilde{A} = \emptyset \Rightarrow (\hat{A} \cap A) \cap (\tilde{A} \cap A) = \emptyset$ $\quad (\hat{A} \cup \tilde{A}) \cap A = (\hat{A} \cap A) \cup (\tilde{A} \cap A) \in \mathcal{D}_0$, da $\mathcal{D}_0$ Σf-stabil

Σc: $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{G}_A$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A) = \emptyset$, $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A) \in \mathcal{D}_0$, da $\mathcal{D}_0$ er Σc-stabil $\square$

C må ikke være i listen $(\alpha, \beta, \ldots)$ da $\mathcal{D}_0$ C-stabil $\not\Rightarrow$ $\mathcal{G}$ C-stabil

Modeks.:



, $\hat{A} \in \mathcal{G}_A$ dvs. $\hat{A} \cap A \in \mathcal{D}_0$, $(\hat{A} \cap A)^c = \hat{A}^c \cup A^c \in \mathcal{D}_0$

† $\alpha, \beta, \ldots$ forskellig fra C

Sæt $G' = A$ i $*$-antagelsen, da er det klart, at $\forall A \in \mathcal{G}$:

$$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_A$$

Vi har desuden lige vist, at $\mathcal{G}_A$ er $(\alpha, \beta, \ldots)$-stabil, af 1.5.1 følger

$$D_0 \subseteq \mathcal{G}_A \,, \quad \forall A \in \mathcal{G}$$

Da $\wedge$ er en kommutativ mængdeoperation ses $A \in \mathcal{G}_B \iff B \in \mathcal{G}_A$

Lad $B \in D_0 \Rightarrow B \in \mathcal{G}_A, \forall A \in \mathcal{G} \Rightarrow A \in \mathcal{G}_B, \forall A \in \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_B$

Dvs. $$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_B \,, \forall B \in D_0$$

$\mathcal{G}_B$ er $(\alpha, \beta, \ldots)$-stabil og derfor følger af (1.5.1), at $D_0 \subseteq \mathcal{G}_B \,, \forall B \in D_0$

Dvs. $A, B \in D_0 : A \cap B \in D_0$, dvs D_0 er $\cap$f-stabil $\square$

3)

Antag at for hver af mængdeoperationerne, γ i $(\alpha, \beta, \ldots)$ optræder γ^c (den komplementære mængdeoperation) i $(\alpha, \beta, \ldots)$ og $\forall G \in \mathcal{G}: G^c \in D_0$ (*)

Definer: $D_1 = \{A \subseteq \Omega \mid A \in D_0 \wedge A^c \in D_0\}$

Da D_0 er $(\alpha, \beta, \ldots)$-stabil følger at D_1 er $(C, \alpha, \beta, \ldots)$-stabil

C-stabiliteten følger af def. på D_1

$\cap$f: $A, \hat{A} \in D_1$, $A \cap \hat{A} \in D_0$, D_0 $\cap$f-stabil $\quad (A \cap \hat{A})^c = A^c \cup \hat{A}^c \in D_0$ D_0 $\cup$f stabil

osv.

Pr. antagelse (*) gælder $\forall G \in \mathcal{G} \subseteq D_0 : G^c \in D_0$ Dvs. $\mathcal{G} \subseteq D_1$

Da D_1 er $(\alpha, \beta, \ldots)$-stabil følger af 1.5.1 at $D_0 \subseteq D_1$

Af def. på D_1 har vi $D_0 \supseteq D_1$, dvs. $D_0 = D_1$

Da D_1 er C-stabil er D_0 C-stabil, vi har altså vist

D_0 er $(C, \alpha, \beta, \ldots)$-stabil

Specielt gælder for $(\alpha, \beta) = (\cup c, \cap c)$ at $D_0 = \sigma(\mathcal{G})$

$(\cap c, C)$-stabilitet $\Rightarrow \Omega \in D_0$, der sammen med $(\cup c, C)$-stabilitet

giver at D_0 er en σ-algebra, da D_0 pr. def. er den

mindste $(\cap c, \cup c, C)$-stabile beregning på Ω indeholdende $\mathcal{G}$,

følger det ønskede.

(tilsvarende argument for $(\alpha, \beta) = (\cup f, \cap f)$-stabilitet af $D_0 \Rightarrow D_0 = \alpha(\mathcal{G})$)

Man kunne frygte D_0 var 'for stor' men dette er ikke tilfældet,

jvf. 1.2.9 og 1.2.10

4)

De første resultater følger direkte af 2) og 3); dvs. at D_0 er $(\cap f, C, \alpha, \beta, \ldots)$-

stabil under antagelse af, at $\forall G, G' \in \mathcal{G} : G^c, G \cap G' \in D_0$ og

at for hver mængdeoperation, γ i $(\alpha, \beta, \ldots)$ er den komplementære

mængdeoperation, γ^c i $(\alpha, \beta, \ldots)$

Idet $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$ ser vi, at $(\cap f, C)$-stabilitet medfører

$\cup f$-stabilitet. Dvs. <u>specielt</u> er D_0 en algebra indeholdende $\mathcal{G}$

Def. af $\alpha(\mathcal{G})$ giver $\alpha(\mathcal{G}) \subseteq D_0$

Lad $(\alpha, \beta) = (\uparrow, \downarrow)$, ovenstående giver at D_0 er $(C, \cap f, \uparrow, \downarrow, \cup f)$-stabil

Lad $\{A_n\}_{n \geq 1} \subseteq D_0$, definér $A^n := A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \in D_0$, da D_0 er $\cup f$-stabil

$A^n \subseteq A^{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ og $A^n \uparrow A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in D_0$ pr. $\uparrow$ stabilitet.

Dvs. D_0 er $(C, \cap f, \cap, \downarrow, \cup f, \cup c)$-stabil og specielt en σ-algebra

indeholdende $\mathcal{G}$. Af 1.2.10 og 1.5.1 følger $\mathcal{D}_0 = \sigma(\mathcal{G})$

□

Den første entydighedssætn. (1.7)

μ_1, μ_2 betegner to mål på σ-algebraen $\mathcal{F}$,

$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ er $(\cap f)$-stabil $(\mathcal{G} \subseteq 2^{\Omega}, \mathcal{G} \neq \emptyset)$

Lad $F_n \in \sigma(\mathcal{G})$, $n \in \mathbb{N}$ være givne mængder, der opfylder

$\forall G \in \mathcal{G} \, \forall n \in \mathbb{N}$: $\mu_1(F_n \cap G) = \mu_2(F_n \cap G)$ og

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\mu_1(F_n) = \mu_2(F_n) < \infty$ samt $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \Omega$

Da gælder $\forall H \in \sigma(\mathcal{G})$: $\mu_1(H) = \mu_2(H)$

Bevis:

Definér $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G} \cap \{\Omega\}$, da $\mathcal{G}$ er $(\cap f)$-stabil ser vi at $\mathcal{G}_0$ er $(\cap f)$-stabil

[$A, B \in \mathcal{G}_0$: $A, B \in \mathcal{G}$: $A \cap B \in \mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_0$ (pr. $(\cap f)$-stabilitet af $\mathcal{G}$ eller

$A \in \mathcal{G}$ og $B = \Omega$ (el. omvendt) $A \cap \Omega = A \in \mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_0$ eller

$A, B = \Omega$ og $\Omega \cap \Omega = \Omega \in \mathcal{G}_0$]

Definér desuden

$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{F} \mid \mu_1(A \cap F_n) = \mu_2(A \cap F_n), \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Lad $\{A_n\}_{n=1} \subseteq \mathcal{D}$: $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Vi vil vise, at $\mathcal{D}$ er $(\sum c)$-stabil; med ovenstående notation og pr. def af $\mathcal{D}$ skal vi vise, at $\mu_1((\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap F_n) = \mu_2((\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap F_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(da $\mathcal{F}$ er en σ-algebra og μ_1, μ_2 mål på $\mathcal{F}$ giver ovenstående udtryk mening)

Lad $n \in \mathbb{N}$ være givet

$$\mu_1\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap F_n\right) = \mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap F_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n \cap F_n)$$

($i \neq j : \emptyset = A_i \cap A_j \supseteq (A_i \cap F_n) \cap (A_j \cap F_n)$, + def. på mål (*))

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n \cap F_n) \underset{(*)}{=} \mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap F_n)\right) = \mu_2\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap F_n\right)$$

Desuden vil vi vise, at $\mathcal{D}$ er $(-)$-stabil. Dvs vi skal vise

$A, B \in \mathcal{D}$, $A \subseteq B$: $\mu_1((B \setminus A) \cap F_n) = \mu_2((B \setminus A) \cap F_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Lad $n \in \mathbb{N}$ være givet

$$\mu_1((B \setminus A) \cap F_n) = \mu_1((B \cap F_n) \setminus (A \cap F_n)) = \mu_1(B \cap F_n) - \mu_1(A \cap F_n)$$

($\mu_1(B \cap F_n) \leq \mu_1(F_n) < \infty$ pr. antagelse osv. (1.3.2) + 1.3.3 (†))

$$= \mu_2(B \cap F_n) - \mu_2(A \cap F_n) \underset{(\dagger)}{=} \mu_2((B \cap F_n) \setminus (A \cap F_n)) = \mu_2((B \setminus A) \cap F_n)$$

$A, B \in \mathcal{D}$

Alt i alt har vi altså vist, at $\mathcal{D}$ er $(\Sigma c, -)$-stabil.

Da $\forall E \in \mathcal{G}_0, n \in \mathbb{N}$: $\mu_1(F_n \cap G) = \mu_2(F_n \cap G)$ ser vi desuden $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{D}$ (antagelsen

Lad $\mathcal{D}_0$ betegne den mindste $(\Sigma c, -)$-stable brolægning (på Ω) indeholdende $\mathcal{G}_0$. Da gælder jvf. Sierpinskys stabilitets lemma (16.1) (idet $\mathcal{G}_0$ er $(\cap f)$-stabil og indeholdt i $\mathcal{D}_0$), at $\mathcal{D}_0$ er $(\cap f, \Sigma c, -)$-stabil

Da $(\cap f, -)$-stabilitet $\Leftrightarrow$ $(\setminus)$-stabilitet (1.2.4) og $(\setminus, \Sigma c)$-stabilitet $\Rightarrow$ (uc)-stabilitet (1.2.6) ses, at $\mathcal{D}_0$ er $(\cap f, \Sigma c, -, \setminus, uc)$-stabil

Endvidere har vi $\Omega \in \mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{D}_0$, dette medfører (pga. $(\setminus)$-stabilitet) at $\mathcal{D}_0$ yderligere er (C)-stabil. Af def. på σ-algebra ser vi således at $\mathcal{D}_0$ er en σ-algebra indeholdende $\mathcal{G}_0 \supseteq \mathcal{G}$ og dermed (pr. def. af $\sigma(\mathcal{G})$) at (jvf. 1.5.1) $\sigma(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{D}_0$

Af definitionen på $\mathcal{D}_0$ følger at $\forall H \in \sigma(\mathcal{G}), n \in \mathbb{N}$:

$$\mu_1(H \cap F_n) = \mu_2(H \cap F_n)$$

Lad $H \in \sigma(\mathcal{G})$ være givet, da $\{F_n\}_{n\geq 1} \subseteq \sigma(\mathcal{G})$, pr. def. fås

$$\mu_1(H) = \mu_1(H \cap \Omega) \underset{\text{pr. antagelse}}{=} \mu_1\left(H \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)\right) \underset{@}{=} \mu_1\left(H \cap \left(\left[\bigcup_{n=2}^{\infty}\left(F_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} F_i\right)\right] \cup F_1\right)\right)$$

$$= \mu_1\left((H \cap F_1) \cup \left[\bigcup_{n=2}^{\infty}\left(\left(F_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} F_i\right) \cap H\right)\right]\right)$$

$$= \mu_1(H \cap F_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu_1\left(\left(F_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} F_i\right) \cap H\right)$$

pr. def. af mål

$$= \mu_1(H \cap F_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu_1\left(F_n \cap \left(H \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} F_i\right)\right)$$

$$= \mu_2(H \cap F_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu_2\left(F_n \cap \left(H \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} F_i\right)\right) = \quad = \mu_2(H)$$

Da $H \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} F_i \in \sigma(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{D}$ (jf. 1.2.10)
+ def. af $\mathcal{D}$

□

@ Idet $\sigma(\mathcal{G})$ jo jf. 1.2.10 er stabil under alle mængdeoperationer

Borel σ-algebraen (1.8)

Lad (Ω, d) betegne et pseudo-metrisk rum

$\mathcal{F} :=$ mængden af alle lukkede delmængder af Ω
$\mathcal{G} :=$ mængden af alle åbne delmængder af Ω

Udfra def. af lukkede/åbne mængder ser vi da (Ω, d) er et pseudo-metrisk rum at $\mathcal{F}$ er $(\cap c, \cup f)$-stabil og $\mathcal{G}$ er $(\cup c, \cap f)$ stabil (bmk $(\cap c, \cup f)^c = (\cup c, \cap f)$)

Da komplementit til en lukket delmængde er åben og omvendt ser vi

$$F \in \mathcal{F} \iff F^c \in \mathcal{G} \quad \text{og} \quad G \in \mathcal{G} \iff G^c \in \mathcal{F}$$

Dette giver, idet en brokegn. er en σ-algebra hviss den er $(\cup c, c)$-stabil, at $\mathcal{G} \subseteq \sigma(\mathcal{F})$, $\mathcal{F} \subseteq \sigma(\mathcal{G})$ hvoraf der af 1.5.1 følger, at $\sigma(\mathcal{G}) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$ og $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{G})$ og dermed at $\sigma(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{F})$

Vi definerer nu Borel σ-algebraen (mht. (Ω, d))

$$\mathcal{B}(\Omega) := \sigma(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{F})$$

Dvs. Borel σ-algebraen er den mindste σ-algebra indeholdende alle åbne/lukkede delmængder af Ω (med pseudo-metrikken d).
En delmængde af $\mathcal{B}(\Omega)$ kaldes en Borel mængde og siges at være Borel målelig.
(Et indhold/mål på $\mathcal{B}(\Omega)$ kaldes et Borel indhold/mål på Ω)

Generering af Borel σ-algebraen (1.9)

(Ω, d) betegner et separabelt metrisk rum
Dvs $\exists D \subseteq \Omega$, D højst tællelig : $\forall \omega \in \Omega, r \in \mathbb{R}_+ \exists \omega^* \in D : d(\omega, \omega^*) < r$

Antag $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{B}(\Omega)$ betegner en overdækning på Ω, således at
$\forall \omega \in \Omega, n \in \mathbb{N} \; \exists H \in \sigma(\mathcal{H}) : b(\omega, r_{n+1}) \subseteq H \subseteq b(\omega, r_n)$, hvor
$\{r_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{R}_+$, $r_n \downarrow 0$, $n \to \infty$

Da gælder

$$\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\Omega)$$

Bevis:

Da $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{B}(\Omega)$ og $\mathcal{B}(\Omega)$ er en σ-algebra fås pr. def. af $\sigma(\mathcal{H})$, at $\sigma(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{B}(\Omega)$. Idet $\mathcal{B}(\Omega) :=$ mindste σ-algebra indeholdende alle åbne delmængder af Ω, skal vi derfor vise at en vilkårlig åben delmængde af Ω er indeholdt i $\sigma(\mathcal{H})$, idet vi i givet fald har $\mathcal{B}(\Omega) \subseteq \sigma(\mathcal{H})$ og dermed alt i alt $\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\Omega)$

Lad $G \subseteq \Omega$ betegne en vilkårlig åben delmængde af Ω.

Vi nummererer elementerne i $G \cap D$:

$$G \cap D := \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_j, \ldots\}$$

Da G er åben, $\forall j \geq 1 : \omega_j \in G$ og $r_n \downarrow 0$, $n \to \infty$ er

$\sigma(j) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid b(\omega_j, r_n) \subseteq G\}$ veldefineret for alle $j \geq 1$.

Af antagelsen følger

$$\forall j \geq 1 \; \exists H_j \in \sigma(\mathcal{H}): \quad b(\omega_j, r_{\sigma(j)+1}) \subseteq H_j \subseteq b(\omega_j, r_{\sigma(j)}) \qquad (\dagger)$$

Da $\sigma(\mathcal{H})$ pr. def. er (uc)-stabil følger, at $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i \in \sigma(\mathcal{H})$
Hvis $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$ er vi derfor færdige

Lad $\omega \in G$ være givet

G er åben, dvs $\exists r \in \mathbb{R}_+ : b(\omega, r) \subseteq G$ og da $r_n \downarrow 0, n \to \infty$
$\exists p \in \mathbb{N} : r_{p+1} + r_p \leq r$

(Ω, d) var separabelt og dermed $\exists j \geq 1 : d(\omega, \omega_j) < r_{p+1} \leq r$

For $\omega^{**} \in b(\omega_j, r_p)$ fås af trekantuligheden følgende vurdering

$$d(\omega, \omega^{**}) \leq d(\omega, \omega_j) + d(\omega_j, \omega^{**}) < r_{p+1} + r_p \leq r$$

Dvs $b(\omega_j, r_p) \subseteq b(\omega, r) \subseteq G$, af def. på $\sigma(j)$ følger, at $r_p \leq r_{\sigma(j)}$
og dermed, at $\omega \in b(\omega_j, r_p) \subseteq b(\omega_j, r_{\sigma(j)+1}) \subseteq H_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$, dvs.

$$G \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$$

At $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i \subseteq G$ følger trivielt af def. på $r(j)$ og $(\dagger)$.

□

Borel σ-algebraen på $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}^k$ (1.10)

(mht. den sædvanlige Euklidiske metrik på $\mathbb{R}, \mathbb{R}^k$)

$\mathbb{R}$:

$\mathcal{F}_1 := \{]-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R} \}$ $\quad$ $\mathcal{F}_2 := \{]-\infty, a[\mid a \in \mathbb{R} \}$

$\mathcal{F}_3 := \{ [a, \infty[\mid a \in \mathbb{R} \}$ $\quad$ $\mathcal{F}_4 := \{]a, \infty[\mid a \in \mathbb{R} \}$

$\mathcal{F}_5 := \{ [a, b] \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ $\quad$ $\mathcal{F}_6 := \{ [a, b[\mid a, b \in \mathbb{R} \}$

$\mathcal{F}_7 := \{]a, b] \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ $\quad$ $\mathcal{F}_8 := \{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{R} \}$

$\mathbb{Q}$ er tællelig og tæt i $\mathbb{R}$ $\quad$ ($\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq cl(\mathbb{Q})$)

Dvs. $\mathbb{R}$ er separabelt

(Dedekind konstruktion af $\mathbb{R}$ på $\mathbb{Q}$ ↑ Fuldstændighedsprincippet)

Af 1.2.10 og 1.9 følger derfor, at

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{F}_1) = \ldots = \sigma(\mathcal{F}_8)$$

Men vi har dog benyttet appendix 2 – se dette for en mere 'korrekt' konstruktion/bevisførelse.

(Da enhver åben delmængde af $\mathbb{R}$ kan skrives som tællelig forening af åbne kugler/intervaller, dermed fås $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{F}_8)$; $\sigma(\mathcal{F}_8) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ trivielt)

Endelige σ-algebra (1.11)

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \subseteq \Omega$

$\gamma := \{1,2,3,\dots,n\}$, $\Gamma := 2^\gamma$

$N(\omega) := \{ j \in \gamma \mid \omega \in A_j \}$, $\omega \in \Omega$ $\quad (N: \Omega \to \Gamma)$

$$A_\delta := \{\omega \in \Omega \mid N(\omega) = \delta\} = \bigcap_{j\in\delta} A_j \cap \bigcap_{j\notin\delta} A_j^c \quad , \delta \subseteq \gamma$$

$$A_\Delta := \{\omega \in \Omega \mid N(\omega) \in \Delta\} = \bigcup_{\delta\in\Delta} A_\delta \quad , \Delta \subseteq \Gamma$$

Da $\sigma\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ jvf. 1.2.10 er $(\cap_c, C, \cup_c)$-stabil følger at $\forall \Delta \subseteq \Gamma: A_\Delta \in \sigma\{A_1, \dots, A_n\}$

Dvs. $\{A_\Delta \mid \Delta \subseteq \Gamma\} \subseteq \sigma\{A_1, \dots, A_n\}$

Det er klart, at $\exists \Delta_1, \dots, \Delta_n \subseteq \Gamma: A_{\Delta_1} = A_1, \dots, A_{\Delta_n} = A_n$

Da vi desuden har at $\forall \Delta_i, (\Delta_n)_{n\geq 1} \subseteq \Gamma$ har, at $A_{\Delta_i}, A_{\bigcup_{n=1} \Delta_n} \in \{A_\Delta \mid \Delta \subseteq \Gamma\}$ (dvs $\{A_\Delta \mid \Delta \subseteq \Gamma\}$ er $(\cap, \cup)$-stabil) følger af 1.5.1 at $\sigma\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \{A_\Delta \mid \Delta \subseteq \Gamma\}$

Alt i alt gælder dermed

$$\sigma\{A_1, \dots, A_n\} = \{A_\Delta \mid \Delta \subseteq \Gamma\}$$

Da Γ består af 2^γ delmængder af $\{A_1, \dots, A_n\}$ ser vi, at $\sigma\{A_1, \dots, A_n\}$ består af $2^\Gamma = 2^{2^\gamma}$ delmængder af $2^{\{A_1, \dots, A_n\}}$.

σ-algebraen genereret af pkt.mængder (1.12)

Ω betegner en mængde

$S := \{ \{\omega\} \mid \omega \in \Omega \}$

Udfra ideen der præsenteres i 1.18, er det 'klart', at en sådan konstruktion af $\sigma(S)$ medfører (+ 1.2.10), at

$$\sigma(S) = \{ A \subseteq \Omega \mid A \text{ el. } A^c \text{ er en tællelig mængde} \}$$

(se Exc. 1.15, uge 40, TØ nr. 4)

Vi kan definere målet $P(A) = \begin{cases} 0 & A \text{ tællelig} \\ 1 & A \text{ overtællelig} \end{cases}$ på $\sigma(S)$. $(*_1)$

Den diskrete / Kronecker metrikken på Ω defineres:

$$\delta(\omega_1;\omega_2) = \begin{cases} 0 & , \omega_1 = \omega_2 \\ 1 & , \omega_1 \neq \omega_2 \end{cases} \qquad (*_2)$$

Vi ser, at $b(\omega, r) = \omega$, $r \in [0,1]$ $\quad b(\omega,r) = \Omega$, $r \in]1,\infty)$
(når vi ser på åbne kugle i det metriske rum (Ω, δ))
Denne egenskab ved (Ω,δ) medfører at alle delmængde af Ω er åbne.
Af def. på $\mathcal{B}(\Omega)$ har vi altså, at $\mathcal{B}(\Omega) = 2^\Omega$

Er Ω overtællelig (f.eks. et åbent interval på den reelle akse), findes der en delmængde A af Ω, således at både A, A^c er overtællelig (del et åbent interval på den reelle akse)
Dvs $\mathcal{B}(\Omega) \supseteq \sigma(S) \wedge \mathcal{B}(\Omega) \not\subseteq \sigma(S)$ for en sådan mængde, når vi altså benytter den diskrete metrik som afstandsbegreb. (Husk jo $\mathcal{B}(\Omega) = 2^\Omega$)
Dette er et godt eksempel til at vise forståelse for 1.9 ((Ω,δ)-ikke separabelt)

$*_1$ opfylder 1.1.5

$*_2$ opfylder P 5.1-3

'The Counting Measure' (1.13)

Jvf. 1.1.5 fås, at

$$\#(A) = \begin{cases} \text{antal elementer i } A & , A \text{ endelig} \\ \infty & , A \text{ ikke-endelig} \end{cases}, \text{ er et mål på } 2^{\Omega}$$

$$\Delta(A) = \begin{cases} 0 & , A \text{ endelig} \\ 1 & , A \text{ ikke-endelig} \end{cases}, \text{ er et indhold på } 2^{\Omega} \text{ hvis } \Omega \text{ vilk. stor}$$
— mål — , — Ω endelig

Mål på $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ (1.14)

Lad $\{p_n\}_{n\geq 1}$ betegne en følge af ikke-negative reelle tal. $(n \in \mathbb{N})$

Definér $\mu(A) = \sum_{n \in A} p_n$, $A \subseteq \mathbb{N}$ (*)

Udfra 1.1.5 er det klart, at μ er et (evt. ikke endeligt) mål på $\mathbb{N}$

Det er også klart, at hvis $\mu(\{n\}) = p_n$ og μ er et mål, da er $\mu(A)$ givet ved (*).

(bm. $\Delta(A)$ er et indhold på $2^{\mathbb{N}}$, dv ikke er et mål)

bm. på s. 17 påstås, at det ikke er muligt at konstruere et endeligt indhold på $2^{\mathbb{N}}$, dv ikke er et mål; men at sådanne indhold eksisterer jf. udvalgsaksiomet.

Dirac-målet (1.15)

Ω en mængde $c \in \Omega$

$$\delta_c(A) := \begin{cases} 0 & , c \notin A \\ 1 & , c \in A \end{cases}, \quad A \subseteq \Omega$$

Det er klart, at δ_c opfylder 1.1.5 og derfor er et mål på 2^{Ω}.

Konstruktion af algebra (1.16)

$\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ $(\mathcal{F} \neq \emptyset)$

Definér $\mathcal{F}_1 := \mathcal{F} \cup \{\Omega, \emptyset\}$, $\forall n \in \mathbb{N}: \mathcal{F}_{n+1} := \{A \cup B^c \mid A, B \in \mathcal{F}_n\}$

Påstand: $\alpha(\mathcal{F}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$

Bevis: se Exc. 1.11 US uge nr. 39 (TØ nr. 3)

Definér $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F} \cup \{\emptyset, \Omega\} \cup \{F^c \mid F \in \mathcal{F}\}$

Påstand: $A \in \alpha(\mathcal{F}) \iff \exists F_{ij} \in \mathcal{F}_0 : A = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} F_{ij}$

(el.) $\alpha(\mathcal{F}) = \{\bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} A_{ij} \mid n, m \in \mathbb{N}, A_{ij} \in \mathcal{F}\}$

Bevis: se Exc. 1.12 US uge nr. 39 (TØ nr. 3)

Nulmængder og næsten sikre egenskaber (1.19)

Lad $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ betegne en σ-algebra, μ betegner et mål på $\mathcal{F}$

Elementerne i følgende brologn. på Ω betegnes en μ-nulmængde:

$$\mathcal{N}(\mu) := \{N \subseteq \Omega \mid \exists N_0 \in \mathcal{F} : N \subseteq N_0 \wedge \mu(N_0) = 0\}$$

Det er klart, at enhver delmængde af en μ-nul mængde er en μ-nul mængde.

Da et mål på $\mathcal{F}$ specielt er en mængdefunktion, gælder at $\mu(\emptyset) = 0$, dvs. $\emptyset \in \mathcal{N}(\mu)$ (idet $\emptyset \in \mathcal{F}$, da $\mathcal{F}$ er en σ-algebra).

Lad $\{N_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{N}(\mu)$, dvs. $\exists \{N_{0n}\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{F}$ $\forall n \geq 1 : \mu(N_{0n}) = 0 \wedge N_n \subseteq N_{0n}$

Af 1.4.1 følger $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_{0n}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(N_{0n}) = 0$, da $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{0n}$

ser vi derfor, at $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \in \mathcal{N}(\mu)$, dvs $\mathcal{N}(\mu)$ er $(\cup c)$-stabil.

Lad $p(\omega)$ betegne en hypotese omhandlende et element $\omega \in \Omega$.

Hvis $\exists N \in \mathcal{N}(\mu)$: $p(\omega)$ gælder $\forall \omega \in \Omega \setminus N$, da siges $p(\omega)$ at være μ-næsten sikker. (μ-a.s.)

Hvis $\exists N \in \mathcal{N}(\mu)$: $p(\omega)$ gælder $\forall \omega \in F \setminus N$, $F \subseteq \Omega$, da siges $p(\omega)$ at være μ-næsten sikker på F. (μ-a.a., $\omega \in F$)

Lad $A, B \subseteq \Omega$, $f, g, f_1, f_2, \ldots : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$

Der gælder følgende 'betegnelser':

$A \subseteq B$ μ-a.s. hviss $A \setminus B \in \mathcal{N}(\mu)$

$A = B$ μ-a.s. hviss $A \Delta B \in \mathcal{N}(\mu)$

$f \leq g$ μ-a.s. hviss $\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) > g(\omega)\} \in \mathcal{N}(\mu)$

$f = g$ μ-a.s. hviss $\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \neq g(\omega)\} \in \mathcal{N}(\mu)$

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ μ-a.s. hviss $\exists N \in \mathcal{N}(\mu) : f_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\omega)$ $\forall \omega \in \Omega \setminus N$.

$f_n \uparrow f$ μ-a.s. hviss $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ μ-a.s. $\wedge$ $\forall n \in \mathbb{N}: f_n \leq f_{n+1}$ μ-a.s.

Påstand: $F \subseteq G$ μ-a.s. $\Rightarrow \mu(F) \leq \mu(G)$ (1.19.4)

$F = G$ μ-a.s $\Rightarrow \mu(F) = \mu(G)$ (1.19.5)

$\forall n, k \in \mathbb{N}: n \neq k$ $F_n \cap F_k = \varnothing$ μ-a.s. $\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n)$,

under antagelse, at $F, G, F_1, F_2, \ldots \in \mathcal{F}$ ($(\Omega, \mathcal{F})$ (m))

Bevis:

$F \subseteq G$ μ-a.s. dvs. $\exists N \in \mathcal{N}(\mu) : F \setminus G = N$ (*)

Da $(\Omega, \mathcal{F})$ (m) er $\mathcal{F}$ jvf. 1.2.10 $(\cap, \setminus)$-stabil, dvs. $F \setminus G, F \cap G \in \mathcal{F}$

Af 1.3.1 følger $\mu(F) = \mu(F \setminus G) + \mu(F \cap G) \underset{*}{=} \mu(F \cap G) \underset{1.3.2}{\leq} \mu(G)$

$F = G$ μ-a.s. dvs. $\exists N \in \mathcal{N}(\mu) : F \Delta G = N$. Analogt med ovenstående får vi, at $F \setminus G, F \Delta G, G \setminus F, F \cap G \in \mathcal{F}$.

$\mu(F \setminus G) \underset{1.3.2}{\leq} \mu(F \Delta G) = 0$, $\mu(G \setminus F) \underset{1.3.2}{\leq} \mu(F \Delta G) = 0 \Rightarrow \mu(F \setminus G) = \mu(G \setminus F) =$

$\mu(F) \underset{+ 1.3.3}{\overset{1.3.1}{=}} \mu(F \Delta G) + \mu(F \cap G) - \mu(G \setminus F) = \mu(F \cap G)$

$\mu(G) = \mu(F \Delta G) + \mu(F \cap G) - \mu(F \setminus G) = \mu(F \cap G)$

Dvs. $\mu(F) = \mu(G)$

$\forall n,k \in \mathbb{N} : n \neq k \quad F_n \cap F_k = \varnothing$ μ-a.s. dvs. $\exists N \in \mathcal{N}(\mu)$ således $N = F_n \cap F_k$ ($F_n, F_k \in \mathcal{F}$ får vi dermed af 1.3.2, at $\mu(F_n \cap F_k) = 0$)

Af dette følger (jvf. 1.3.2) at alle fællesmængdedannelser afb. over i 0 af μ.

Operationer på mål (1.20)

Påstand:

$(\Omega, \mathcal{F})$ (m) , $A \in \mathcal{F}$ $\mu, \nu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ betegner mål på $\mathcal{F}$

$a, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}_+$

Definér for $F \in \mathcal{F}$...

$$\kappa(F) := \mu(F) + \nu(F)$$
$$\lambda(F) := a \cdot \mu(F)$$
$$\mu_A(F) := \mu(A \cap F)$$
$$\xi(F) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu_n(F)$$

Da er κ, λ, μ_A og ξ mål på $\mathcal{F}$.

Bevis:

Af antagelserne er det klart at κ, λ, μ_A og ξ opfylder 1.1.4.

Vi skal altså vise, at κ, λ, μ_A og ξ opfylder 1.1.5:

Lad $\{F_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{F}$: $\forall n \neq m \in \mathbb{N}: F_n \cap F_m = \emptyset$ være givet.

$$\kappa\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) + \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \underset{\uparrow \text{ } \mu,\nu \text{ mål}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu(F_n)$$

$$\underset{\uparrow \text{ regneregler for konvergens}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) + \nu(F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa(F_n)$$

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) := a \cdot \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \underset{\uparrow \text{ } \mu \text{ mål}}{=} a \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \underset{\uparrow \text{ regneregler for konvergens}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a \cdot \mu(F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(F_n)$$

$$\mu_A\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) := \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)\right) \underset{\uparrow \text{ distributiv lov}}{=} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap F_n)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ F_n \cap F_m = \emptyset \\ \Rightarrow (A \cap F_n) \cap (A \cap F_m) = \emptyset \\ + \mu \text{ mål}}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_A(F_n)$$

$$\xi\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j\right) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu_n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(F_j) \overset{\uparrow}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu_n(F_j)$$

regnereglu for positive rekke-

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \xi(F_j)$$

□

Mængdefunktioner (1.21)

Lad $\mathcal{F}$ betegne en brolægning på Ω, således $\emptyset \in \mathcal{F}$.
Lad $\mu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, hvor $\mu(\emptyset) = 0$ (dvs. μ en mængdefkt. på $\mathcal{F}$)

Der gælder følgende betegnelser (om μ på $\mathcal{F}$)

μ er <u>endelig</u>, hvis $\forall F \in \mathcal{F} : \mu(F) < \infty$

μ er <u>voksende</u>, hvis $\forall F, G \in \mathcal{F}$, $F \subseteq G : \mu(F) \leq \mu(G)$

μ er <u>superadditiv</u>, hvis $\forall F, F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$, $\bigcup_{i=1}^{n} F_i \subseteq F$, $F_i \cap F_j = \emptyset$ $i \neq j$:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(F_i) \leq \mu(F)$$

μ er <u>subadditiv</u>, hvis $\forall F, F_1, \dots F_n \in \mathcal{F}$, $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} F_i : \mu(F) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(F_i)$

μ er <u>σ-subadditiv</u>, hvis $\forall F, F_1, \dots \in \mathcal{F}$, $F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n : \mu(F) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n)$

μ er <u>additiv</u>, hvis μ er superadditiv og subadditiv på $\mathcal{F}$.

μ er <u>σ-additiv</u>, hvis μ er superadditiv og σ-subadditiv på $\mathcal{F}$.

Jvf. def. på indhold (1.1.2-3) ser vi, at μ er et indhold på $\mathcal{F}$ (antag $\mathcal{F}$ algebra) hviss μ er additiv. Tilsvarende ses udfra def. på mål (1.1.4-5) og beviset for 1.3.8, at μ er et mål på $\mathcal{F}$ (antag $\mathcal{F}$ σ-algebra) hviss μ σ-additiv.

Af beviset for 1.3.8. ses, at hvis μ er superadditiv, da holder 1.3.8.

Det er klart, at...

Enhver superadditiv el. subadditiv mængdefunktion er voksende.

Enhver σ-subadditiv mængdefkt. er subadditiv (da $\mu(\emptyset) = 0$).

Lad $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ betegne to brolægninger på Ω, og lad $\mu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $r : \mathcal{G} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ betegne to mængdefunkt.
Antag $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, da siges μ at udvide r, el. μ kaldes en udvidelse af r, hvis $\mu(G) = r(G)$ for alle $G \in \mathcal{G}$.

De μ-målelige mængder (1.22)

Ω betegner en mængde

$\mu : 2^\Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ betegner en mængdefunktion

Et element i følgende bolagn. på Ω kaldes μ-målelig ($\mathcal{M}(\mu)$ ikketom da $\emptyset \in \mathcal{M}(\mu)$)

$$\mathcal{M}(\mu) := \{M \subseteq \Omega \mid \forall A \subseteq \Omega : \mu(A) = \mu(A \cap M) + \mu(A \setminus M)\}$$

Lad $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$, $\emptyset \in \mathcal{F}$. $\mu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ $(\mu(\emptyset) = 0)$

Definer for alle $A \subseteq \Omega$:

Den indre μ-mål $= \mu_*(A) = \sup\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_j) \mid F_1, \ldots \text{disjunkt} \in \mathcal{F}, \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \subseteq A\}$

Det ydre μ-mål $= \mu^*(A) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_j) \mid F_1, F_2, \ldots \in \mathcal{F}, A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j\}$

Lad $\mathcal{G}$ betegne en brolægning på Ω, da siger vi,

at $\mathcal{G}$ approximerer μ på $\mathcal{F}$, hvis

$$\forall F \in \mathcal{F} : \mu(F) \leq \sup\{\mu_*(G) \mid G \in \mathcal{G}, G \subseteq F\}$$

Carathéodory's Sætning (1.23)

$\mu: 2^{\Omega} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ betegner en mængdefunktion (dvs. $\mu(\emptyset)=0$)

Da gælder:

$\mathcal{M}(\mu)$ er en algebra (dvs. $(\cap,\cup^f)$-stabil), μ indhold på $\mathcal{M}(\mu)$

Hvis $\{M_n\}_{n\geq 1}$ betegner en følge af disjunkte μ-målelige mængder, da gælder

$\forall A \subseteq \Omega$:

$$\mu\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} M_j\right)\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A \cap M_j)$$

$$\mu\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j\right)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A \cap M_j) + \lim_{n\to\infty} \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{j=n}^{\infty} M_j\right)\right)$$

Desuden, hvis μ er σ-subadditiv, da er $\mathcal{M}(\mu)$ en σ-algebra, og μ er et mål på $\mathcal{M}(\mu)$.

Hjælpesætning:

Lad $\mu: 2^{\Omega} \to [0,\infty]$ betegne en mængdefunktion (på Ω).

$B \subseteq C \subseteq \Omega$: $C \setminus B \in \mathcal{M}(\mu)$

Da gælder $\forall A \subseteq \Omega$: $\mu(A \cap B) \leq \mu(A \cap C)$

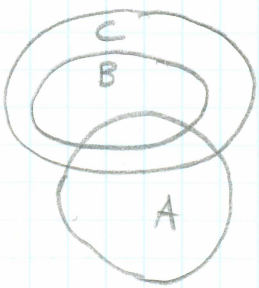
Bevis:

$$\mu(A\cap B) \underset{B\subseteq C}{=} \mu\left((A\cap C) \setminus (C \setminus B)\right)$$

$$\underset{\mu: 2^{\Omega}\to \bar{\mathbb{R}}_+}{\leq} \mu\left((A\cap C)\setminus (C\setminus B)\right) + \mu\left((A\cap C)\cap (C\setminus B)\right)$$

$$\underset{C\setminus B \in \mathcal{M}(\mu)}{=} \mu(A\cap C)$$

□



Bevis for Carathéodory's sætning:

For at vise, at $\mathcal{M}(\mu)$ er en algebra, skal vi vise, at $\mathcal{M}(\mu)$ er $(\complement, \cup f)$-stabil.

Lad $M, N \in \mathcal{M}(\mu)$ og lad $A \subseteq \Omega$ være givet

$$\mu(A) = \mu(A \cap M) + \mu(A \setminus M) = \mu(A \setminus M^c) + \mu(A \cap M^c)$$
$$= \mu(A \cap M^c) + \mu(A \setminus M^c)$$

Dvs. $M^c \in \mathcal{M}(\mu)$ og dermed er $\mathcal{M}(\mu)$ $(\complement)$-stabil

$$\mu(A) = \mu(A \cap M) + \mu(A \setminus M) = \mu(A \cap M) + \mu((A \setminus M) \cap N) + \mu((A \setminus M) \setminus N)$$
$$= \mu((A \cap M \cap M) \cup (A \cap N \cap M)) + \mu((A \cap N) \setminus M) + \mu(A \setminus (M \cup N))$$
$$= \mu(((A \cap M) \cup (A \cap N)) \cap M) + \mu((A \cap (M \cup N)) \setminus M) + \mu(A \setminus (M \cup N))$$
$$= \mu(A \cap (M \cup N) \cap M) + \mu((A \cap (M \cup N)) \setminus M) + \mu(A \setminus (M \cup N))$$
$$= \mu(A \cap (M \cup N)) + \mu(A \setminus (M \cup N))$$

Dvs. $M \cup N \in \mathcal{M}(\mu)$ og dermed er $\mathcal{M}(\mu)$ $(\cup f)$-stabil.

Vi har dermed vist, at $\mathcal{M}(\mu)$ er en algebra.

Lad $\{M_j\}_{j \geq 1} \subseteq \mathcal{M}(\mu)$ betegne en følge af disjunkte mængder (tilhørende $\mathcal{M}(\mu)$)

Definer $M^n := \bigcup_{j=1}^{n} M_j$ $\quad R_n := \bigcup_{j=n}^{\infty} M_j$

Vi har lige vist, at $\mathcal{M}(\mu)$ er en algebra; dette medfører, at $M^{n-1} \in \mathcal{M}(\mu)$

Heraf får vi for et vilk. $A \subseteq \Omega$, at ....

$$\mu(A \cap M^n) = \mu(A \cap M^n \cap M^{n-1}) + \mu((A \cap M^n) \setminus M^{n-1})$$
$$= \mu(A \cap M^{n-1}) + \mu(A \cap (M^n \setminus M^{n-1}))$$
$$= \mu(A \cap M^{n-1}) + \mu(A \cap M_n)$$

Ved successivt at anvende denne 'formel' for $n = 1, 2, \ldots, n$ fås

$$\mu(A \cap (\bigcup_{j=1}^{n} M_j)) = \mu(A \cap M^n) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A \cap M_j) \qquad (*)$$

Sæt $A=\Omega$ i $*$, da fås $\mu(\bigcup_{j=1}^{n} M_j)=\sum_{j=1}^{n}\mu(M_j)$, dvs. μ opfylder 1.1.3
da μ trivielt (jvf antagelserne) opfylder 1.1.2, har vi dermed, at μ er
et indhold på $\mathcal{M}(\mu)$.

Lad $A\subseteq\Omega$ være givet (husk $M^{n-1}\in\mathcal{M}(\mu)$)

$$\begin{aligned}\mu(A\cap R_1)&=\mu(A\cap R_1\cap M^{n-1})+\mu((A\cap R_1)\setminus M^{n-1})\\&=\mu(A\cap M^{n-1})+\mu(A\cap(R_1\setminus M^{n-1}))\\&=\mu(A\cap M^{n-1})+\mu(A\cap R_n)\\&=\mu\left(A\cap\left(\bigcup_{j=1}^{n-1}M_j\right)\right)+\mu\left(A\cap\left(\bigcup_{j=n}^{\infty}M_j\right)\right)\underset{(*)}{=}\sum_{j=1}^{n-1}\mu(A\cap M_j)+\mu\left(A\cap\left(\bigcup_{j=n}^{\infty}M_j\right)\right)\end{aligned}$$

Af ovenstående, og da $R_{n+1}\subseteq R_n$; $R_n\setminus R_{n+1}=M_n\in\mathcal{M}(\mu)$ ifølge
hjælpesætn. giver, at $\forall n\in\mathbb{N}$: $\mu(A\cap R_n)\geq\mu(A\cap R_{n+1})$, fås
jvf. regnereglerne/sætn. om konvergens af positive følger, at

$$\mu\left(A\cap\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}M_j\right)\right)=\mu(A\cap R_1)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A\cap M_j)+\lim_{n\to\infty}\mu\left(A\cap\left(\bigcup_{j=n}^{\infty}M_j\right)\right)\quad(\dagger)$$

Antag, at μ er σ-subadditiv på 2^{Ω}.
Lad $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{M}(\mu)$ betegne en disjunkt følge af mængder.
Lad $A\subseteq\Omega$.

Af $(\dagger)$ følger, at $\mu\left(A\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n\right)\right)\geq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A\cap M_n)$
Da μ er σ-subadditiv på 2^{Ω} har desuden: $\mu\left(A\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A\cap M_n)$
heraf følger, at $\mu\left(A\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A\cap M_n)$. $(@)$

Sæt $A=\Omega$ i $(@)$, da fås $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(M_n)$, dvs μ
opfylder 1.1.5, da μ trivielt opfylder (jvf. antagelserne) 1.1.4, har vi
dermed, at μ er et mål på $\mathcal{M}(\mu)$, (under antagelse, at μ σ-subadditiv)
hvis $\mathcal{M}(\mu)$ er en σ-algebra.

Husk $M^n \in \mathcal{M}(\mu)$, dvs.

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu(A \cap M^n) + \mu(A \setminus M^n) \\ &= \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} M_j\right)\right) + \mu(A \setminus M^n) \\ &\underset{(*)}{=} \sum_{j=1}^{n} \mu(A \cap M_j) + \mu(A \setminus M^n) \\ &\geq \sum_{j=1}^{n} \mu(A \cap M_j) + \mu\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right)\end{aligned}$$

μ σ-subadditiv på 2^Ω; $\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) \subseteq (A \setminus M^n)$

Ved at lade $n \to \infty$ i ovenstående og med brug af @) fås

$$\mu(A) \geq \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right)\right) + \mu\left(A \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right)\right)$$

Da $A = \left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right)\right) \cup \left(A \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right)\right)$ følger, da μ er σ-subadditiv på 2^Ω, at

$$\mu(A) \leq \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right)\right) + \mu\left(A \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right)\right)$$

Alt i alt, at

$$\mu(A) = \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right)\right) + \mu\left(A \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right)\right)$$

Da $A \subseteq \Omega$ var vilkårlig, ser vi, at $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \in \mathcal{M}(\mu)$

Hermed har vi vist, at $\mathcal{M}(\mu)$ er (Σc)-stabil. Tidligere har vi vi vist at $\mathcal{M}(\mu)$ er en algebra (under sagvis antagelser), derfor følger af 1.2.9 og 1.2.6, at $\mathcal{M}(\mu)$ er (C, Uc)-stabil. Dvs. $\mathcal{M}(\mu)$ er en σ-algebra. (under antagelse at μ σ-subadditiv på 2^Ω)

□

Additivitet af indre og ydre mål (1.24)

$\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H} \subseteq 2^{\Omega}$ $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H} \neq \emptyset)$, $\emptyset \in \mathcal{F}$, $\mu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ $(\mu(\emptyset) = 0)$

Der gælder følgende:

μ_* superadditiv på 2^{Ω} og $\forall F \in \mathcal{F} : \mu_*(F) \geq \mu(F)$ (1)

μ superadditiv på $\mathcal{F}$ $\Leftrightarrow$ μ_* udvider μ (2)

μ^* σ-subadditiv på 2^{Ω} og $\forall F \in \mathcal{F} : \mu^*(F) \leq \mu(F)$ (3)

μ σ-subadditiv på $\mathcal{F}$ $\Leftrightarrow$ μ^* udvider μ (4)

Hvis μ superadditiv på $\mathcal{F}$ og $\mathcal{F}$ (Σf)-stabil: (5)

$\forall A \subseteq \Omega : \mu_*(A) = \sup\{\mu(F) \mid F \in \mathcal{F}, F \subseteq A\}$

Hvis μ σ-subadditiv på $\mathcal{F}$ og $\mathcal{F}$ $(\cup c)$-stabil: (6)

$\forall A \subseteq \Omega : \mu^*(A) = \inf\{\mu(F) \mid F \in \mathcal{F}, F \supseteq A\}$

Hvis $\mathcal{G}$ approximerer μ på $\mathcal{F}$ og $\bigcup_{i=1}^{n} G_i$, $G_1, \ldots, G_n$ disjunkt $\in \mathcal{H}$: (7)

$\mathcal{H}$ approximerer μ_* på 2^{Ω}

Bevis:

(1)

Af def. på μ_* følger, at...

$$\forall F \in \mathcal{F}: \ \mu_*(F) \geq \mu(F)$$

μ_* er voksende på 2^{Ω}

$\mu_*(\emptyset) = 0$ (da $\mu(\emptyset)=0$ + alle delmgd af $\emptyset$ er $\emptyset$) - dvs. μ_* mgdfldt.

Vi skal nu vise, at μ_* er superadditiv, dvs.:

$$\forall A_1, \dots, A_n \text{ disjunkte} \subseteq \Omega, \bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq A \subseteq \Omega : \ \mu_*(A) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu_*(A_i) \quad (*)$$

Lad $A_1, \dots, A_n$ disjunkte og $A \subseteq \Omega : \bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq A$ være givet.

Der er to muligheder:

$\mu_*(A) = \infty$, da er (*) trivielt opfyldt

$\mu(A) < \infty$:

Vi kan vise (*) ved at vise: $\forall \varepsilon > 0: \ \mu_*(A) + \varepsilon \geq \sum_{i=1}^{n} \mu_*(A_i)$

(At $\forall \varepsilon > 0: A + \varepsilon \geq B \Rightarrow A \geq B$ vises nemt ved et modstridsbevis)

Lad $\varepsilon > 0$ være givet:

Da μ_* er voksende på 2^{Ω} og da $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq A \Rightarrow A_i \subseteq A$, $i = 1, \dots, n$ gælder $\mu_*(A_i) \leq \mu_*(A) < \infty$, $i = 1, \dots, n$. Af def. på supremum og μ_* følger da

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \ \exists F_j, j = 1, \dots, k(i) \text{ disjunkte} \in \mathcal{F}: \bigcup_{j=1}^{k(i)} F_j \subseteq A_i \ \wedge \ \mu_*(A_i) \leq \varepsilon 2^{-i} + \sum_{j=1}^{k(i)} \mu(F_j) \quad (\dagger)$$

$A_1, \dots, A_n$ disjunkte medfører, at $F_{j(i)}, j = 1, \dots k(i), i = 1, \dots, n$ disjunkte $\in \mathcal{F}$

Desuden gælder $\bigcup_{i,j} F_{j(i)} \subseteq \bigcup_i A_i \subseteq A$, da μ_* er voksende og jvf. def. på μ_* fås

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_*(A_i) \underset{(\dagger)}{\leq} \varepsilon \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} + \sum_{i,j} \mu(F_{j(i)}) \underset{\substack{\mu_* \text{ vobs.} \\ + \text{ def.}}}{\leq} \varepsilon + \mu_*(A)$$

(2) '$\Rightarrow$':

Lad $F \in \mathcal{F}$, antag $F_1, \ldots, F_n$ disjunkte $\in \mathcal{F} : \bigcup_{i=1}^{n} F_i \subseteq F$

Da μ er superadditiv på $\mathcal{F}$ gælder $\sum_{i=1}^{n} \mu(F_i) \leq \mu(F)$, af def. på μ_* (og def. på sup.) følger, at $\mu_*(F) \leq \mu(F)$, definitionen giver også (idet $F \in \mathcal{F}$, $F \subseteq F$) at $\mu(F) \leq \mu_*(F)$, dvs. $\mu(F) = \mu_*(F)$

Vi kan konkludere, at $\forall F \in \mathcal{F} : \mu_*(F) = \mu(F)$ men det vil jo sige, at μ_* udvider μ.

'$\Leftarrow$':

Af (1) følger at $\forall F \in \mathcal{F}, F_1, \ldots, F_n$ disjunkte $\in \mathcal{F} : \bigcup_{i=1}^{n} F_i \subseteq F : \mu_*(\bigcup_{i=1}^{n} F_i) \leq \mu_*(F)$, da μ_* er superadditiv på 2^{Ω} og dermed specielt på $\mathcal{F}$, da vi af antagelsen om, at μ_* udvider μ har $\forall F \in \mathcal{F} : \mu_*(F) = \mu(F)$ gælder specielt, at $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} F_i) \leq \mu(F)$

(3), (4) vises tilsvarende

(5)

Lad $A \subseteq \Omega$ (Vi benytter den 'endelige' udgave af def. på μ_*)

$F_1, \dots, F_n$ disjunkte $\in \mathcal{F}$: $\bigcup_{i=1}^{n} F_i \subseteq A$

Da $\mathcal{F}$ er (Σf)-stabil gælder at $\bigcup_{i=1}^{n} F_i := F_0 \in \mathcal{F}$

Da μ er superadditiv (og da $F_0 \in \mathcal{F}$, $F_0 = \bigcup_{i=1}^{n} F_i \subseteq A$) gælder

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(F_i) \leq \mu(F_0) \leq \sup\{\mu(F) \mid F \in \mathcal{F}, F \subseteq A\} \quad (*)$$

Af def. på μ_* følger, at $\mu_*(A) \leq \sup\{\mu(F) \mid F \in \mathcal{F}, F \subseteq A\}$ (pr. $(*)$)

samt, at $\mu_*(A) \geq \sup\{\mu(F) \mid F \in \mathcal{F}, F \subseteq A\}$, dvs.

$\mu_*(A) = \sup\{\mu(F) \mid F \in \mathcal{F}, F \subseteq A\}$.

(6) vises tilsvarende (For μ^* gælder kun en 'uendelig' udgave af definitionen)

(7)

Vi skal vise, at $\forall A \in 2^{\Omega} : \mu_*(A) \leq \sup\{\mu_*(H) \mid H \in \mathcal{H}, H \subseteq A\}$

Lad $A \subseteq \Omega$

Vælg $a \in \mathbb{R}_+ : a < \mu_*(A)$ (*)

Af def. på μ_* følger $\exists F_1, \ldots, F_n$ disjunkte $\in \mathcal{F} : a < \sum_{i=1}^{n} \mu(F_i)$ og $\bigcup_{i=1}^{n} F_i \subseteq A$

$\mathcal{G}$ approximerer μ på $\mathcal{F}$, dvs. $\forall F \in \mathcal{F} : \mu(F) \leq \sup\{\mu_*(G) \mid G \in \mathcal{G}, G \subseteq F\}$

Specielt har vi, at (jvf. def./egenskab ved supremum (da de i (*) gælder skarp ulighed)) $\exists G_1, \ldots, G_n \in \mathcal{G} : G_1 \subseteq F_1, \ldots, G_n \subseteq F_n$ og $a < \sum_{i=1}^{n} \mu_*(G_i)$. $G_1, \ldots, G_n$ er disjunkte (da $F_1, \ldots, F_n$ disjunkte).

$H_0 := \bigcup_{i=1}^{n} G \in \mathcal{H}$ (da G-ern disjunkte + antagelse)

Sæt $c := \sup\{\mu_*(H) \mid H \in \mathcal{H}, H \subseteq A\}$; $H_0 := \bigcup_{i=1}^{n} G_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} F_i \subseteq A$, dvs. $\mu_*(H_0) \leq c$

Alt i alt har vi (husk (1): μ_* superadditiv på 2^{Ω})

$$a < \mu_*(A) \quad \wedge \quad a < \sum_{i=1}^{n} \mu_*(G_i) \underset{\text{superadditivitet}}{\leq} \mu_*(H_0) \leq c$$

$\Downarrow$ (entydighed af grænseovergang)

$\mu_*(A) \leq c = \sup\{\mu_*(H) \mid H \in \mathcal{H}, H \subseteq A\}$; (ved at se på overgangen $a \uparrow \mu_*(A)$

□

Tæthed (1.25)

$\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ $(\mathcal{F} \neq \emptyset, \emptyset \in \mathcal{F})$ $\mu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ $(\mu(\emptyset) = 0)$

Af def. på μ_*, μ^* følger, at disse er veldefinerede mængdefunktioner på hele 2^{Ω}.

Carathéodory's sætn. giver, at μ_* er et indhold på $\mathcal{M}(\mu_*)$, samt at (da μ^* er σ-subadditiv) μ^* er et mål på $\mathcal{M}(\mu^*)$.
(Indforstået - jvf. def. på indhold/mål - at $\mathcal{M}(\mu_*)$ algebra, $\mathcal{M}(\mu^*)$ σ-algebra)

For at løse 'udvidelsesproblemet' (Hvornår/hvordan kan vi udvide μ til et indhold / et mål) er det interessant at vide (jvf. ovenstående resultat) hvornår $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(\mu_*)$ / $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(\mu^*)$

Med passende definitioner kan vi bevise nogle kraftfulde sætninger:

μ er indre tæt: $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F} : \mu(F_1) = \mu_*(F_1 \cap F_2) + \mu_*(F_1 \setminus F_2)$

μ er ydre tæt: $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F} : \mu(F_1) = \mu^*(F_1 \cap F_2) + \mu^*(F_1 \setminus F_2)$

Kriterier for indre og ydre tæthed (1.26)

$\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ $(\mathcal{F} \neq \emptyset,\ \emptyset \in \mathcal{F})$ $\mu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ $(\mu(\emptyset) = 0)$

Da gælder:

μ er indre tæt $\iff$ μ_* udvider μ og $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(\mu_*)$ (1)

μ er ydre tæt $\iff$ μ^* udvider μ og $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(\mu^*)$ (2)

Hvis μ er superadditiv på $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ er $(\cap f)$-stabil, således at ... (3)
$\forall F, F' \in \mathcal{F},\ F' \supseteq F\ \exists F_1, F_2, \ldots$ disjunkte $\in \mathcal{F} : F' \setminus F \supseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \wedge \mu(F') \leq \mu(F) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_j)$ (
Da er μ indre tæt; specielt er ethvert indhold på en algebra indre tæt.

Hvis μ er σ-subadditiv på $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ er $(\cap f)$-stabil, således at... (4)
$\forall F, F' \in \mathcal{F},\ F' \supseteq F\ \exists F_1, F_2, \ldots \in \mathcal{F} : F' \setminus F \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \wedge \mu(F') \geq \mu(F) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_j)$
Da er μ ydre tæt; specielt er ethvert σ-subadditivt indhold på en algebra ydre tæt.

Bevis:

(1) '$\Longrightarrow$':

Vi har $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F} : \mu(F_1) = \mu_*(F_1 \cap F_2) + \mu_*(F_1 \setminus F_2)$

Lad $F \in \mathcal{F}$ være givet. Sæt $F_1 = F$ og $F_2 = \emptyset$ i ovenstående, da har vi,

at $\mu(F) = \mu_*(F)$, dvs. μ_* udvider μ

Lad $F \in \mathcal{F}$; og lad $A \subseteq \Omega$ være givet

$F_1, \ldots, F_n$ disjunkte $\in \mathcal{F} : \bigcup_{i=1}^{n} F_i \subseteq A$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(F_i) = \sum_{i=1}^{n} (\mu_*(F_i \cap F) + \mu_*(F_i \setminus F)) \underset{\mu_* \text{ superadditiv (1.24)}}{\leq} \mu_*(A \cap F) + \mu_*(A \setminus F) \leq \mu_*(A)$$

(μ indre tæt)

Af def. på μ_* følger, at (sup af alle $\sum_{i=1}^{n} \mu(F_i)$-ene) $\mu_*(A) = \mu_*(A \cap F) + \mu_*(A \setminus F)$

Dette gælder $\forall A \subseteq \Omega$, dvs. (jf. def. på $\mathcal{M}(\mu)$) at $F \in \mathcal{M}(\mu_*)$. Vilk. $\Longrightarrow$ $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(\mu$

'$\subseteq$':

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(\mu_*)$, $\forall F \in \mathcal{F}: \mu(F) = \mu_*(F)$ (*)

$\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}: \mu(F_1) \underset{(*)}{=} \mu_*(F_1) = \mu_*(F_1 \cap F_2) + \mu_*(F_1 \setminus F_2)$, dvs. μ indre tæt.
($\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(\mu)$)

(2) vises tilsvarende.

(3)

Lad $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ være givet

Definer $F := F_1 \cap F_2$, $F' = F_1$, $F \subseteq F'$

Da $\mathcal{F}$ er $(\cap f)$-stabil gælder $F_i F' \in \mathcal{F}_i$ iflg. antagelserne $\exists F_1', F_2' \ldots$ disjunkte $\in \mathcal{F}$:

$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i' \subseteq F' \setminus F$ og (+)

$$\mu(F_1) = \mu(F') \underset{(+)}{\leq} \mu(F) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i') \underset{\substack{\mu \text{ superadditiv} \\ \Rightarrow \mu_* \text{ uvidir } \mu}}{=} \mu_*(F) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_*(F_i')$$

$$\leq \mu_*(F) + \mu_*(F' \setminus F) = \mu_*(F_1 \cap F_2) + \mu_*(F_1 \setminus F_2)$$

(μ_* superadditiv)

$$\leq \mu_*(F_1) \underset{\substack{\mu_* \text{ uvidir } \mu \\ (\text{da } \mu \text{ superadd.})}}{=} \mu(F_1)$$

$\Downarrow$

$\mu(F_1) = \mu_*(F_1 \cap F_2) + \mu_*(F_1 \setminus F_2)$, dvs. μ er indre tæt.

(specielt jf. 1.3 er μ indre tæt, hvis μ er et indlejd på en algebra, $\mathcal{F}$)

(4) vises tilsvarende.

Udvidelsessætningen (1.27)

$\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ $(\mathcal{F} \neq \emptyset, \emptyset \in \mathcal{F})$ $\mu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ $(\mu(\emptyset) = 0)$

Der gælder:

Hvis μ er ydre tæt, da eksisterer et mål, μ_0 på $\sigma(\mathcal{F})$ således, at μ_0 er en udvidelse af μ. (1)

Hvis μ er indre tæt, da eksisterer et indhold, μ_1 på $\alpha(\mathcal{F})$ således, at μ_1 er en udvidelse af μ. (2)

Hvis μ er indre tæt og μ_* er σ-subadditiv på $\alpha(\mathcal{F})$, da eksisterer et mål, μ_2 på $\sigma(\mathcal{F})$ således, at μ_2 udvider μ. (3)

Bevis:

(1)

Vi har, at μ^* er σ-subadditiv (additivitet af indre og ydre mål).
Af Carathéodorys satn. følger, at μ^* er et mål på $\mathcal{M}(\mu^*)$
(indforstået: $\mathcal{M}(\mu^*)$ er σ-algebra, hvilket også er en konsekvens af Carathéodory)
Desuden følger af 1.26, at μ^* udvider μ og $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(\mu^*)$, da μ er ydre tæt. (1.26: 'Kriterier for indre og ydre tæthed')

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(\mu^*)$, $\mathcal{M}(\mu^*)$ σ-algebra $\underset{1.5.3}{\Longrightarrow}$ $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{M}(\mu^*)$

Definér $\mu_0 : \sigma(\mathcal{F}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $\forall F \in \sigma(\mathcal{F}) : \mu_0(F) := \mu^*(F)$

Da μ^* er et mål på $\mathcal{M}(\mu^*)$ og $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{M}(\mu^*)$ følger af def. på μ_0 og def. på mål (1.1.4 - 1.1.5) at μ_0 er et mål på $\sigma(\mathcal{F})$.
Af def. af μ_0 som restriktionen af μ^* til $\sigma(\mathcal{F})$ er det klart at μ_0 udvider μ (da μ^* jf. ovenstående brug af 1.26 udvider μ).

(2)

Af Carathéodory's sætn. følger, at $\mathcal{M}(\mu_*)$ er en algebra, samt at μ_* er et indhold på $\mathcal{M}(\mu_*)$.
Da, μ er indre tæt, følger af 'kriterier for indre og ydre tæthed', at μ_* udvider μ (*) og $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(\mu_*)$

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(\mu_*) \text{ , } \mathcal{M}(\mu_*) \text{ algebra} \underset{1.5.2}{\Longrightarrow} \alpha(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{M}(\mu_*)$$

Definér $\mu_1 : \alpha(\mathcal{F}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \quad \forall F \in \alpha(\mathcal{F}) : \mu_1(F) := \mu_*(F)$
Da μ_* er et indhold på $\mathcal{M}(\mu_*)$ og $\alpha(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{M}(\mu_*)$ følger af def. på μ_1 og def. på indhold (1.1.2-3) at μ_1 er et indhold på $\alpha(\mathcal{F})$.

Af def. af μ_1 som restriktionen af μ_* til $\alpha(\mathcal{F})$, samt (*), er det klart, at μ_1 udvider μ

(3)

Vi har brug for en lille 'hj. sætn.' : $\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\alpha(\mathcal{F}))$
'$\subseteq$' : Da $\mathcal{F} \subseteq \sigma(\alpha(\mathcal{F}))$ (jf. 1.5.2+3) følger af 1.5.3, at $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\alpha(\mathcal{F}))$
'$\supseteq$' : Af konstruktionen af $\alpha(\mathcal{F})$ givet ved 1.16.1 og da $\sigma(\mathcal{F})$ er (C, uc)-stabil følger, at $\alpha(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$ af 1.5.3 følger $\sigma(\alpha(\mathcal{F})) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$ □

Af antagelsen om, at μ er indre tæt, følger af (2), at μ_1-defineret som restriktionen af μ_* til $\alpha(\mathcal{F})$-udvider μ, og at μ_1 er et indhold på $\alpha(\mathcal{F})$.
Vi antager, at μ_* er σ-subadditiv på $\alpha(\mathcal{F})$, dvs. μ_1 (def. af μ_1) er σ-subadditiv på $\alpha(\mathcal{F})$.
μ_1 er altså et σ-subadditivt indhold på $\alpha(\mathcal{F})$ – af sætn. om 'kriterier for indre og ydre tæthed' (1.26) følger, at μ_1 er ydre tæt.
Da giver (1), at der eksisterer et mål μ_2 på $\sigma(\alpha(\mathcal{F})) = \sigma(\mathcal{F})$, således at μ_2 udvider μ. ($\mu_2 = \mu_1^*$ (restriktionen af μ_1^* til $\sigma(\mathcal{F})$))

Bm. til 'Udvidelsessætningen':

Antag $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ $(\mathcal{F} \neq \emptyset, \emptyset \in \mathcal{F})$, $\mathcal{F}$ $(\cap f)$-stabil, $\mu: \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ $(\mu(\emptyset) = 0)$ og

$$\exists F_1, F_2, \ldots \in \mathcal{F} : \mu(F_1), \mu(F_2), \ldots < \infty \quad \wedge \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \Omega$$

Af 'entydighedssætningen for mål' (1.7) følger (sæt $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ og $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F})$), at der er ét mål på $\sigma(\mathcal{F})$, der udvider μ.

Fuldstændiggørelsen af mål (1.28)

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ betegner et målrum

Dvs. μ er et mål på σ-algebraen $\mathcal{F}$ $(\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega)$

Specielt er μ σ-subadditiv (jvf. 1.3 + 1.4), af 'Additivitet af indre og ydre mål' følger, at $\forall A \subseteq \Omega$: $\mu^*(A) = \inf\{\mu(F) \mid F \in \mathcal{F}, A \subseteq F\}$

Sætn. 'Kriterier for indre og ydre mål' giver, at μ er ydre tæt, og dermed at μ^* udvider μ og $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(\mu^*)$

Carathéodory's sætn. giver, at (da μ^* er σ-subadditiv) at $\mathcal{M}(\mu^*)$ er en σ-algebra, og at μ^* er et mål på $\mathcal{M}(\mu^*)$.

Definér:

$\mathcal{M}(\mu) := \mathcal{M}(\mu^*)$, $\bar{\mu}: \mathcal{M}(\mu^*) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $\forall M \in \mathcal{M}(\mu^*)$: $\bar{\mu}(M) := \mu^*(M)$

Vi har lige argumenteret for, at $\mathcal{M}(\mu)$ er en σ-algebra (på Ω), samt at $\bar{\mu}$ er et mål på $\mathcal{M}(\mu)$. ($\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(\mu)$, $\bar{\mu}$ udvider μ)

$\mathcal{M}(\mu)$ kaldes fuldstændiggørelsen af $\mathcal{F}$ under μ.
$\bar{\mu}$ kaldes fuldstændiggørelsen af μ.

$A \subseteq \Omega$ siges at være μ-målelig, hvis $A \in \mathcal{M}(\mu)$

Hvis $\mathcal{F} = \mathcal{M}(\mu)$ siges μ at være fuldstændigt.

Se desuden Exc. 1.38 – bl.a. for en behandling af $\mathcal{L}(\mu)$.

$(\mathcal{L}(\mu) := \{A \subseteq \Omega \mid \exists F_0, F_1 \in \mathcal{F}: F_0 \subseteq A \subseteq F_1 \wedge \mu(F_1 \setminus F_0) = 0\})$

Lebesgue-Stieltjes mål på $\mathbb{R}$ (1.32)

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall x,y \in \mathbb{R}: x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$

$\forall \{x_n\}_{n\geq 1}, x \in \mathbb{R}: \quad x_n \downarrow x \Rightarrow F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n)$

$\mathcal{F} := \{]a,b] \mid a \leq b\}$, $\mu(]a,b]) := F(b) - F(a) \quad (]a,b] \in \mathcal{F})$

Påstand: Der eksisterer et entydigt bestemt mål på $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, λ_F, som opfylder

$\forall a \leq b \in \mathbb{R}: \lambda_F(]a,b]) = F(b) - F(a)$

(λ_F betegnes Lebesgue-Stieltjes målet induceret af F)

Hjælpesætninger:

Påstand: μ er subadditiv på $\mathcal{F}$

Bevis:

Tjek først at μ er en mængdefkt.: Sæt $a=b$ i $]a,b]$, da ser vi, at $\emptyset \in \mathcal{F}$, og det er klart, at $\mu(\emptyset) = 0$. (Da $a=b \Rightarrow F(b) = F(a)$)

Vi skal vise, at $\forall F, \{F_k\}_{k=1}^n \in \mathcal{F}: F \in \bigcup_{k=1}^n F_k \Rightarrow \mu(F) \leq \sum_{k=1}^n \mu(F_k)$

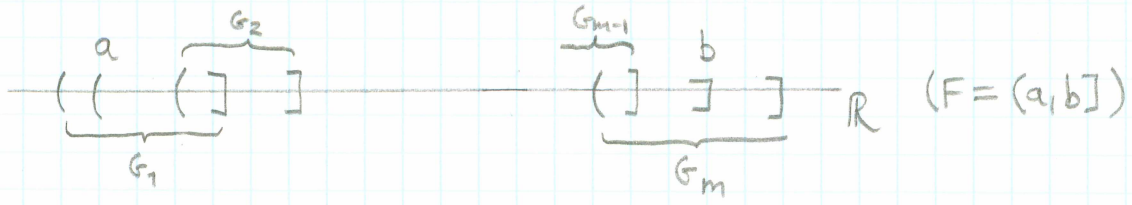
Da $\forall x,y \in \mathbb{R}: x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$ gælder $\forall H \in \mathcal{F}: \mu(H) \geq 0 \quad (*)$

Dette betyder, at kan vi vise påstanden for et udvalg $G_1, \dots, G_m$ $(m \leq n)$ af $F_1, F_2, \dots, F_n$ er vi færdige, da vi i sådant et tilfælde har følgende vurdering: $\mu(F) \leq \sum_{j=1}^m \mu(G_j) \leq \sum_{k=1}^n \mu(F_k)$

$\uparrow$ $\mu(F_k) \geq 0$

Vi vælger $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ således at $G_j = (a_j, b_j] \quad j = 1, \dots, m$

Vælg G-erne således, at $F \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} G_j$ og således, at de opfylder



Bevis for $\mu(F) \leq \sum_{j=1}^{m} \mu(G_j)$ ved induktion på m:

$m=1$: $F \subseteq G_1 \Longrightarrow \mu(F) = F(b) - F(a) \leq F(b_1) - F(a_1) = \mu(G_1)$ o.k.

F voksende $\Longrightarrow F(b_1) \geq F(b)$ og $F(a) \geq F(a_1)$

$m=2$: $F \subseteq G_1 \cup G_2$

$\mu(F) = F(b) - F(a) \leq F(b_2) - F(a_1) \underset{(*)}{\leq} F(b_2) - F(a_1) + (F(b_1) - F(a_2))$

$= F(b_1) - F(a_1) + F(b_2) - F(a_2) = \mu(G_1) + \mu(G_2)$ o.k

Antag påstanden sand for $m-1$:

Sæt $H := \bigcup_{j=1}^{m-1} G_j$ Vi har dermed, at $F \subseteq H \cup G_m$ af ovenstående udregn. fås, at $\mu(F) \leq \mu(H) + \mu(G_m) \underset{\text{induktionsantagelsen}}{\leq} \sum_{j=1}^{m-1} \mu(G_j) + \mu(G_m) = \sum_{j=1}^{m} \mu(G_j)$ □

Påstand: μ er σ-subadditiv på $\mathcal{F}$

Bevis:

Vi skal vise: $\forall F, \{F_n\}_{n \geq 1} \in \mathcal{F}: F \in \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \Longrightarrow \mu(F) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n)$

Da F er højrekont.: $\forall \varepsilon > 0, n \geq 1 \; \exists \delta_n > 0: 0 \underset{\text{F voksende}}{\leq} F(b_n + 2\delta_n) - F(b_n) \leq \varepsilon / 2^n$,

$a, b, a_n, b_n \in \mathbb{R}: a \leq b, a_n \leq b_n$: $F = (a,b]$, $F_n = (a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$

$F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ der med ovenstående notation er ekvivalent med

$$(a,b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n]$$

Antag $F=\emptyset$, da er påstanden triviel idet $\mu(\emptyset)=0$ og μ er ikke-negativ. (jvf. bm. på forrige side)

Antag $F\neq\emptyset$ med notationen indført på den foregående side betyder dette, at $a<b \Longrightarrow \exists \Psi>0\ \forall \varepsilon>0 : 2\varepsilon<\Psi : [a+\varepsilon, b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n+\delta_n)$

Vi viser, nu at $[a+\varepsilon, b]$ er kompakt, dvs. $\exists n\in\mathbb{N}: [a+\varepsilon, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i+\delta_i)$

Bevis ved modstrid:

Antag $\forall n\in\mathbb{N}\ \exists x_n \in [a+\varepsilon, b] \setminus \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i+\delta_i)$ (husk $[a+\varepsilon, b]\neq\emptyset$)

Da en foreningsmængde af åbne intervaller er en åben mængde i $\mathbb{R}$ (4) følger, at $[a+\varepsilon, b] \setminus \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i+\delta_i)$ er lukket mængde i $\mathbb{R}$ (@). (luk ÷ åben = luk)

Da $\bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i+\delta_i) \in \bigcup_{i=1}^{n+1}(a_i, b_i+\delta_i)$ ser vi desuden, at

$$[a+\varepsilon, b] \setminus \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i+\delta_i) \supseteq [a+\varepsilon, b] \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1}(a_i, b_i+\delta_i)$$

Dvs. $\{[a+\varepsilon, b] \setminus \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i+\delta_i)\}_{n\geq 1}$ er en aftagende følge af lukkede delmængder af $\mathbb{R}$, hvor intet 'led' ifølge antagelsen er den tomme mængde. Sæt $L = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{[a+\varepsilon, b] \setminus \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i+\delta_i)\}$. Da enhver fællesmængdedannelse af lukkede mængder er lukket, er L lukket. Af antagelsen følger dermed, at $L\neq\emptyset$. (L er jo mere præcist en foreningsmgd. af lukkede intervaller)

Vi ser, at $L = [a+\varepsilon, b] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n+\delta_n) \neq \emptyset$ men det er jo i modstrid med at $[a+\varepsilon, b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n+\delta_n)$, dvs.

$\exists n\in\mathbb{N}: [a+\varepsilon, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i+\delta_i)$

(4) Vi arbejder her i $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

@ mere præcist er mængden en forening af lukkede intervaller

Den netop bevist påstand medfører, at (med vort valg af ε)

$$(a+2\varepsilon, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i+2\delta_i]$$

Da μ er subadditiv på $\mathcal{F}$ følger, at

$$\mu((a+2\varepsilon,b]) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu((a_i,b_i+2\delta_i]) = \sum_{i=1}^{n} F(b_i+2\delta_i) - F(a_i)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} F(b_i) - F(a_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

(med vort valg af δ_i)

$\Downarrow$ (husk $\forall n \in \mathbb{N}: \mu(F_n) = F(b_n) - F(a_n) \geq 0$)

$$F(b) - F(a+2\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^{n} (F(b_i) - F(a_i)) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (F(b_n) - F(a_n)) + \underbrace{\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}}_{=\varepsilon}$$

$\Downarrow \varepsilon \downarrow 0$ og egenskaben ved F (F højrekontinuert)

$$F(b) - F(a) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (F(b_n) - F(a_n)) \implies \mu(F) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \qquad \square$$

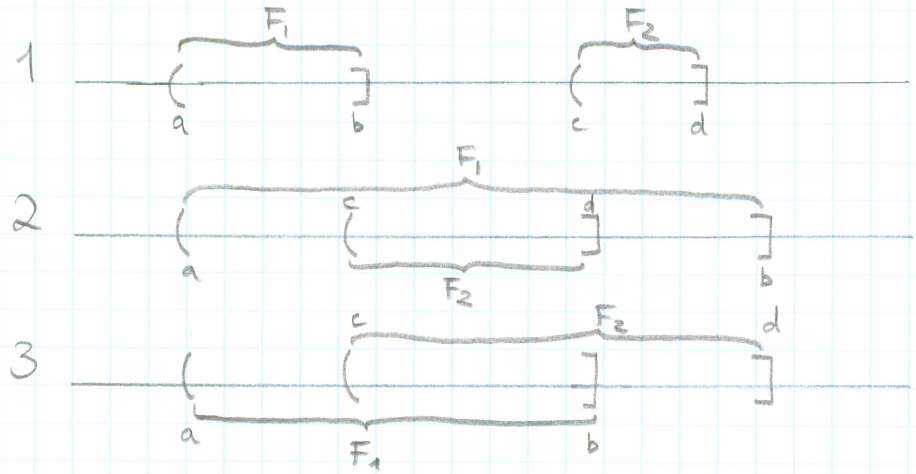
Påstand: μ er ydre tæt

Bevis:

Vi skal vise, at $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}: \mu(F_1) = \mu^*(F_1 \cap F_2) + \mu^*(F_1 \setminus F_2)$

Da μ er σ-subadditiv på $\mathcal{F}$ følger af sætn. 'Additivitet af indre og ydre mål' (1.24.4), at μ^* udvider μ.

Der er 3 situationer, som er væsentlig forskellige.



1)

$F_1 \cap F_2 = \emptyset \in \mathcal{F}$ (at $\emptyset \in \mathcal{F}$ har vi tidl. vist)

$F_1 \setminus F_2 = F_1 \in \mathcal{F}$ (pr. antagelse)

$$\mu(F_1) = \underset{\mu(\emptyset)=0}{\mu(\emptyset)} + \mu(F_1) = \mu(F_1 \cap F_2) + \mu(F_1 \setminus F_2) \underset{\mu = \mu^*|_{\mathcal{F}}}{=} \mu^*(F_1 \cap F_2) + \mu^*(F_1 \setminus F_2)$$

2)

$F_1 \cap F_2 = F_2 \in \mathcal{F}$ (pr. antagelse)

$F_1 \setminus F_2 = (a,c] \cup (d,b]$

$$\begin{aligned}
\mu(F_1) &:= F(b) - F(a) = F(b) - F(d) + F(d) - F(c) + F(c) - F(a) \\
&= (F(d) - F(c)) + \{(F(c) - F(a)) + (F(b) - F(d))\} \\
&= \mu(F_2) + \{(F(c) - F(a)) + (F(b) - F(d))\} \\
&\underset{\mu = \mu^*|_{\mathcal{F}}}{=} \mu^*(F_2) + \mu((a,c]) + \mu((d,b]) \\
&\underset{\mu = \mu^*|_{\mathcal{F}}}{=} \mu^*(F_2) + \mu^*((a,c]) + \mu^*((d,b]) \\
&\underset{\substack{\mu^* \text{ subadditiv} \\ (1.24.3)}}{\geq} \mu^*(F_2) + \mu^*((a,c] \cup (d,b]) \\
&= \mu^*(F_2) + \mu^*(F_1 \setminus F_2) = \mu^*(F_1 \cap F_2) + \mu^*(F_1 \setminus F_2)
\end{aligned}$$

$$\mu(F_1) \underset{\mu = \mu^*|_{\mathcal{F}}}{=} \mu^*(F_1) \underset{\substack{\mu^* \text{ subadditiv} \\ (1.24.3)}}{\leq} \mu^*(F_1 \cap F_2) + \mu^*(F_1 \setminus F_2)$$

Dvs. $\mu(F_1) = \mu^*(F_1 \cap F_2) + \mu^*(F_1 \setminus F_2)$

3)

$F_1 \cap F_2 = (c, b] \in \mathcal{F}$

$F_1 \setminus F_2 = (a, c] \in \mathcal{F}$

$\mu(F_1) := F(b) - F(a) = (F(b) - F(c)) + (F(c) - F(a))$

$= \mu((c, b]) + \mu((a, c]) = \mu(F_1 \cap F_2) + \mu(F_1 \setminus F_2)$

$\underset{\mu = \mu^*|_{\mathcal{F}}}{=} \mu^*(F_1 \cap F_2) + \mu^*(F_1 \setminus F_2)$

□

Bm. beviset ovenfor viser desuden, at $\mathcal{F}$ er $(\cap f)$-stabil.

Bevis for 'hovedsætn.':

Da μ^* er σ-subadditiv, jvf. sætn. om 'Additivitet af indre og ydre mål' (1.24.3) følger af Carathéodory's sætn. (1.23), at $\mathcal{M}(\mu^*)$ er en σ-algebra og μ^* er et mål på $\mathcal{M}(\mu^*)$ (evt. sæt i 1.28)

μ er ydre tæt af sætn. om 'kriterier for indre og ydre tæthed' (1.26) følger derfor, at μ^* udvider μ og $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(\mu^*)$

Af 1.5.3 (+15.1) følger da $\mathcal{M}(\mu^*)$ er σ-algebra og $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(\mu^*)$, at $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{M}(\mu^*)$

Jvf. 1.10 gælder, at $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, dvs. $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}(\mu^*)$, samtidig har vi, at μ^* er et mål på $\mathcal{M}(\mu^*)$, dermed har vi, at $\lambda_F = \mu^*|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ er et mål på $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ som udvider μ. (da μ^* udvider μ og $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$)

Antag, at $\tilde{\lambda}_F$ er et andet mål på $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ som udvider μ.

$\mathcal{F} \subseteq \sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}$ er $(\cap f)$-stabil brologn. på $\mathbb{R}$

Da , $\tilde{\lambda}_F, \lambda_F$ begge udvider μ og dermed stemmer overens på $\mathcal{F}$, gælder:

Definér $F_k = (-k, k]$, $k \geq 1$

Vi ser $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = \mathbb{R}$ og $\forall F \in \mathcal{F}, k \geq 1 : \lambda_F(F \cap F_k) = \tilde{\lambda}_F(F \cap F_k)$

samt, at $\forall k \geq 1 : F_k \in \mathcal{F} \subseteq \sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ og $\lambda_F(F_k) = \tilde{\lambda}_F(F_k) = F(k) - F(-k) < \infty$

Af entydighedssætn. for (endelige) mål følger at $\tilde{\lambda}_F = \lambda_F$ $\square$

Lebesgue målet på $\mathbb{R}$:

Sæt $F(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ ovenstående sætning giver, at der eksisterer et entydigt bestemt mål, λ (el λ_1) på $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, som opfylder $\lambda(]a,b]) = b-a$, $\forall a \leq b \in \mathbb{R}$. Dette mål betegnes Lebesguemålet på $\mathbb{R}$.

Lebesgue-Stieltjes mål på $\mathbb{R}^k$

$F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$,

$\forall \{x_{1n}\}_{n\geq 1}, \{x_{2n}\}_{n\geq 1}, \dots, \{x_{kn}\}_{n\geq 1} \in \mathbb{R}\ x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R} : x_{1n} \downarrow x_1, \dots, x_{kn} \downarrow x_k$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} F(x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{kn}) = F(x_1, x_2, \dots, x_k)$ (F 'højrekontinuert')

Lad $a=(a_1, \dots, a_k)$, $b=(b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^k$

Definition: $a \leq b \iff a_j \leq b_j$, $j=1, \dots, k$

$a < b \iff a_j < b_j$, $j=1, \dots, k$

$$]a,b] = \{x \in \mathbb{R}^k \mid a < x \leq b\}$$

$$\Delta_a^b F := \sum_{\varepsilon_1=0}^{1} \sum_{\varepsilon_2=0}^{1} \dots \sum_{\varepsilon_k=0}^{1} (-1)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_k} F(c_1(\varepsilon_1), c_2(\varepsilon_2), \dots, c_k(\varepsilon_k)),$$ ('the increment' = tilvæksten)

hvor $c_j(0) = b_j$, $c_j(1) = a_j$, $j=1, \dots, k$

Vi siger, at F har positive tilvækster, hvis $\Delta_a^b F \geq 0$, $\forall a \leq b \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F} := \{]a,b] \mid a,b \in \mathbb{R}^k, a \leq b\} \quad , \quad \mu(]a,b]) = \Delta_a^b F$$

Påstand: Hvis $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ er højrekontinuert, har positive tilvækster, da eksisterer et entydigt bestemt mål, λ_F på $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, som opfylder

$$\forall a \leq b \in \mathbb{R}^k : \lambda_F(]a,b]) = \Delta_a^b F$$

λ_F betegnes Lebesgue-Stieltjes målet inducceret af F

Bevis:

Induktionsbevis, der benytter sætn. om Lebesgue-Stieltjes mål på $\mathbb{R}$ ved at betragte passende 'talpar'.

Sæt $F(x_1, \dots, x_k) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k$, da følger af ovenstående sætn,

Påstand:

Der findes et entydigt bestemt mål, λ_k på $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, som opfylder

$\forall a = (a_1, \dots, a_k) \leq (b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^k : \lambda_k(]a,b]) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdot \dots \cdot (b_k - a_k)$

Supplerende noter til 3MI
Mål og integralteori

Mikael Rørdam

Eksistensen af Lebesguemålet på $\mathbb{R}$

Denne fremstilling er baseret på s. 28–34 i G.B. Folland's "Real Analysis" og på noter udarbejdet af Uffe Haagerup.

Vi kridter banen op med en generel diskussion om konstruktion af mål.

Definition 1 *Et målrum $(X, \mathbb{E}, \mu)$ kaldes* fuldstændigt, *hvis alle μ-nulmængder ligger i $\mathbb{E}$.*

Bemærk, at $(X, \mathbb{E}, \mu)$ er fuldstændig, hvis og kun hvis det for alle $E \in \mathbb{E}$ med $\mu(E) = 0$, og alle $N \subseteq E$ gælder, at $N \in \mathbb{E}$. Af og til vil man sige, at μ er fuldstændig i betydningen $(X, \mathbb{E}, \mu)$ er fuldstændig, når X og $\mathbb{E}$ fremgår af sammenhængen.

Fuldstændige mål er diskuteret i opgaverne 3.15–3.18 i noterne. Fuldstændige mål er bekvemme at arbejde med, bl.a. p.g.a. følgende sætning, som til dels er bevist i Opgave 3.18.

Sætning 2 *Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et fuldstændigt målrum, og lad $(Y, \mathbb{F}, \nu)$ være et vilkårligt andet målrum (ikke nødvendigvist fuldstændigt). Hvis $f\colon X \to Y$ er $\mathbb{E}$-$\mathbb{F}$-målelig, og hvis $g\colon X \to Y$ opfylder $g = f$ μ-n.o., så er g også $\mathbb{E}$-$\mathbb{F}$-målelig.*

Til ethvert målrum $(X, \mathbb{E}, \mu)$ kan man konstruere et nyt målrum $(X, \bar{\mathbb{E}}, \bar{\mu})$, som er fuldstændigt, og som opfylder $\mathbb{E} \subseteq \bar{\mathbb{E}}$ og $\bar{\mu}|_{\mathbb{E}} = \mu$ (se Opgave 3.17). Dette nye målrum kaldes *fuldstændiggørelsen* af $(X, \mathbb{E}, \mu)$. Det Lebeguesmål, vi nu skal konstruere, bliver automatisk fuldstædigt, så vi får ikke brug for denne fuldstændiggørelsesmaskine.

Konstruktionen af Lebesguemålet går via ydre mål. Disse er knapt så fine som mål, ved det, at de ikke nødvendigvis er tælleligt additive, men blot tælleligt subadditive:

Definition 3 *Et* ydre mål *μ^* på en mængde X er en funktion $\mu^*\colon P(X) \to [0, \infty]$, som opfylder*

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

(ii) $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, *hvis* $A, B \in P(X)$ *og* $A \subseteq B$,

(iii) $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ *for enhver følge* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P(X)$.

Til et ydre mål betragtes en særlig delfamilie af delmængder af X:

Definition 4 *Lad μ^* være et ydre mål på mængden X. En delmængde E af X kaldes* μ^*-målelig, *hvis der for alle $A \in P(X)$ gæder*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \complement E). \tag{1}$$

Definition 3 (iii) giver $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \complement E)$ for ethvert par $A, E \in P(X)$. Vi har derfor, at E er μ^*-målelig hvis og kun hvis den anden ulighed,

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \complement E), \tag{2}$$

gælder for alle $A \in P(X)$.

Definition 5 *En familie $\mathcal{A}$ af delmængder af en mængde X kaldes en* algebra, *hvis*

(i) $X \in \mathcal{A}$,

(ii) $A \in \mathcal{A}$ *medfører* $\complement A \in \mathcal{A}$,

(iii) $A, B \in \mathcal{A}$ *medfører* $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Enhver σ-algebra er en algebra. Det modsatte gælder ikke, men vi har følgende lemma, hvis bevis overlades til læseren (= en opgave til øvelserne!):

Lemma 6 *Lad $\mathcal{A}$ være en algebra på mængden X, og antag $\mathcal{A}$ er afsluttet under tællelige disjunkte foreninger, dvs. for alle følger $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ af parvis disjunkte mængder i $\mathcal{A}$ gælder $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.*

Da er $\mathcal{A}$ en σ-algebra.

Theorem 7 (Carathéodory's Sætning) *Lad μ^* være et ydre mål på en mængde X. Lad $\mathbb{E}$ være familien af alle μ^*-målelige delmængder af X. Lad μ være restriktionen af μ^* til $\mathbb{E}$, dvs. $\mu\colon \mathbb{E} \to [0,\infty]$ og $\mu(E) = \mu^*(E)$ for $E \in \mathbb{E}$.*

Da er $(X, \mathbb{E}, \mu)$ et fuldstændigt målrum.

Bevis: Det skal vises, at $\mathbb{E}$ er en σ-algebra, at μ er et mål på $\mathbb{E}$, og at μ er fuldstændig. Det følger umiddelbart af (1), at $E \in \mathbb{E}$ medfører $\complement E \in \mathbb{E}$, og at $\emptyset$ og X begge ligger i $\mathbb{E}$.

For $E, F \in \mathbb{E}$ og $A \in P(X)$ har vi

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \complement E) \\
&= \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E \cap \complement F) + \mu^*(A \cap \complement E \cap F) + \mu^*(A \cap \complement E \cap \complement F) \\
&\geq \mu^*\left((A \cap E \cap F) \cup (A \cap E \cap \complement F) \cup (A \cap \complement E \cap F)\right) + \mu^*(A \cap \complement E \cap \complement F) \\
&= \mu^*(A \cap (E \cup F)) + \mu^*(A \cap \complement(E \cup F)).
\end{aligned}$$

Dette viser, at $E, F \in \mathbb{E}$ medfører $E \cup F \in \mathbb{E}$. Det er nu vist, at $\mathbb{E}$ er en algebra.

Lad nu $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en følge af parvis disjunkte mængder beliggende i $\mathbb{E}$. Sæt $F_n = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$, og bemærk, at $F_n \in \mathbb{E}$, da $\mathbb{E}$ er en algebra. Sæt $F = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ $(= \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n)$. Hovedslaget, der skal udkæmpes i dette bevis, består i at vise:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap \complement F) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \cap \complement F), \tag{3}$$

for alle $A \in P(X)$.

For at se (3), bemærk først

$$A = (A \cap F) \cup (A \cap \complement F) = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A \cap E_j\right) \cup (A \cap \complement F).$$

Sammen med Definition 3 (iii) giver dette

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap \complement F) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \cap \complement F). \tag{4}$$

Omvendt, for alle $n \geq 2$ har vi

$$\mu^*(A \cap F_n) = \mu^*(A \cap F_n \cap E_n) + \mu^*(A \cap F_n \cap \complement E_n) = \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \cap F_{n-1}).$$

Det følger heraf ved induktion, at

$$\mu^*(A \cap F_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A \cap E_j),$$

for alle $n \geq 1$. (Til grundtrinnet $n = 1$ benyttes at $F_1 = E_1$.) Ved at benytte $\complement F \subseteq \complement F_n$ og (ii) i Definition 3 får vi

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap \complement F_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \cap \complement F_n) \\ &\geq \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \cap \complement F). \end{aligned}$$

Da dette gælder for alle $n \in \mathbb{N}$, har vi $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \cap \complement F) \leq \mu^*(A)$. Sammen med (4) viser dette (3).

Det følger umiddelbart af (3), at $F \in \mathbb{E}$. Derfor er $\mathbb{E}$ afsluttet under tællelige disjunkte foreninger, så $\mathbb{E}$ er en σ-algebra jvf. Lemma 6. Sættes $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ $(= F)$ i (3), får vi

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

(Husk at $\mu(E) = \mu^*(E)$ for $E \in \mathbb{E}$.) Dette viser, at μ er et mål på σ-algebraen $\mathbb{E}$. Vi mangler nu blot at vise, at μ er fuldstændig. Lad hertil $E \in \mathbb{E}$ og $N \subseteq E$ med $\mu(E) = 0$ være givet, og lad $A \in P(X)$. Da er

$$\mu^*(A \cap N) + \mu^*(A \cap \complement N) \leq \mu^*(E) + \mu^*(A) = \mu^*(A).$$

Betingelsen (2) er således opfyldt for N, så $N \in \mathbb{E}$. $\square$

Vi vender os nu til konstruktionen af Lebesguemålet på den reelle akse.

Et *h-interval* er et delinterval af $\mathbb{R}$ af formen $(a, b]$, (a, ∞), eller $\emptyset$, hvor $-\infty \leq a < b < \infty$. Mængden af alle h-intervaller benævnes med $\mathbb{I}$.

Bemærk, at hvis I er et h-interval, så er $\complement I$ en disjunkt forening af to h-intervaller, hvis $I = (a, b]$ og $-\infty < a < b < \infty$, og $\complement I$ er selv et h-interval i alle andre tilfælde. Snitmængden af to h-intervaller er igen et h-interval.

Definer $\ell \colon \mathbb{I} \to [0, \infty]$ ved $\ell((a, b]) = b - a$, $\ell((a, \infty)) = \infty$, og $\ell(\emptyset) = 0$.

Definer $m^* \colon P(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ ved

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) \mid I_j \in \mathbb{I}, \quad A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\}. \tag{5}$$

Strategien er nu at vise, at m^* er et ydre mål, at alle h-intervaller er m^*-målelige, og at $m^*(I) = \ell(I)$ for alle h-intervaller I. Dette gøres i nedenstående lemmaer. Herefter giver Carathéodory's sætning det ønskede resultat om eksistensen af Lebesguemålet (Theorem 13).

Lemma 8 *m^* er et ydre mål.*

Bevis: Det skal vises, at (i), (ii) og (iii) i Definition 3 holder. (ii) er en umiddelbar konsekvens af definitionen af m^* (overvej dette!). (i) indses let ved f.eks. at vælge $I_1 = I_2 = I_3 = \cdots = \emptyset$.

For at vise (iii), lad $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en vilkårlig følge i $P(\mathbb{R})$. Hvis $m^*(A_n) = \infty$ for mindst et n, så gælder uligheden $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$ trivielt. Antag derfor gerne, at $m^*(A_n) < \infty$ for alle n. Lad $\varepsilon > 0$. Find for alle n følger $\{I_{n,j}\}_{j=1}^{\infty}$ i $\mathbb{I}$, så

$$A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{n,j}, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_{n,j}) \leq m^*(A_n) + 2^{-n}\varepsilon.$$

Da er $\{I_{n,j}\}_{j,n=1}^{\infty}$ en tællelig familie i $\mathbb{I}$, og

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{j,n=1}^{\infty} I_{n,j}, \quad \sum_{j,n=1}^{\infty} \ell(I_{n,j}) \leq \sum_{n=1}^{\infty}(m^*(A_n) + 2^{-n}\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon.$$

Dette viser, at $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon$. Da dette holder for alle $\varepsilon > 0$ følger det ønskede: $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$. $\square$

Lemma 9 *Alle h-intervaller er m^*-målelige.*

Bevis: Lad I være et h-interval. Vi viser, at I er m^*-målelig ved at eftervise (2).

Lad $A \in P(\mathbb{R})$, og betragt hertil en vilkårlig følge $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ af h-intervaller så $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$. Som tidligere bemærket er $\complement I$ foreningen af to disjunkte h-intervaller I' og I'' (det ene af disse h-intervaller kunne være den tomme mængde). Sæt

$$K_n = I \cap J_n, \qquad K_n' = I' \cap J_n, \qquad K_n'' = I'' \cap J_n.$$

Da er K_n, K_n', K_n'' parvis disjunkte h-intervaller, og $J_n = K_n \cup K_n' \cup K_n''$. Derfor er $\ell(J_n) = \ell(K_n) + \ell(K_n') + \ell(K_n'')$ (overvej). Endvidere gælder

$$A \cap I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n, \qquad A \cap I' \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n', \qquad A \cap I'' \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n''.$$

Samlet har vi

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \ell(K_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(K_n') + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(K_n'') \\ &\geq m^*(A \cap I) + m^*(A \cap I') + m^*(A \cap I''), \end{aligned}$$

hvor $\geq$ skyldes (5). Da overdækningen $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ af A var vilkårlig, kan vi igen ifølge (5) konkludere, at

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geq m^*(A \cap I) + m^*(A \cap I') + m^*(A \cap I'') \\ &\geq m^*(A \cap I) + m^*(A \cap (I' \cup I'')) \\ &= m^*(A \cap I) + m^*(A \cap \complement I). \end{aligned}$$

Det ses nu, at (2) er opfyldt, så I er m^*-målelig. $\square$

Lemma 10 *Hvis*

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j),$$

hvor $a \leq b$ *og* $a_j < b_j$ *for* $j = 1, 2, \ldots, n$, *så er*

$$b - a \leq \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

Bevis: Beviset føres ved induktion efter n. Overvej selv situationen for $n = 1$. Antag $n \geq 2$, at $[a,b] \subseteq \bigcup_{j=1}^{n}(a_j, b_j)$, og at påstanden i lemmaet er vist for alle overdækninger med færre end n intervaller. Find $j_0 \in \{1, 2, \ldots\}$ så $a \in (a_{j_0}, b_{j_0})$. Hvis $b_{j_0} > b$, så er $[a,b] \subseteq (a_{j_0}, b_{j_0})$, og sagen er klar!

Antag $b_{j_0} \leq b$. Da er

$$[b_{j_0}, b] = [a,b] \setminus (a_{j_0}, b_{j_0}) \subseteq \bigcup_{j \neq j_0} (a_j, b_j).$$

Induktionsantagelsen giver derfor $b - b_{j_0} \leq \sum_{j \neq j_0}(b_j - a_j)$. Dermed har vi

$$\begin{aligned} b - a &= (b - b_{j_0}) + (b_{j_0} - a) \leq (b - b_{j_0}) + (b_{j_0} - a_{j_0}) \\ &\leq \sum_{j \neq j_0} (b_j - a_j) + (b_{j_0} - a_{j_0}) = \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j). \end{aligned}$$ $\square$

Lemma 11 *Lad* $I, I_1, I_2, I_3, \ldots$ *være h-intervaller, således at* $I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. *Da gælder*

$$\ell(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n).$$

Bevis: Hvis $I = \emptyset$, så er der intet at vise. Antag derfor gerne, at $I \neq \emptyset$. Endvidere, hvis $\ell(I_n) = \infty$ for mindst et n, så er der heller intet at vise. Vi kan derfor også antage, at $\ell(I_n) < \infty$ for alle n. Dvs. $I_n = (a_n, b_n]$, hvor $-\infty < a_n < b_n < \infty$ (idet vi også smider alle tomme mængder blandt intervallerne $I_1, I_2, \ldots$ ud).

Bemærk, at

$$\ell(I) = \sup\{b' - a' \mid a', b' \in I,\ a' < b'\}, \tag{6}$$

når $I \neq \emptyset$. Lad $a', b' \in I$ med $a' < b'$ være givet.

Lad $\varepsilon > 0$, og sæt $a'_n = a_n$, og $b'_n = b_n + \varepsilon 2^{-n}$. Da er $I_n = (a_n, b_n] \subseteq (a'_n, b'_n)$, så $[a', b'] \subseteq I \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty}(a'_j, b'_j)$. Da $[a', b']$ er kompakt giver Heine-Borel's sætning $[a', b'] \subseteq \bigcup_{j=1}^{n}(a'_j, b'_j)$ for et passende stort n.

Det følger nu fra Lemma 10, at

$$\begin{aligned} b' - a' &\leq \sum_{j=1}^{n}(b'_j - a'_j) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty}(b_j + \varepsilon 2^{-j} - a_j) = \sum_{j=1}^{\infty}(\ell(I_j) + \varepsilon 2^{-j}) = \sum_{j=1}^{\infty}\ell(I_j) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ var vilkårlig, får vi $b' - a' \leq \sum_{j=1}^{\infty}\ell(I_j)$, og da a', b' også var vilkårlige følger det ønskede af (6). □

Lemma 12 *For ethvert h-interval I er $m^*(I) = \ell(I)$.*

Bevis: Sæt $I_1 = I$, $I_2 = I_3 = \cdots = \emptyset$. Da er $I_1, I_2, I_3, \ldots$ h-intervaller og $I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, så

$$m^*(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n) = \ell(I)$$

ifølge definitionen af m^*. Omvendt, hvis $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ er en følge af h-intervaller med $I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, da er $\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n) \geq \ell(I)$ ifølge Lemma 11. Dette viser, at $m^*(I) \geq \ell(I)$. □

Theorem 13 *Der findes et fuldstændigt målrum $(\mathbb{R}, \mathbb{L}, m)$, som opfylder $\mathbb{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{L}$ og*

$$m((a, b]) = b - a,$$

for alle a, b med $-\infty \leq a < b < \infty$.

Bevis: Lad $\mathbb{L}$ være mængden af alle m^*-målelige mængder, og lad m være restriktionen af m^* til $\mathbb{L}$. Carathéodory's sætning giver, at $(\mathbb{R}, \mathbb{L}, m)$ er et fuldstændigt målrum. Lemma 9 giver $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{L}$. Da σ-algebraen frembragt af $\mathbb{I}$ er lig med Borel-σ-algebraen $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ (jvf. Opgave 1.2), så giver Sætning 1.2 i noterne, at $\mathbb{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathbb{I}) \subseteq \mathbb{L}$.

Endelig, hvis $-\infty \leq a < b < \infty$, så er $(a, b]$ et h-interval, og ved at udnytte Lemma 12 får vi

$$m((a, b]) = m^*((a, b]) = \ell((a, b]) = b - a. \qquad \square$$

Ved at tage restriktionen af målet m til Borel-σ-algebraen $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ får vi følgende korollar til Theorem 13:

Korollar 14 *Der findes et mål m defineret på σ-algebraen $\mathbb{B}(\mathbb{R})$, som opfylder*

$$m((a, b]) = b - a,$$

for alle a, b med $-\infty \leq a < b < \infty$.

Hovedsætning 5.1 i noterne siger, at målet m i Korollar 14 tillige er entydigt.

Mængderne i σ-algebraen $\mathbb{L}$ kaldes *Lebesguemålelige mængder*. Alle Borel-delmængder af $\mathbb{R}$ er således Lebesguemålelige. Det omvendte gælder ikke. Faktisk har vi

$$\mathbb{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathbb{L} \subsetneq P(\mathbb{R}). \tag{7}$$

Den første af disse ægte inklusioner kan ses ved en kardinalitetsbetragtning, idet $\text{card}(\mathbb{L}) = \text{card}(\text{P}(\mathbb{R}))$ og $\text{card}(\mathbb{B}(\mathbb{R})) = \text{card}(\mathbb{R})$. Den første af disse identiteter kan indses ved at benytte Cantor's mængde Z (se Eksempel 5.22 i noterne). Mængden Z er kompakt (og dermed $Z \in \mathbb{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{L}$), $m(Z) = 0$, og $\text{card}(\text{Z}) = \text{card}(\mathbb{R})$. Da $(\mathbb{R}, \mathbb{L}, m)$ er fuldstændig, har vi $P(Z) \subseteq \mathbb{L}$. Dette giver $\text{card}(\text{P}(\mathbb{R})) = \text{card}(\text{P}(\text{Z})) \leq \text{card}(\mathbb{L}) \leq \text{card}(\text{P}(\mathbb{R}))$. Den anden kardinalitetsidentitet er noget mere kompliceret.

Den anden ægte inklusion i (7) følger umiddelbart af Vitali's Sætning (Sætning 5.30 i noterne).

Eksistensen af Lebesguemålet på $\mathbb{R}^k$ kan vises på en tilsvarende, men mere besværlig, måde. Istedet vil vi, når tiden er moden, konstruere Lebesguemålet på $\mathbb{R}^k$ ved at bruge teorien for produktmål, som udvikles i noternes §6.

En funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, hhv. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, kaldes *Lebesguemålelig*, hvis den er $\mathbb{L}$-$\mathbb{B}(\mathbb{R})$-målelig, hhv. $\mathbb{L}$-$\mathbb{B}(\mathbb{C})$-målelig.

Alle Borelfunktioner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er således Lebesguemålelige (da $\mathbb{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{L}$). Endvidere, hvis $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, hvis f er Lebesguemålelig, og hvis $f = g$ m-n.o., så er g Lebesguemålelig ifølge Sætning 2.

Lad $[a, b]$ være et kompakt delinterval af $\mathbb{R}$, og sæt

$$\mathbb{L}([a, b]) = \{E \cap [a, b] \mid E \in \mathbb{L}\} \quad (= \mathbb{L}_{[a,b]}).$$

Det kan (ret nemt) vises, at $([a, b], \mathbb{L}([a, b]), m)$ er et fuldstændigt målrum, og at $\mathbb{B}([a, b]) \subseteq \mathbb{L}([a, b])$. Bemærkning i afsnittet ovenfor sammen med den supplerende opgave på ugeseddel 6 kan bruges til at vise, at hvis $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ er Riemannintegrabel, så er $f \in \mathcal{L}([a, b], \mathbb{L}([a, b]), m)$, og

$$\int_{[a,b]} f dm = \int_a^b f(x)dx.$$

Med andre ord, $\mathcal{L}([a, b], \mathbb{L}([a, b]), m)$ indeholder alle Riemannintegrable funktioner $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, og Lebesgueintegralet stemmer overens med Riemannintegralet, når Riemannintegralet er defineret.

Der findes eksempler på Riemannintegrable funktioner, som ikke er Borelmålelige.

Målelige funktioner (1.38)

Et målrum, $(\Omega, \mathcal{F})$ er et 2-tubel, hvor Ω betegner en mængde, og $\mathcal{F}$ er en σ-algebra på Ω.

Lad $(\Omega, \mathcal{F})$, $(\Lambda, \mathcal{G})$ betegne to målrum og $f: \Omega \to \Lambda$ betegne en fkt.
Definition:

f siges at være målelig, hvis: $\forall G \in \mathcal{G}: f^{-1}(G) \in \mathcal{F}$

(betegnelser $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$-målelig, $\mathcal{F}$-målelig, $\mathcal{G}$-målelig benyttes også)

Hvis μ er et mål på $(\Omega, \mathcal{F})$, da siges en $(\mathcal{M}(\mu), \mathcal{G})$-målelig fkt. at være μ-målelig. ($\mathcal{M}(\mu)$ som def. i 1.28)

Lad $f: \Omega \to \Lambda$ betegne en fkt. og $\mathcal{H}$ en brokægning på Λ
Definér: $f^{-1}(\mathcal{H}) := \{f^{-1}(H) \mid H \in \mathcal{H}\}$
Med denne notation ser vi, at f er målelig hviss $f^{-1}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{F}$

Lad $(\Omega, \mathcal{F})$, $(\Lambda, \mathcal{G})$, $(\Gamma, \mathcal{H})$ betegne målrum og lad $f: \Omega \to \Lambda$, $g: \Lambda \to \Gamma$ være målelige funktioner
Påstand: $g \circ f: \Omega \to \Gamma$ er målelig.
Bevis:
Da g er målelig gælder at $g^{-1}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{G}$
f er målelig, dvs. $f^{-1}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{F}$; specielt har vi, at $f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{H})) \subseteq \mathcal{F}$
Dvs. $f \circ g$ er målelig $\square$

Lad $f: \Omega \to \Lambda$ betegne en funktion, og $\mathcal{H}$ betegne en brokagn. på Λ

Påstand: $\sigma(f^{-1}(\mathcal{H})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{H}))$

Bevis:

$\mathcal{F}_0 := f^{-1}(\mathcal{H})$, $\mathcal{F} := f^{-1}(\sigma(\mathcal{H}))$

Da $\mathcal{H} \subseteq \sigma(\mathcal{H})$ (pr. def. af $\sigma(\mathcal{H})$) gælder $f^{-1}(\mathcal{H}) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{H}))$

Jvf. P.3.1-3 er $f^{-1}(\sigma(\mathcal{H}))$ ikke-tom og (c, uc)-stabil (da $\sigma(\mathcal{H})$ er (c,uc)-stabil

Dvs. $f^{-1}(\sigma(\mathcal{H}))$ er en σ-algebra indh. $f^{-1}(\mathcal{H})$.

Af 1.5.3 følger, at $\sigma(f^{-1}(\mathcal{H})) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{H}))$, dvs. $\sigma(\mathcal{F}_0) \subseteq \mathcal{F}$

Definer $\mathcal{H}_1 := \{B \subseteq \Lambda \mid f^{-1}(B) \in \sigma(\mathcal{F}_0)\}$

Lad $B, \{B_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{H}_1$

Af P.3.2. følger, at $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c \in \sigma(\mathcal{F}_0)$ da $\sigma(\mathcal{F}_0)$ er (c)-stabil og da vi jo har, idet $B \in \mathcal{H}_1$, at $f^{-1}(B) \in \sigma(\mathcal{F}_0)$.

$f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n)$, jvf. P.3.1. Da, $\{B_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{H}_1$ og $\sigma(\mathcal{F}_0)$ er (uc)-stabil gælder, at $f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \in \sigma(\mathcal{F}_0)$. P.3.3 giver desuden (da $\Theta, \Omega \in \sigma(\mathcal{F}_0)$), at $\mathcal{H}_1$ er ikke-tom. Dvs. $\mathcal{H}_1$ er en σ-algebra

$f^{-1}(\mathcal{H}) =: \mathcal{F}_0 \underset{1.5.3}{\subseteq} \sigma(\mathcal{F}_0)$ af def. på $\mathcal{H}_1$ ser vi, at $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_1$

Af 1.5.3 følger, at (da $\mathcal{H}_1$ er en σ-algebra og $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}$) $\sigma(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}_1$

$\Rightarrow f^{-1}(\sigma(\mathcal{H})) \subseteq f^{-1}(\mathcal{H}_1) \underset{\text{dif. af } \mathcal{H}_1 \text{ og } \mathcal{F}_0, \mathcal{F}}{\Longrightarrow} \mathcal{F} \subseteq \sigma(\mathcal{F}_0)$

Alt i alt kan vi konkludere, at $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_0)$, eller $f^{-1}(\sigma(\mathcal{H})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{H}))$

□

Påstand:

Lad $(\Omega, \mathcal{F})$, $(\Lambda, \mathcal{G})$ betegne to målrum

$\mathcal{G}_0$ er en brolægn. på Λ, således at $\sigma(\mathcal{G}_0) = \mathcal{G}$ (1.38.6)

$f: \Omega \to \Lambda$ er målelig $\iff \forall G_0 \in \mathcal{G}_0 : f^{-1}(G_0) \in \mathcal{F}$

Bevis:

'$\Rightarrow$'

f målelig, dvs. $\forall G \in \mathcal{G}: f^{-1}(G) \in \mathcal{F}$, da $\mathcal{G}_0 \subseteq \sigma(\mathcal{G}_0) = \mathcal{G}$
gælder specielt, at $\forall G_0 \in \mathcal{G}_0 : f^{-1}(G_0) \in \mathcal{F}$.

'$\Leftarrow$'

$\forall G_0 \in \mathcal{G}_0 : f^{-1}(G_0) \in \mathcal{F} \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{G}_0) \subseteq \mathcal{F}$

Da $\mathcal{F}$ er en σ-algebra, følger af 1.5.3, at $\sigma(f^{-1}(\mathcal{G}_0)) \subseteq \mathcal{F}$,
men vi har lige vist, at $\sigma(f^{-1}(\mathcal{G}_0)) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{G}_0))$.
$\mathcal{G}_0$ var valgt således, at $\sigma(\mathcal{G}_0) = \mathcal{G}$. Dvs $f^{-1}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{F}$.
Det svarer jvf tidl. avg. præcist til, at $f: \Omega \to \Lambda$ er målelig. □

Denne sætn. er selvsagt meget nyttig til at tjekke om f er målelig.
Istedet for at tjekke, at $f^{-1}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{F}$, skal vi blot tjekke $f^{-1}(\mathcal{G}_0) \subseteq \mathcal{F}$,
for en brolægning $\mathcal{G}_0$, som opfylder $\sigma(\mathcal{G}_0) = \mathcal{G}$.

Borel funktioner (1.39)

Hvis (Ω, d) betegner et metrisk rum, giver det jvf. kapitlet 'Borel σ-algebra' (1.8) mening, at tale om Borel σ-algebraen $\mathcal{B}(\Omega)$ på Ω, defineret som den mindste σ-algebra indeholdende alle åbne mængder (eller ækvivalent, jvf. 1.8, alle lukkede mængder).

Således er $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ et målrum

Fra og med dette kapitel er det underforstået, at vi pr. automatik betragter målrummet $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ hvis (Ω, d) er et metrisk rum.

Hvis Ω, Λ er metriske rum (vi droppar notationen (Ω, d) og lader det være indforstået, at vi kan finde en 'passende' metrik), da siges en $(\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{B}(\Lambda))$-målelig funktion, f, at være Borel-målelig. f siges desuden at være en Borelfunktion.

Eksempel: En Borel funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en funktion fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$ som er målelig mht. Borel σ-algebraen $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ på $\mathbb{R}$.

Påstand: $f \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \Rightarrow f$ er en Borelfunktion

Bevis:

En funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er kontinuert hviss vi for en vilk. åben delmængde af $\mathbb{R}^m$, G har, at $f^{-1}(G)$ er åben i $\mathbb{R}^n$.

Da brolægn. af alle åbne mængder i $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{G}$, opfylder $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ (1.8) følger af sætn. vist i kap. 'Målelige funktioner' (1.38), at f er Borelmålig, da $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ genereres af alle åbne delmængder af $\mathbb{R}^n$ □

Reelle funktioner (1.40)

$(\Omega, \mathcal{F})$ betegner et målrum.

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ betegner en funktion.

Påstand: f målelig $\iff \forall a \in \mathbb{R}: \{f \leq a\} \in \mathcal{F}$

Bevis:

Af 1.10 'Borel σ-algebraen på $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}^k$' følger, at for $\mathcal{F} := \{F \subseteq \mathbb{R} \mid \exists a \in \mathbb{R}:]-\infty, a] = F\}$ gælder at $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Det ønskede følger af sætn. 1.38.6 i 'Målelige funktioner' □

Påstand: Hvis $f: \Omega \to \mathbb{R}$ er målelig og $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en Borel funktion, da er $g \circ f$ målelig.

Bevis:

Det ønskede følger direkte af sætningen om sammensætning af målelige funktioner i kap. 'Målelige funktioner' (1.38) □

Sammenholdt med resultatet i 1.39, at enhver kont. funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er Borel-målelig, får vi bl.a., at hvis f betegner en målelig fkt. fra Ω ind i $\mathbb{R}$, har vi, at f^2, $\sin(f)$, e^f, $\ldots: \Omega \to \mathbb{R}$ er målelige funktioner.

Påstand:

Hvis $f_1, f_2, \ldots: \Omega \to \mathbb{R}$ betegner målelige funktioner, gælder at

$$\sup_{n \geq 1} f_n \;,\; \inf_{n \geq 1} f_n \;,\; \limsup_{n \to \infty} f_n \;,\; \liminf_{n \to \infty} f_n$$

er målelige funktioner (fra Ω ind i $\mathbb{R}$)

Da $\mathcal{F}$ er $(\cup c, \cap c)$-stabil (da $\mathcal{F}$ er en σ-algebra) fås

Lad $a \in \mathbb{R}$:

$$\{\sup_{n\geq 1} f_n \leq a\} = \{\forall n \geq 1 : f_n \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \leq a\} \in \mathcal{F}, \text{ da } \{f_n \leq a\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{F}$$

$$\{\inf_{n\geq 1} f_n \leq a\} = \{\exists n \geq 1 : f_n \leq a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f_n \leq a\} \in \mathcal{F}, \text{ da } \text{---}\text{''}\text{---}$$

Af den første sætn. i dette afsnit (1.40.1) følger, at $\sup_{n\geq 1} f_n$, $\inf_{n\geq 1} f_n$ er målelige.

Da $\limsup_{n\to\infty} f_n \overset{\text{P.4}}{:=} \inf_{n\geq 1} \{\sup_{j\geq n} f_j\}$, $\liminf_{n\to\infty} f_n := \sup_{n\geq 1} \{\inf_{j\geq n} f_j\}$ ser vi, jvf. det netop viste, at $\limsup_{n\to\infty} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$ er målelige. □

Påstand:

Antag $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ er målelige for alle $n \geq 1$, og at f_n konvergerer pkt.vis mod f, dvs. $\forall \omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$; da er f målelig.

Bevis:

Ifølge P.4.22 gælder at $\forall \omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$ hviss $\liminf_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n = f$, men vi har i den foregående sætn. netop vist at $\limsup_{n\to\infty} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$ er målelige under de givne omstændigheder □

Grænsesætningen for målelige funktioner (1.41)

(M,d) betegner et metrisk rum, $(\Omega,\mathcal{F})$ betegner et målelig rum

$f_1, f_2, \ldots$ er målelige funktioner fra Ω og ind i M.

Hvis $\forall \omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$ $\quad (f:\Omega \to M,\ f \text{ en fkt.})$

Da er f målelig.

Bevis:

$\mathcal{G} := \{G \subseteq M \mid G \text{ lukket}\}$ ifølge 1.8 gælder $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(M)$

Lad $G \in \mathcal{G}$

Definér $\varphi : M \to \mathbb{R}$; $\varphi(x) := \inf_{y\in G} d(x,y) = d(x,G)$ $\quad x \in G$.

Af P.5.20 følger (+def. på kont.), at $\varphi \in C^0(M,\mathbb{R})$

Af afsnit 1.39 'Borel funktioner' følger (da φ er kont.), at φ er (Borel) målelig.

Da f_n er målelig for alle $n \geq 1$, følger af 1.38.4 ('Målelige funktioner'), at

$g_n := \varphi \circ f_n$ er målelig for alle $n \geq 1$ $(g_n : \Omega \to \mathbb{R})$ Definér $g := \varphi \circ f$ $(g:\Omega \to \mathbb{R})$

$$\forall \omega \in \Omega,\ g(\omega) = \varphi(f(\omega)) = \lim_{n\to\infty} \varphi(f_n(\omega)) = \lim_{n\to\infty} g_n$$

Da $g_n : \Omega \to \mathbb{R}$ er målelig for alle $n \geq 1$, følger af 1.40.4 ('Reelle funktioner'), at $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ er målelig. Af def. på, at g er målelig, vil dette sige:

$$\forall H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \quad g^{-1}(H) \in \mathcal{F} \quad \text{(husk de 'usskrevne' regler for notation indført i 1.39)}$$

Specielt gælder, at $g^{-1}(O) \in \mathcal{F}$.

Ifølge P.5.21 : $\varphi^{-1}(O) = G$ (da G er lukket), da $g^{-1} = f^{-1}(\varphi^{-1})$ har vi:

$f^{-1}(G) \in \mathcal{F}$.

G var et vilk. element i $\mathcal{G}$, da $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, følger af 1.38.6 (Målelige fkt.), at f er målelig.

□

σ-algebraen genereret af funktioner (1.42)

Ω betegner en mængde, $(\Lambda, \mathcal{G})$ betegner et måleligt rum

$\mathcal{F}$ betegner en σ-algebra på Ω, således at $f: \Omega \to \Lambda$ er målelig.
Dvs. $f^{-1}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{F}$. $\mathcal{G}$ er pr. antagelse en σ-algebra af 1.38.5 (Målelige funktioner) følger, at $f^{-1}(\mathcal{G})$ er en σ-algebra. (benyt, at da $\mathcal{G}$ σ-algebra: $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$)
Af overvejelserne i 1.38 (Målelige funktioner) er det klart, at $f^{-1}(\mathcal{G})$ er den mindste σ-algebra på Ω som 'gør' f målelig.
Vi kan derfor (med rette) definere: $\sigma(f) := f^{-1}(\mathcal{G}) = \{f^{-1}(G) \mid G \in \mathcal{G}\}$

Antag, at $(\Lambda_j, \mathcal{G}_j)$, $j = 1, \dots, n$ er målelige rum; samt at $f_j : \Omega \to \Lambda_j$, $j = 1, \dots, n$ er funktioner.
Definer $\sigma(f_1, f_2, \dots, f_n) := \sigma\{f_j^{-1}(G_j) \mid j \in \{1, \dots, n\}, G_j \in \mathcal{G}_j\}$

$\sigma(f_1, \dots, f_n)$ er den mindste σ-algebra på Ω, som gør $f_1, \dots, f_n$ målelige.

σ-algebraen, vi leder efter, skal indeholde $f_j^{-1}(\mathcal{G}_j)$, jvf. def. af at f_j 'er' målelig for $j = 1, 2, \dots, n$. (At $f_j^{-1}(\mathcal{G}_j)$ er en σ-alg. for $j = 1, \dots, n$ spiller ikke så betydelig en rolle som i tilfældet $n = 1$, nu kan vi ikke direkte benytte en 'foreningsmgd.' af $f_j^{-1}(\mathcal{G}_j)$-erne el. lign. som vor kandidat, Vi går derfor tilbage til def. 1.5.3, som 'giver' det ønskede.

Endnu mere generelt og med samme 'arg' har vi:
J betegner en mængde: $\forall j \in J$ betegner $(\Lambda_j, \mathcal{G}_j)$ et målrum og $f_j : \Omega \to \Lambda_j$ en fkt
$\sigma(f_j \mid j \in J) := \sigma\{f_j^{-1}(G) \mid j \in J, G \in \mathcal{G}_j\}$ er da den mindste σ-algebra som gør f_j målelig for alle $j \in J$.

Denne notation benyttes i det næste resultat...

Ω, J betegner mængder

For alle $j \in J$ betegner $(\Lambda_j, \mathcal{G}_j)$ et måleligt rum og $f_j : \Omega \to \Lambda_j$ en funktion
$\mathcal{F} := \sigma(f_j \mid j \in J)$

$(\Gamma, \mathcal{H})$ betegner et måleligt rum og $g : (\Gamma, \mathcal{H}) \to (\Omega, \mathcal{F})$ en funktion

Påstand: g målelig $\iff$ $f_j \circ g$ er målelig for alle $j \in J$.

Bevis:

'$\Rightarrow$':

g er $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$-målelig. Udfra vort 'valg' af $\mathcal{F}$ og vort foregående resultat ser vi at f_j er målelig for alle $j \in J$.
Af 1.38.4 ('Målelige funktioner') følger, at $f_j \circ g$ er målelig for alle $j \in J$ (Sammensætn. af målelige funktioner er målelig).

'$\Leftarrow$':

$f_j \circ g$ er målelig for alle $j \in J$. Pga. vort 'valg' af $\mathcal{F}$ er det jvf. 1.38.4 ('Målelige funktioner') nok at tjekke, at $\forall j \in J, G_j \in \mathcal{G}_j : g^{-1}(f_j^{-1}(G_j)) \in \mathcal{H}$. (*)
Da $g^{-1}(f_j^{-1}(\cdot)) = (f_j \circ g)^{-1}(\cdot)$ og da $f_j \circ g$ var antaget at være målelig for alle $j \in J$ er (*) opfyldt $\square$

Produkt σ-algebra (1.43)

$(\Omega_j, \mathcal{F}_j)$ betegner et målligt rum for $j = 1, 2, \ldots, n$

Produktmængden: $\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n := \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \mid \omega_1 \in \Omega_1, \ldots, \omega_n \in \Omega_n\}$

Definer: $\rho_j : \Omega_1, \ldots, \Omega_n \longrightarrow \Omega_j$,

$\rho_j(\omega_1, \ldots, \omega_n) := \omega_j$, for alle $j = 1, \ldots, n$ og $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$

Produkt σ-algebraen: $\mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_n := \sigma(\rho_1, \ldots, \rho_n)$

$\forall A_1 \subseteq \Omega_1, \ldots, A_n \subseteq \Omega_1$:

$$\rho_j^{-1}(A_j) = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{j-1} \times A_j \times \Omega_{j+1} \times \ldots \Omega_n \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$\bigcap_{j=1}^{n} \rho^{-1}(A_j) = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

Af def. på $\sigma(\rho_j \mid j \in J)$ (dvs. $\mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_n$) i kap. 1.42 ('$\sigma$-alg. genereret af fkt.') følger, at $\mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_n = \sigma\{A_1 \times \cdots \times A_n \mid A_1 \in \mathcal{F}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}_n\}$

$f : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_n)$ (f fkt.)

$f_j : \Omega \longrightarrow \Omega_j$, $j = 1, \ldots n$ således, at $f(\omega) = (f_1(\omega), \ldots, f_n(\omega))$ for alle $\omega \in \Omega$.

Det er klart, at $(\rho_j \circ f) = f_j$, $j = 1, \ldots, n$.

[Af def. på $\mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_n$ følger af 1.42.4 ('σ-alg. genereret af fkt.'), at
[f er målelig hviss f_j er målelig for $j = 1, \ldots, n$. [1.43.3]

(Ω_j, d_j) betegner et metrisk rum for $j=1,\dots,n$

Lad $\omega^* = (\omega_1^*, \dots, \omega_n^*)$; $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$

Definér $d(\omega^*, \omega) := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} d_j(\omega_j^*, \omega_j)^2}$ ('produkt metrikken' – en metrik på $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$
tjeck evt. de tre betingelser

Der gælder (kan evt. vises ved induktion), at (for givet $r > 0$)

$$b(\omega, r) \subseteq b(\omega_1, r_1) \times \cdots \times b(\omega_n, r_n) \subseteq b(\omega, r\cdot\sqrt{n}) \qquad (*)$$

($b(\omega, r)$: en 'indskrevet' kugle; $b(\omega_1, r_1) \times \cdots \times b(\omega_n, r_n)$: en 'kasse' med ligestore sider; $b(\omega, r\cdot\sqrt{n})$: en 'omskreven' cirkel)

$$r_k := n^{-k/2} = \frac{1}{(\sqrt{n})^k} \quad k = 1, 2, \dots \qquad (\dagger)$$

$$\mathcal{H} := \{ b(\omega_1, r_1) \times \cdots \times b(\omega_n, r_n) \mid \underbrace{r > 0}_{r_1 > 0, \dots, r_n > 0}, \omega_1 \in \Omega_1, \dots, \omega_n \in \Omega_n \}$$

Det er klart, at hvis $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ er separable metriske rum er $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ et separabelt metrisk rum. (tjeck evt. i P.5)

Antag $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ separable metriske rum; med brug af $(\dagger)$ i $(*)$, og udfra def. af $\mathcal{B}(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n)$, som den mindste σ-algebra indeholdende alle åbne mængder i $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$, er det klart (jvf. $(*)$), at $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{B}(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n)$, og af 1.9 ('Generering af Borel σ-algebra') følger derfor, at $\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n)$
Af def. på $\mathcal{B}(\Omega_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\Omega_n)$ (se foregående side), def. på $\mathcal{H}$ har vi dermed

$$\mathcal{B}(\Omega_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\Omega_n) = \mathcal{B}(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n)$$

(Dette siger noget specielt om Borel σ-algebra)

Opsummering:

Specielt har vi for $\Omega_1, \dots, \Omega_n = \mathbb{R}$:

Hvis $f_1, \dots, f_n$ er målelige fkt. fra $(\Omega, \mathcal{F})$ ind i $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, da er $f(\omega) = (f_1(\omega), \dots, f_n(\omega))$ en målelige fkt fra $(\Omega, \mathcal{F})$ ind i $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$

Hvis $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ er en Borel fkt., da er $\varphi \circ f$ målelig fkt. fra $(\Omega, \mathcal{F})$ ind i $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$. (Kan bruge tidl. sammensætn. sætn. da $\mathcal{B}(\Omega_1) \otimes \mathcal{B}(\Omega_2) = \mathcal{B}(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n)$

f.eks.: Hvis f, g målelige er $f+g$, $f^2 + \sqrt{g}$ ... målelige.

Billedmål (1.44)

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ betegner et målrum (Ω en mgd, $\mathcal{F}$ σ-alg. på Ω, μ et mål på $(\Omega,\mathcal{F})$)

$(\Lambda, \mathcal{G})$ betegner et måleligt rum.

$f: \Omega \to \Lambda$ betegner en målelig funktion

Da er $\mu_f: \mathcal{G} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $\forall G \in \mathcal{G}$ $\mu_f(G) := \mu(f^{-1}(G))$ veldefineret (da f målelig)

Påstand: μ_f er et mål på $(\Lambda, \mathcal{G})$

Bevis:

$\mathcal{G}$ er pr. antagelse en σ-algebra, dvs. $\Theta \in \mathcal{G}$

$$\mu_f(\Theta) = \mu(f^{-1}(\Theta)) \underset{\text{P.3.3}}{=} \mu(\Theta) \underset{\mu \text{ mål på } (\Omega,\mathcal{F})}{=} 0$$

$\mu \geq 0$ da μ mål på $(\Omega,\mathcal{F}) \Rightarrow \mu_f \geq 0$

Lad $\{G_n\}_{n\geq 1}$ disjunkte $\in \mathcal{G}$, da gælder, at $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \in \mathcal{G}$, da $\mathcal{G}$ er en σ-algebra og $f^{-1}(G_n) \in \mathcal{F}$ for alle $n \geq 1$ og $f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n) \in \mathcal{F}$ da f er en målelig funktion.

$$\mu_f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) = \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right)\right) \underset{\text{P.3.1}}{=} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(G_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(f^{-1}(G_n))$$

$\{G_n\}_{n\geq 1}$ disjunkte $\Rightarrow \{f^{-1}(G_n)\}_{n\geq 1}$ disjunkte
+ μ mål på $\mathcal{F}$

Dvs. μ_f opfylder 1.1.4-5 og er dermed et mål på $\mathcal{G}$ □

$g: (\Lambda, \mathcal{G}) \to (\Gamma, \mathcal{H})$ betegner en anden målelig funktion

Sammensætn. af måleligt funktioner er målelig, dvs. $h := g \circ f$ er måleligt.

Vi får, for $H \in \mathcal{H}$:

$$\mu_h(H) = \mu((g\circ f)^{-1}(H)) = \mu(f^{-1}(g^{-1}(H))) = \mu_f(g^{-1}(H)) = (\mu_f)_g(H)$$

Dvs. hvis $h = g \circ f$ er $\mu_h = (\mu_f)_g$ [1.44.3]

Simple og diskrete funktioner (1.45)

$(\Omega, \mathcal{F})$ betegner et målelig rum

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ betegner en funktion

f kaldes simpel, hviss $\exists a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$:

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j 1_{A_j}, \quad A_j = \{f = a_j\} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$A_1, \dots, A_n$ er disjunkte mængder i $\mathcal{F}$ og $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

---

f kaldes diskret, hviss $\exists \{a_n\}_{n \geq 1} \in \mathbb{R}$:

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 1_{A_j}, \quad A_j = \{f = a_j\} \quad j = 1, 2, \dots$$

$A_1, A_2, \dots$ disjunkte mængder i $\mathcal{F}$ og $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Approximation af målelige funktioner (1.46)

$(\Omega, \mathcal{F})$ betegner et målligt rum

$f: (\Omega, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ betegner en vilkårlig målelig funktion

Da gælder:

$\exists f_1, f_2, \ldots$ diskrete funktioner fra Ω ind i $\mathbb{R}$

$\exists g_1, g_2, \ldots$ simple funktioner fra Ω ind i $\mathbb{R}$, således at

$\forall n \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega: \; f_n(\omega) \leq f(\omega) \leq f_n(\omega) + 2^{-n}$

$\forall \omega \in \Omega: \; f_1(\omega) \leq f_2(\omega) \leq \cdots$ og $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$

(Dvs. $\{f_n\}_{n\geq 1}$ er en 'voksende' følge af funktioner som konvergerer uniformt mod f.)

$\forall \omega \in \Omega: \; \lim_{n\to\infty} g_n = f$ (Dvs. $\{g_n\}_{n\geq 1}$ konvergerer punktvist mod f.)

Hvis $f \geq 0$ da gælder $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \ldots$

Bevis:

Definér for alle $\omega \in \Omega$:

$$f_n(\omega) = 2^{-n} \cdot \text{int}(2^n \cdot f(\omega)) \quad , \quad g_n(\omega) = \begin{cases} n & ; \; f_n(\omega) > n \\ f_n(\omega) & ; \; |f_n(\omega)| \leq n \\ -n & ; \; f_n(\omega) < -n \end{cases}$$

Hvis $k2^{-n} \leq f(\omega) < (k+1)2^{-n}$ (*) har vi, da $2^n \cdot k \cdot 2^{-n} = k$ og $2^n(k+1)2^{-n} = k+1$, at $f_n(\omega) = 2^{-n}k$ (†). Ved at lade k gennemløbe de hele tal – og dermed 'dække' den reelle akse med intervalle af typen (*) – ser vi, at f_n kan antage værdierne $\{0, \pm 2^{-n}, \pm 2 \cdot 2^{-n}, \pm 3\, 2^{-n}, \ldots\}$, dvs. f_n er diskret.

Af (*) og (†) ser vi, at $\forall \omega \in \Omega: \; f_n(\omega) \leq f(\omega) \leq f_n(\omega) + 2^{-n}$

$\Rightarrow 0 \leq f(\omega) - f_n(\omega) \leq 2^{-n}$ ved at lade $n \to \infty$ ser vi, at $\lim_{n\to\infty} f_n = f$

Lad $n \in \mathbb{N}$ være givet, der eksisterer for et givet $\omega \in \Omega$ et $k \in \mathbb{Z}$ (*), således:

$k2^{-n} \leq f(\omega) < (k+1)2^{-n} \Rightarrow 2k2^{-(n+1)} \leq f(\omega) < 2(k+1)2^{-(n+1)}$

Af dette og (†) ser vi, at $f_n(\omega) = 2^{-n}k$ mens $f_{n+1}(\omega) = \begin{cases} 2^{-(n+1)}(2k) & , \; 2k \in 2^{n+1} f(\omega) < 2k+1 \\ 2^{-(n+1)}(2k+1) & , \; 2k+1 \leq 2^{n+1} f(\omega) < 2k+2 \end{cases}$

Heraf er det klart, at $f_n \leq f_{n+1}$.

Af def. på g_n og af 4) følger, at g_n kan antage værdierne $\{0, \pm 2^{-n}; \pm 2 \cdot 2^{-n}; \pm 3 \cdot 2^{-n}; \dots; (n \cdot 2^n)\, 2^{-n}\}$, dvs. g_n er simpel.

Udfra def. af g_n og egenskaberne for f_n se vi, at $\forall \omega \in \Omega$: $\lim_{n \to \infty} g_n(\omega) = f(\omega)$ samt, at hvis $f \geq 0$: $0 \leq g_1(\omega) \leq g_2(\omega) \leq \dots$

□

Funktioner på produktrum (1.48)

$(S,\mathcal{A})$; $(T,\mathcal{B})$; $(M,\mathcal{M})$ betegner målelige rum

Lad $f:(S\times T,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})\to(M,\mathcal{M})$ og lad $a\in S$, $b\in T$ være givet

Definér $\forall t\in T: f_a(t):=f(a,t)$; $\forall s\in S: f^b(s)=f(s,b)$

Da gælder: $f_a:T\to M$, $f^b:S\to M$ er målelige funktioner

Bevis:

Definer $p_a:T\to S\times T$ ved $\forall t\in T: p_a(t)=(a,t)$

For $A\times B\in S\times T$ har vi $p_a^{-1}(A\times B)=\begin{cases}B, & a\in A\\ \emptyset, & a\notin A\end{cases}$

Af def. på $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ (se evt. 1.43) og 1.38.6 i kap. 'Målelige funktioner' ser vi, at p_a er målelig.
Da sammensætn. af målelige fkt. er målelig (1.38.4) og $f_a=f\circ p_a$, ser vi, at f_a er målelig.
En avg. for at f_b er målelig er helt analog med ovenstående □

Notation: f_a, f^b kaldes de partielle funktioner for f $f(\cdot,b):=f^b$, $f(a,\cdot):=f_a$