

Sandsynligheds rum (2.1)

Et sandsynlighedsrum er et triple $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, der opfylder:

Ω er en mængde

$\mathcal{F}$ er en σ -alg. på Ω

P er et mål: $\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$P(\Omega) = 1$ (P er et ss.mål)

P er et mål og specielt et indhold, derfor gælder formlerne 1.3.1-8, 1.4.1-6 og 1.19.2-6 for P .

Af 1.3.2 følger, da $P(\Omega) = 1$, at $\forall F \in \mathcal{F}: 0 \leq P(F) \leq 1$

Af 1.3.1 følger $\forall F \in \mathcal{F}: P(\Omega) = P(F \cap \Omega) + P(\Omega \setminus F) = P(F) + P(F^c)$

$\Rightarrow P(F^c) = 1 - P(F)$ (Vi brugte: $\forall F \in \mathcal{F}: P(F) \leq 1 < \infty$)

Lad $\{A_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{F}$ og antag $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 1$

$\forall F \in \mathcal{F}; n \geq 1: P(A_n \cap F) \leq P(F) = P(F \cap A_n) + P(F \cap A_n^c) \leq P(F \cap A_n) + P(A_n^c)$

$= P(F \cap A_n) + 1 - P(A_n) \Rightarrow 0 \leq P(F) - P(A_n \cap F) \leq 1 - P(A_n)$

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 1$ ser vi, at $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n \cap F) = P(F)$

Alt i alt har vi altså følgende formler:

$\forall F \in \mathcal{F}: 0 \leq P(F) \leq 1$

$P(F^c) = 1 - P(F)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \stackrel{=1}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n \cap F) = P(F)$

Betingede sandsynligheder (2.2)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ betegner et ss-rum.

Lad $A, B \in \mathcal{F}$

$$P(A|B) := \begin{cases} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} & , P(B) > 0 \\ P(A) & , P(B) = 0 \end{cases}$$

Påstand: Lad $B \in \mathcal{F}$, $P(\cdot|B): \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\forall F \in \mathcal{F}: P(\cdot|B)(F) := P(F|B)$
 $P(\cdot|B)$ er et ss.-mål på $\mathcal{F}$

Bevis:

Af 1.20.2-3 følger, at $P(\cdot|B)$ er et mål på $\mathcal{F}$.

$$\text{Da } P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \text{ for } P(B) > 0$$

og $P(\Omega|B) = P(\Omega) = 1$ for $P(B) = 0$ følger det ønskede
udfra def. af ss.-mål

□

Påstand:

$$\forall A_0, \dots, A_n \in \mathcal{F}: P\left(\bigcap_{j=0}^n A_j \mid A_0\right) = \prod_{j=1}^n P(A_j \mid A_0 \cap \dots \cap A_{j-1})$$

Bevis:

Bevis ved induktion på n :

$$n=1: P(A_0 \cap A_1 \mid A_0) = \frac{P(A_0 \cap A_1 \cap A_0)}{P(A_0)} = \frac{P(A_0 \cap A_1)}{P(A_0)} = P(A_1 \mid A_0)$$

$$\text{Antag at } P\left(\bigcap_{j=0}^n A_j \mid A_0\right) = \prod_{j=1}^n P(A_j \mid A_0 \cap \dots \cap A_{j-1})$$

$$\text{Vi vil vise, at } P\left(\bigcap_{j=0}^{n+1} A_j \mid A_0\right) = \prod_{j=1}^{n+1} P(A_j \mid A_0 \cap \dots \cap A_{j-1})$$

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{j=0}^{n+1} A_j \mid A_0\right) &= \frac{P(A_0 \cap (\bigcap_{j=0}^{n+1} A_j))}{P(A_0)} = \frac{P(\bigcap_{j=0}^{n+1} A_j)}{P(A_0)} = \frac{P(A_{n+1} \mid \bigcap_{j=0}^n A_j) \cdot P(\bigcap_{j=0}^n A_j)}{P(A_0)} \\
&= P(A_{n+1} \mid \bigcap_{j=0}^n A_j) \frac{P((\bigcap_{j=0}^n A_j) \cap A_0)}{P(A_0)} = P(A_{n+1} \mid \bigcap_{j=0}^n A_j) P(\bigcap_{j=0}^n A_j \mid A_0) \\
&= P(A_{n+1} \mid \bigcap_{j=0}^n A_j) \prod_{j=1}^n P(A_j \mid A_0 \cap \dots \cap A_{j-1}) = \prod_{j=1}^{n+1} P(A_j \mid \bigcap_{i=0}^{j-1} A_i)
\end{aligned}$$

induktionsantagelse □

Påstand:

$$\forall A_0, \dots, A_n \in \mathcal{F}: P(\bigcap_{j=0}^n A_j) = P(A_0) P(A_1 \mid A_0) \cdot \dots \cdot P(A_n \mid A_0 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
P(\bigcap_{j=0}^n A_j) &= P(\bigcap_{j=0}^n A_j \mid A_0) \cdot P(A_0) \\
&= P(A_0) \prod_{j=1}^n P(A_j \mid A_0 \cap \dots \cap A_{j-1}) = P(A_0) P(A_1 \mid A_0) \cdot \dots \cdot P(A_n \mid A_0 \cap \dots \cap A_{n-1})
\end{aligned}$$

jef. den foregående sætning. □

Lad $\{A_n\}_{n \geq 0} \in \mathcal{F}$, da $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \downarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ og da $P(\cdot), P(\cdot \mid B)$ er ss. mål og dermed endelige mål på $\mathcal{F}$ følger af 1.4.3 og ovenstående, at:

$$P(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \mid A_0) = \prod_{j=1}^{\infty} P(A_j \mid A_0 \cap \dots \cap A_{j-1}) \quad \text{samt}$$

$$P(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n) = P(A_0) \prod_{j=1}^{\infty} P(A_j \mid A_0 \cap \dots \cap A_{j-1})$$

Påstand:

Lad J betygne en mængde (som er (højst) tællelig)

Lad $\{A_j \mid j \in J\} \subseteq \mathcal{F}$ betygne en mgd. (i $\mathcal{F}$) af disjunkte mængder.

Lad $B \in \mathcal{F}$: $B \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$

Da gælder: $P(B) = \sum_{j \in J} P(B|A_j)P(A_j)$ (loven om total ss.)

$$P(A_n|B) = \frac{P(A_n)P(B|A_n)}{\sum_{j \in J} P(B|A_j)P(A_j)} \quad (\text{Bayes' formel})$$

Beweis:

$$P(B) = P(B \cap (\bigcup_{j \in J} A_j)) \underset{\text{P.2.5}}{=} P(\bigcup_{j \in J} (B \cap A_j)) \underset{\substack{\text{1.1.5} \\ \text{da } A_j\text{-erne disjunkte}}}{=} \sum_{j \in J} P(B \cap A_j) = \sum_{j \in J} P(B|A_j)P(A_j)$$

$$\begin{aligned} P(A_n|B) &= \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A_n)}{P(B)} = \frac{P(B|A_n) \cdot P(A_n)}{P(B)} \\ &\quad \uparrow \text{ def. på } P(B|A_n) \\ &= \frac{P(A_n)P(B|A_n)}{\sum_{j \in J} P(B|A_j)P(A_j)} \\ &\quad \uparrow \text{ loven om total ss.} \end{aligned}$$

□

Uafhængighed (2.3)

Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ betegne et ss.-mål.

$A, B \in \mathcal{F}$ siges at være uafh. hvis $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ siges at være uafh. hvis

$$P\left(\bigcap_{j \in \alpha} A_j\right) = \prod_{j \in \alpha} P(A_j), \quad \forall \alpha \subseteq \{1, \dots, n\}, \alpha \neq \emptyset \quad [2.3.1]$$

(Bm. der er $2^n - 1$ ikke-tomme delmængd. af $\{1, \dots, n\}$ og dermed $2^n - 1$ -n ikke-trivielle ligh.)

T betegner en endelig tællelig eller tællelig mængd.

$\{A_t \mid t \in T\} \in \mathcal{F}$ siges at være uafh. hvis

$$P\left(\bigcap_{t \in \alpha} A_t\right) = \prod_{t \in \alpha} P(A_t), \quad \forall \alpha \subseteq T, \alpha \text{ endelig}, \alpha \neq \emptyset$$

Lad $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ betegne to brolegn. på Ω : $\mathcal{G}, \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$

$\mathcal{G}, \mathcal{H}$ siges at være uafh. hvis

$$\forall G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}: P(G \cap H) = P(G)P(H)$$

Lad $A \in \mathcal{F}$, A siges at være uafh. af $\mathcal{G}$, hvis $\forall G \in \mathcal{G}: P(A \cap G) = P(A)P(G)$

Lad $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n$ betegne brokægh. på Ω , således at $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{F}$

$\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ siges at være uafh. hvis $\forall G_1 \in \mathcal{G}_1, G_2 \in \mathcal{G}_2, \dots, G_n \in \mathcal{G}_n$:

$$P\left(\bigcap_{j \in \alpha} G_j\right) = \prod_{j \in \alpha} P(G_j), \quad \forall \alpha \subseteq \{1, \dots, n\}, \alpha \neq \emptyset$$

T betegner en endelig tællelig el. tællelig mængde og $\{G_t | t \in T\}$ brokægh. på Ω således at $\{G_t | t \in T\} \subseteq \mathcal{F}$. $\{G_t | t \in T\}$ siges at være uafhængige hvis $\forall \alpha \subseteq T, \alpha \text{ endelig}, \alpha \neq \emptyset \quad \forall t \in \alpha: G_t \in \mathcal{G}_t: P\left(\bigcap_{t \in \alpha} G_t\right) = \prod_{t \in \alpha} P(G_t)$

Påstand:

$\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ betegner brokæghinger på Ω , således at $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{F}$

Definer $\mathcal{G}_j^* = \mathcal{G}_j \cup \{\Omega\}$, $j=1, \dots, n$, da er følgende udsagn ækvivalente:

1) $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n$ uafh.

2) $\mathcal{G}_1^*, \mathcal{G}_2^*, \dots, \mathcal{G}_n^*$ uafh.

3) $\forall G_1 \in \mathcal{G}_1^*, G_2 \in \mathcal{G}_2^*, \dots, G_n \in \mathcal{G}_n^*: P\left(\bigcap_{j=1}^n G_j\right) = \prod_{j=1}^n P(G_j)$

Bevis:

Ækvivalensen følger ud fra def. af uafh. for brokæghinger og da $P(\Omega)=1, A \cap \Omega = A$

□

Notation: $A, B \in \mathcal{F}$ uafh.: $A \perp\!\!\!\perp B$

$A \in \mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ brokægh. på Ω og $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$: $A, \mathcal{G}$ uafh.: $A \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$

$\mathcal{G}, \mathcal{H}$ brokægh. på Ω og $\mathcal{G}, \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$: $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ uafh.: $\mathcal{G} \perp\!\!\!\perp \mathcal{H}$

Uafhængighedskriterier for σ -algebra I (2.4)

$\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ betegner (nf)-stabile brolegn. på $\mathcal{X}$ indeholdt i $\mathcal{F}$

$Q_j : \mathcal{G}_j \rightarrow \mathbb{R}$, $j=1, 2, \dots, n$ således, at:

$$\forall G_1 \in \mathcal{G}_1, \dots, G_n \in \mathcal{G}_n : P(\bigcap_{j=1}^n G_j) = \prod_{j=1}^n Q_j(G_j) \quad \text{og} \quad (1)$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists H_1 \in \mathcal{G}_1, \dots, H_n \in \mathcal{G}_n : P(\bigcap_{j=1}^n H_j) > 1 - \varepsilon \quad (\text{trivielt for } \varepsilon > 1) \quad (2)$$

Da gælder:

$\sigma(\mathcal{G}_1), \dots, \sigma(\mathcal{G}_n)$ er uafh.

$$\exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} : \prod_{j=1}^n a_j = 1 \wedge (\forall G \in \mathcal{G}_j : P(G) = a_j Q_j(G) \text{ for } j=1, \dots, n)$$

Bevis: (Bemærk: Gøran henviser i app. 5 til at man 'kan' bevise sætn. i et specialtilfælde)

Lad $p \in \mathbb{N}$. Af (1) og (2) har vi, at $\exists H_{1p} \in \mathcal{G}_1, \dots, H_{np} \in \mathcal{G}_n$ der opfylder

$$P(\bigcap_{j=1}^n H_{jp}) = \prod_{j=1}^n Q_j(H_{jp}) > 1 - 2^{-p} \quad (\text{vi har sat } \varepsilon = 2^{-p}) \quad (*)$$

Definer:

$$H_p := \bigcap_{j=1}^n H_{jp} \quad , \quad H^p := \bigcap_{j=2}^n H_{jp}$$

$$b_p := \prod_{j=2}^n Q_j(H_{jp})$$

$$c_p := Q_1(H_{1p})$$

$$a_1 := \frac{b_1 P(H_{11})}{P(H_1)} \quad (a_1 = \text{konst} \in \mathbb{R})$$

$$\text{Bm.: } b_p \cdot c_p = P(\bigcap_{j=1}^n H_{jp}) > 1 - 2^{-p} > 0 \xrightarrow{(p \in \mathbb{N})} b_p \neq 0 \quad (+)$$

Vi beviser nu, at $\forall G \in \mathcal{G}_1: P(G) = a_1 Q_1(G)$; med passende ændringer i ovenstående def. og den følgende argumentation, hvad angår notationen, ser man, $\forall G \in \mathcal{G}_j: P(G) = a_j Q_j(G) \quad j=2, \dots, n$.

Lad $G \in \mathcal{G}_1$:

Vi benytter 1 på $G \cap H_p$:

$$P(G \cap H_p) = P((G \cap H_{1p}) \cap H_{2p} \cap \dots \cap H_{np}) = \underset{\substack{\uparrow \\ \mathcal{G}_1 \text{ (nf)-stabil + (1)}}}{Q_1(G \cap H_{1p})} \prod_{j=2}^n Q_j(H_{jp}) = Q_1(G \cap H_{1p}) \cdot b_p \quad (*)$$

Specielt har vi, at $P(G \cap H_1) = b_1 Q_1(G \cap H_{11})$

Når $G = H_{1p}$ har vi:

$$P(H_{1p} \cap H_1) = b_1 Q_1(H_{1p} \cap H_{11}) \xRightarrow{(+)} Q_1(H_{1p} \cap H_{11}) = \frac{P(H_{1p} \cap H_1)}{b_1} \quad (*_1)$$

$$\underset{2.1.4}{1} \geq \underset{1.3.2}{P(H_{1p})} \geq \underset{(*)}{P(H_p)} > 1 - 2^{-p}, \text{ da } 2^{-p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0 \text{ ser vi } \lim_{p \rightarrow \infty} P(H_{1p}) = 1$$

$$\text{Af 2.1.6 og } (*_1) \text{ følger dermed } \lim_{p \rightarrow \infty} Q_1(H_{1p} \cap H_{11}) = \frac{P(H_1)}{b_1} \quad (*_2)$$

$$\underset{2.1.4}{1} \geq \underset{(*)}{P(H_p)} > 1 - 2^{-p} \wedge \lim_{p \rightarrow \infty} 2^{-p} = 0 \Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} P(H_p) = 1$$

$$2.1.6 \text{ giver derfor } \lim_{p \rightarrow \infty} P(H_p \cap H_{11}) = P(H_{11}) \quad (*_3)$$

$$(*_2 + *_3) \xRightarrow{\substack{\uparrow \\ \text{regulærl. f.} \\ \text{konvergenti følger}}} \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{P(H_p \cap H_{11})}{Q_1(H_{1p} \cap H_{11})} \right) = \frac{b_1 P(H_{11})}{P(H_1)} = a_1 \quad (*_4)$$

Af @ anvendt med $G = H_{1p}$ og (+) følger, at $\lim_{p \rightarrow \infty} b_p = a_1$

$$\underset{2.1.4}{1} \geq \underset{1.3.2}{P(H_p)} \geq \underset{(*)}{P(H_p)} > 1 - 2^{-p} \wedge \lim_{p \rightarrow \infty} 2^{-p} = 0 \Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} P(H_p) = 1 \xRightarrow{2.1.6} \lim_{p \rightarrow \infty} P(G \cap H_p) = P(G) \quad (*_5)$$

$$(1) \Rightarrow P(G \cap H_p) = b_1 Q_1(G) \xRightarrow{(*_4 + *_5)} P(G) = a_1 Q_1(G)$$

Ovenstående arg. gav $\forall j \in \{1, \dots, n\} \exists a_j \in \mathbb{R} \forall G \in \mathcal{G}_j : P(G) = a_j Q_j(G) \quad (t_1)$

$$P(H_p) \prod_{j=1}^n a_j \stackrel{(*)}{=} \prod_{j=1}^n a_j Q_j(H_{jp}) = \prod_{j=1}^n P(H_{jp}), \text{ da } \lim_{p \rightarrow \infty} P(H_p) = \lim_{p \rightarrow \infty} P(H_{jp}) = 1$$

$$\text{ser vi, at } \prod_{j=1}^n a_j = 1 \quad (t_2)$$

Det resterer nu at vise, at $\sigma(g_1), \sigma(g_2), \dots, \sigma(g_n)$ er uafh.

Lad $\alpha \in \{1, \dots, n\}$, α ikke-tom. ; lad $G_j \in \mathcal{G}_j$ være givet for alle $j \in \alpha$

$$\text{Lad } p \in \mathbb{N}. \text{ Definér } G_{jp} := \begin{cases} G_j & j \in \alpha \\ H_{jp} & j \notin \alpha \end{cases}$$

$$\prod_{j=1}^n P(G_{jp}) \stackrel{(t_1)}{=} \prod_{j=1}^n a_j Q_j(G_{jp}) = \prod_{j=1}^n a_j \prod_{j=1}^n Q_j(G_{jp}) \stackrel{(t_2)}{=} \prod_{j=1}^n Q_j(G_{jp}) \stackrel{(t_1)}{=} P(\bigwedge_{j=1}^n G_{jp})$$

$\Downarrow$ def. af G_{jp} -ene

$$\prod_{j \in \alpha} P(G_j) \prod_{j \notin \alpha} P(H_{jp}) = P\left(\left(\bigwedge_{j \in \alpha} G_j\right) \cap \left(\bigwedge_{j \notin \alpha} H_{jp}\right)\right) \quad (t_3)$$

$$\underset{2.1.4}{1} \geq \underset{1.3.2}{P(H_{jp})} \geq P\left(\bigwedge_{j \notin \alpha} H_{jp}\right) > 1 - 2^{-p} \wedge \lim_{p \rightarrow \infty} 2^{-p} = 0 \implies \lim_{p \rightarrow \infty} P(H_{jp}) = \lim_{p \rightarrow \infty} P\left(\bigwedge_{j \notin \alpha} H_{jp}\right) = 1 \quad (t_4)$$

$$(t_3) + (t_4) + 2.1.6 \implies \prod_{j \in \alpha} P(G_j) = P\left(\bigwedge_{j \in \alpha} G_j\right). \text{ Dvs } g_1, \dots, g_n \text{ uafh.}$$

Af kap 'Uafhængighed' 2.3.6 følger, at $g_1^*, \dots, g_n^*$ er uafh.

Lad $G_2 \in \mathcal{G}_2^*$, $G_3 \in \mathcal{G}_3^*$, ..., $G_n \in \mathcal{G}_n^*$ være givet

Definer $\mu: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\nu: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$ således

$$\forall F \in \mathcal{F}: \mu(F) = P(F \cap G_2 \cap \dots \cap G_n), \quad \nu(F) = P(F) \cdot P(G_2) \cdot \dots \cdot P(G_n)$$

Af kap. 'Operationer på mål' 1.20.2-3 følger, at μ, ν er mål på $\mathcal{F}$.

Da P er et endeligt gælder desuden, at μ, ν er endelige mål på $\mathcal{F}$.

Vi har i det foregående netop vist (da $\mathcal{G}_1^*, \dots, \mathcal{G}_n^*$ viste sig at være uafh.) at

$\forall G \in \mathcal{G}_1^*: \mu(G) = \nu(G)$. Af entydighedssætn. for endelige mål (1.7) følger derfor

(med $\mathcal{F}_n = \mathcal{R}$, $n \geq 1$), at $\forall G \in \underbrace{\sigma(\mathcal{G}_1^*)}_{\text{hvis def. på } \mathcal{G}_1^*} = \sigma(\mathcal{G}_1): \mu(G) = \nu(G)$

Da $G_2, \dots, G_n$ vilk. får vi derfor udfra def. på μ, ν , at:

$$\forall G_1 \in \sigma(\mathcal{G}_1), G_2 \in \mathcal{G}_2^*, \dots, G_n \in \mathcal{G}_n^*: P\left(\bigcap_{i=1}^n G_i\right) = \prod_{i=1}^n P(G_i) \quad (\sigma(\mathcal{G}_1) \subseteq \mathcal{F})$$

Af 'Uafhængighed' 2.3.6 følger (husk $\mathcal{R} \in \sigma(\mathcal{G}_1)$), at $\sigma(\mathcal{G}_1), \mathcal{G}_2^*, \dots, \mathcal{G}_n^*$ er uafh.

Dette argument anvendes (med ændring i not.) $n-1$ gange, hvorved vi tilsidst får:

$\sigma(\mathcal{G}_1), \sigma(\mathcal{G}_2), \dots, \sigma(\mathcal{G}_n)$ er uafh.

□

Uafhængighedskriterier for σ -algebra II (2.5)

T betegner en endelig tællelig el. tællelig mængde

Lad $\{g_t \mid t \in T\}$ betegne en familie af (nf)-stabile uafh. brøgløgh. indh. i $\mathcal{F}$

Da gælder, at $\{\sigma(g_t) \mid t \in T\}$ er uafh., jvf. 2.4.

Påstand:

Lad $\{T_q \mid q \in Q\}$ betegne en familie af disjunkte delmængder af T og def.

$$\forall q \in Q: \quad \mathcal{H}_q := \bigcup_{t \in T_q} g_t, \quad \mathcal{F}_q := \sigma(\mathcal{H}_q)$$

Da gælder, at $\{\mathcal{F}_q \mid q \in Q\}$ er en familie af uafh. brøgløgninger.

Bevis:

Definer for $q \in Q$ $\hat{\mathcal{H}}_q := \{H_1 \cap \dots \cap H_n \mid n \in \mathbb{N}, \forall j \in \{1, \dots, n\}: H_j \in \mathcal{H}_q\}$

$\alpha \subseteq Q$, $\alpha \neq \emptyset$, α endelig tællelig

$$\forall H_q \in \hat{\mathcal{H}}_q, q \in Q \exists \alpha_q \subseteq T_q, \alpha_q \neq \emptyset, G_t \in g_t, t \in \alpha_q: \hat{H}_q = \bigcap_{t \in \alpha_q} G_t$$

(da g_t -erne er (nf)-stabile og jvf. def. på $\hat{\mathcal{H}}$ er α_q endelig tællelig)

Vi vælger for alle $q \in \alpha$ et sådant H_q , sæt $\beta = \bigcup_{q \in \alpha} \alpha_q$

Da α og $\alpha_q \subseteq T_q \subseteq T$, $q \in \alpha$ er endelig tællelige mængder er β en endelig tællelig delmængde af T , og $\bigcap_{q \in \alpha} \hat{H}_q = \bigcap_{t \in \beta} G_t$. ($G_t \in g_t$, $t \in \beta$)

$$P\left(\bigcap_{q \in \alpha} \hat{H}_q\right) = P\left(\bigcap_{t \in \beta} G_t\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{g}_t\text{-erne uafh.}}}{=} \prod_{t \in \beta} P(G_t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. af } \beta}}{=} \prod_{q \in \alpha} \prod_{t \in \alpha_q} P(G_t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{g}_t\text{-erne uafh.}}}{=} \prod_{q \in \alpha} P\left(\bigcap_{t \in \alpha_q} G_t\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{g}_t\text{-erne uafh.}}}{=} \prod_{q \in \alpha} P(\hat{H}_q)$$

Dvs. $\hat{\mathcal{H}}_q$ -erne er uafh., da $\hat{\mathcal{H}}_q$ -erne desuden er (nf)-stabile, jvf. def. på $\hat{\mathcal{H}}_q$ -erne, og $\sigma(\hat{\mathcal{H}}_q) = \sigma(\mathcal{H}_q)$, jvf. 1.5.1-3 følger det ønskede af 2.4. $\square$

Uafhængighedskriterier for σ -algebra III (2.6)

T betegner en endelig tællig eller tællig mængde

$\{A_t \mid t \in T\}$ betegner en familie af uafh. hændelser

$$\forall t \in T: \mathcal{A}_t := \{\emptyset, A_t, A_t^c, \Omega\}$$

Påstand: $\{\mathcal{A}_t \mid t \in T\}$ er uafh.

Bevis:

Sæt $\mathcal{G}_t = \{A_t\}$, $t \in T$ i 2.3, heraf følger, at $\{\sigma\{A_t\} \mid t \in T\}$ er en familie af uafh. σ -algebraer på Ω .

Da $\sigma\{A_t\} = \mathcal{A}_t$, $t \in T$ juf. def. 1.5.3 følger det ønskede. $\square$

Påstand:

Hvis $\{T_q \mid q \in Q\}$ er en familie af disjunkte delmængder af T , og
$$\mathcal{F}_q = \sigma(A_t \mid t \in T_q)$$

Da er $\{\mathcal{F}_q \mid q \in Q\}$ en familie af uafh. σ -algebraer på Ω

Bevis:

Det følger direkte af 2.5 med $\mathcal{G}_t = \{A_t\}$, $t \in T_q$. $\square$

Disse sætn. viser, at uafhængighed er 'invariant' i en vis forstand:

'Hvis $A_1, \dots, A_n$ er uafh. gælder dette også for $B_1, \dots, B_n$, hvor B_i -erne er dannet ved at tage forenings- eller fællesmængde over disjunkte grupper af A_i -erne' (se evt. SG s. 21 sætn. 3)

Stokastiske variable, vektorer og funktioner (2.7)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ betegner et ss.-rum

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ siges at være en stokastisk variabel, hvis X er målig.

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ siges at være en stokastisk vektor, hvis X er målig.

Lad $(M, \mathcal{B})$ betegne et måligt rum

$f: \Omega \rightarrow M$ siges at være en stokastisk fkt. m. værdier i M , hvis f målig

Påstand: $X := (X_1, \dots, X_n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ er en stokastisk vektor,
hvis $X_1, \dots, X_n$ er stokastiske variable.

Bevis:

$$1.43.3 + 1.43.4$$

□

Påstand:

Følgende udsagn er ækvivalente

- 1) X er en stokastisk variabel $(X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})))$
- 2) $\forall a \in \mathbb{R}: \{X \leq a\} \in \mathcal{F}$
- 3) $\forall a \in \mathbb{R}: \{X < a\} \in \mathcal{F}$
- 4) $\forall a \in \mathbb{R}: \{X > a\} \in \mathcal{F}$
- 5) $\forall a \in \mathbb{R}: \{X \geq a\} \in \mathcal{F}$

Bevis:

Benyt 1.38.6 + 1.10.1 ('Målige funktioner' + 'Borel σ -alg. på $\mathbb{R}$ ')

Fordelingsfunktioner og love (2.8)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ betegner et ss.-rum, $(M, \mathcal{B})$ et måleligt rum

X betegner en stokastisk fkt. fra Ω ind i $(M, \mathcal{B})$,

Billedmålet af P under X , P_X er givet som følger (1.44)....

$$\forall B \in \mathcal{B}: P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(X \in B)$$

P_X betegnes fordelingen/fordelingsloven for X

Jvf. 1.44.2 ('Billedmål') er P_X et mål på $\mathcal{B}$, og af P.3.3 følger, at at $P_X(M) = P(\Omega) = 1$, dvs. P_X er et ss.-mål på $(M, \mathcal{B})$

Fordelingsfunktionen F_X for en stokastisk variabel X defineres som følger

$$\forall v \in \mathbb{R}: F_X(v) := P(X \leq v) \quad (F_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) \quad (\text{husk } X: \Omega \rightarrow \mathbb{R})$$

Påstand:

- 1) F_X er voksende og højrekontinuer
- 2) $\lim_{v \rightarrow -\infty} (F_X(v)) = 0, \lim_{v \rightarrow \infty} (F_X(v)) = 1$
- 3) $P_X(B) = P(X \in B) = \lambda_F(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Beweis:

1)

Vi skal vise, at $v, w \in \mathbb{R}: v \leq w \Rightarrow F_X(v) \leq F_X(w)$

$$F_X(v) = P(X \leq v) \underset{1.3.2}{\leq} P(X \leq w) = F_X(w) \quad (\{X \leq v\} \subseteq \{X \leq w\})$$

Et resultat om kontinuerte funktioner giver, at F_X er højrekont.

hvis vi $\forall v, \{v_n\} \in \mathbb{R}: v_n \downarrow v \Rightarrow F_X(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_X(v)$. Da

$$F_X(v_n) = P(X \leq v_n), F_X(v) = P(X \leq v), \quad v_n \downarrow v \Rightarrow \{X \leq v_n\} \downarrow \{X \leq v\}$$

og $P(X \leq v_1) \leq P(\Omega) = 1 < \infty$ følger af 1.4.3 at $F_X(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_X(v)$

2)

Lad $\{v_n\}_{n \geq 1}, \{w_n\}_{n \geq 1} \in \mathbb{R} : v_n \downarrow -\infty, w_n \uparrow \infty$

$\Rightarrow \{X \leq v_n\} \downarrow \emptyset, \{X_n \leq w_n\} \uparrow \Omega$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F_X(v_n) = P(\emptyset) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} F_X(w_n) = P(\Omega) = 1$

1.4.2-3

3)

$a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

$$P_X([a, b]) = P(X \in [a, b]) = P(a < X \leq b) \stackrel{1.3.3}{=} P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$$

Fra 1) har vi, at F er højrekont. og voksende.

Af sætn. 1.32.3 følger ('Lebesgue-stieltjes mål på $\mathbb{R}$ ') pga. entydigheden af

Lebesgue-Stieltjes målet induceret af F_X , at $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : P_X(B) = \lambda_{F_X}(B)$ $\square$

Påstand:

$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, F voksende og højrekont., $\lim_{v \rightarrow -\infty} F(v) = 0$ og $\lim_{v \rightarrow \infty} F(v) = 1$

Da er F fordelingsfunktion for en stokastisk variabel.

Beweis:

$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b : \lambda_F([a, b]) = F(b) - F(a)$. Da F er voksende og højrekontinueret betegner λ_F ifølge 1.32.2 Lebesgue-Stieltjes mål på $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(Der jvf. samme sætn. er et entydigt bestemt mål på $\mathcal{B}(\mathbb{R})$)

Vælg $\{a_n\}, \{b_n\} \in \mathbb{R}$ således $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$

Det er klart, at $[a_n, b_n] \uparrow \mathbb{R}$ af 1.4.2 følger, at

$$\lambda_F(\mathbb{R}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_F([a_n, b_n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} (F(b_n) - F(a_n)) = 1 - 0 = 1. \text{ (Dvs. } \lambda_F \text{ ss. mål på } \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

Dvs. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda_F)$ er et ss-rum.

Definer $X: (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $\forall v \in \mathbb{R} : X(v) = v$

Da X bare er identitetsafb. er X klart en $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -målbar fkt, og dermed specielt en stokastisk variabel fra ss-rummet $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda_F)$ ind i det mållege rum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Vi skal nu vise, at $F_X = F$, dvs. at F er fordelingsfunktionen for X .

Lad $v \in \mathbb{R}$

$$F_X(v) := \lambda_F(X \leq v) = \lambda_F(X^{-1}([-\infty, v])) = \lambda_F([-\infty, v]) \text{ def. på } \mathbb{R}$$

Vælg $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R} : a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \Rightarrow [a_n, v] \uparrow [-\infty, v]$ af 1.4.2 følger, at

$$\lambda_F([-\infty, v]) = \lim_{n \rightarrow \infty} (F(v) - F(a_n)) = F(v) - \lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n) = F(v) - 0 = F(v) \quad \square$$

Fordelingsfunktionen F_X for en stokastisk vektor X defineres som følger...

$$\forall v \in \mathbb{R}^n : F_X(v) := P(X \leq v) \quad (F_X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ for } X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n)$$

Påstand:

1) F_X er højrekontinuert og har positive tilvækster

2)

$$(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n :$$

$$\lim_{v_1, \dots, v_n \rightarrow \infty} F_X(v_1, \dots, v_n) = 1, \quad \lim_{v_j \rightarrow -\infty} F_X(v_1, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_n) = 0$$

3)

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : P_X(B) = P(X \in B) = \lambda_{F_X}(B)$$

Beweis:

1)

F_X er højrekontinuert, hvis for vilk. $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ gælder...

$$\forall \{v_{1,k}\}_{k \geq 1}, \dots, \{v_{n,k}\}_{k \geq 1} \subseteq \mathbb{R} : v_{1,k} \downarrow v_1, \dots, v_{n,k} \downarrow v_n \Rightarrow F_X(v_1, \dots, v_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} F_X(v_{1,k}, \dots, v_{n,k})$$

Lad $\{v_{1,k}\}_{k \geq 1}, \dots, \{v_{n,k}\}_{k \geq 1} \subseteq \mathbb{R} : v_{1,k} \downarrow v_1, \dots, v_{n,k} \downarrow v_n$ være givet for vilk. $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

Skriv X på formen $(X_1, \dots, X_n)$, da har vi

$$v_{1,k} \downarrow v_1, \dots, v_{n,k} \downarrow v_n \Rightarrow \{X_1 \leq v_{1,k}\} \downarrow \{X_1 \leq v_1\}, \dots, \{X_n \leq v_{n,k}\} \downarrow \{X_n \leq v_n\}$$

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq v_{i,k}\} \downarrow \bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq v_i\} \xrightarrow{1.4.3} P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq v_i\}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq v_{i,k}\}\right) + P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq v_i\}\right) \leq 1 < \infty$$

$$\xRightarrow{\text{def. p. } F_X} F_X(v_1, \dots, v_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} F_X(v_{1k}, \dots, v_{nk})$$

Vi vil nu vise, at F_X har positive tilvækster, dvs. $\forall a, b \in \mathbb{R}^n, a \leq b \Rightarrow \Delta_a^b F_X > 0$

Lad $a := (a_1, \dots, a_n), b := (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n: a_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq b_n$ være givet

$$X = (X_1, \dots, X_n)$$

Definer: $\forall j \in \{1, \dots, n\}: B_j := \{X_j \leq b_j\}, B = \bigcap_{j=1}^n B_j, \forall j \in \{1, \dots, n\}: A_j := \{X_j \leq a_j\}$

$$0 \leq P(a < X \leq b) = P(a_1 < X_1 \leq b_1, \dots, a_n < X_n \leq b_n) = P(\bigcap_{j=1}^n \{B_j \setminus A_j\})$$

$$= P(\bigcap_{j=1}^n \{B_j \cap A_j^c\}) = P(\bigcap_{j=1}^n B_j \cap \bigcap_{j=1}^n A_j^c) = P(B \cap (\bigcup_{j=1}^n A_j)^c) = P(B \setminus \{\bigcup_{j=1}^n A_j\})$$

$$= P(B \setminus \{B \cap (\bigcup_{j=1}^n A_j)\}) \underset{P.2.5}{=} P(B \setminus \bigcup_{j=1}^n (B \cap A_j)) \underset{1.3.2}{=} P(B) - P(\bigcup_{j=1}^n (B \cap A_j))$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{inclusion-exclusions princippet (Exc. 2.25)}}}{=} P(B) - \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq r_1 < \dots < r_k \leq n} P(B \cap A_{r_1} \cap \dots \cap A_{r_k}) \cdot (-1)^{k-1} = P(B) + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq r_1 < \dots < r_k \leq n} (-1)^k P(B \cap A_{r_1} \cap \dots \cap A_{r_k})$$

$$= F(b_1, \dots, b_n) + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq r_1 < \dots < r_k \leq n} (-1)^k F(b_1, \dots, b_{r_1-1}, a_{r_1}, b_{r_1+1}, \dots, b_n)$$

def. på F + husk $A_j \in B_j$

$$= \Delta_a^b F_X$$

se def. 1.33.2 s. 38

2)

Lad $\{v_{1k}\}_{k \geq 1}, \dots, \{v_{nk}\}_{k \geq 1} \subseteq \mathbb{R}: v_{1k} \uparrow \infty, \dots, v_{nk} \uparrow \infty$

$$\Rightarrow (X_1 \leq v_{1k}, \dots, X_n \leq v_{nk}) \uparrow \Omega \xRightarrow{1.4.2} \lim_{k \rightarrow \infty} F_X(v_{1k}, \dots, v_{nk}) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(X_1 \leq v_{1k}, \dots, X_n \leq v_{nk}) = P(\Omega) = 1$$

Lad $j \in \{1, \dots, n\}$ og $v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ og $\{v_{jk}\}_{k \geq 1} \subseteq \mathbb{R}: v_{jk} \downarrow -\infty$

Vi ser $(X_1 \leq v_1, \dots, X_{j-1} \leq v_{j-1}, X_j \leq v_{jk}, X_{j+1} \leq v_{j+1}, \dots, X_n \leq v_n) \subseteq (X_j \leq v_{jk}) \downarrow \emptyset$

$$\xRightarrow{1.3.2+1.4.2} \lim_{k \rightarrow \infty} F_X(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{jk}, v_{j+1}, \dots, v_n) = 0$$

+ def. på F_X

3)

$$a, b \in \mathbb{R}^n, a \leq b$$

$$P_X([a, b]) = P(X \in [a, b]) = P(a < X \leq b) \stackrel{1)}{=} \Delta_a^b F_X$$

Da $\Delta_a^b F_X \geq 0$ og F_X jvf. 1) er højrekontinueret følger af 1.33.4, at

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \quad \lambda_{F_X}(B) = P_X(B)$$

□

Påstand:

$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}^n, a \leq b$: $\Delta_a^b F \geq 0$, F højrekont.

$$F(\infty, \infty, \dots, \infty) = 1, \quad F(v_1, \dots, v_{j-1}, -\infty, v_{j+1}, \dots, v_n) = 0$$

Da er F fordelingsfkt. for en stokastisk vektor på et et ss-rum.

Bevis:

Helt analogt med beviset for den tilsvarende påstand for stokastiske variable.

$$F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R},$$

Hvis, F er højrekont., har pos. tilvækster, $F(\infty, \dots, \infty) = 1$ og $F(v_1, \dots, v_{j-1}, \infty, v_{j+1}, \dots, v_n) = 0$ da siges F at være en fordelingsfunktion

De ovenstående setn. giver, at F er en fordelingsfunktion hvis F er fordelingsfunktion for en stokastisk vektor.

Lad $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ betegne en stokastisk vektor.

Lad $\alpha(1), \alpha(2), \dots, \alpha(m) \in \{1, \dots, n\} : 1 \leq \alpha(1) < \dots < \alpha(m) \leq n \quad (m \leq n)$

Ud fra 2.7.1 i 'Stokastiske variable, vektorer og funktioner' ser vi, at $Y := (X_{\alpha(1)}, \dots, X_{\alpha(m)})$ er en stokastisk vektor.

$$F_Y(u_1, \dots, u_m) := P(X_{\alpha(1)} \leq u_1, \dots, X_{\alpha(m)} \leq u_m) = P(\Omega, \dots, X_{\alpha(1)} \leq u_1, \Omega, \dots, X_{\alpha(m)} \leq u_m, \Omega, \dots, \Omega) \\ \stackrel{14.2}{=} F_{\mathbf{X}}(\infty, \dots, u_1, \infty, \dots, u_m, \infty, \dots, \infty)$$

F_Y betegnes den $(\alpha(1), \dots, \alpha(m))$ 'te marginale fordelingsfunktion af $\mathbf{X}$, af disse er der $2^n - 2$. $F_{\mathbf{X}}$ betegnes den simultane fordelingsfunktion for $\mathbf{X}$.

$(M, \mathcal{B})$ betegne et målrig rum.

Lad $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ betegne to stokastiske funktioner, der er $(\mathcal{F}, \mathcal{B})$ -målrige.

Notation:

$$\mathbf{X}, \mathbf{Y} \text{ identisk fordelte} \equiv \mathbf{X} \sim \mathbf{Y} : P_{\mathbf{X}} = P_{\mathbf{Y}} \\ (\text{el } \mathbf{X} \text{ version af } \mathbf{Y})$$

Hvis μ er et ss-mål på $(M, \mathcal{B})$:

$$\mu \text{ er loven af } \mathbf{X} \equiv \mu \sim \mathbf{X} : \mu = P_{\mathbf{X}}$$

Lad $(L, \mathcal{A})$ betegne et målrig rum og f en $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ -målrig funktion

$$\text{Påstand: } \mu \sim \mathbf{X} \Rightarrow \mu_f \sim f(\mathbf{X}) \quad \text{og} \quad \mathbf{X} \sim \mathbf{Y} \Rightarrow f(\mathbf{X}) \sim f(\mathbf{Y})$$

Bevis:

$$\text{Vi skal vise, at } \mu_f = P_{f(\mathbf{X})} \quad \text{og} \quad P_{f(\mathbf{X})} = P_{f(\mathbf{Y})}$$

Lad $A \in \mathcal{A}$

Da f er $(B, \mathcal{A})$ -målelig og Z er $(\mathcal{F}, B)$ -målelig følger af 1.38.4 'Målelige funktioner', at $f \circ Z$ er $(\mathcal{F}, \mathcal{A})$ -målelig, dvs. $Z^{-1}(f^{-1}(A)) \in \mathcal{F}$ (hvor $f^{-1}(A) \in B$).

Vi får, at...

$$\mu_f(A) := \mu(f^{-1}(A)) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{pr. antagelse}}}{=} P_Z(f^{-1}(A)) = P(Z \circ f^{-1}(A)) =: P_{f \circ Z}(A)$$

Lad $A \in \mathcal{A}$

Da f er $(B, \mathcal{A})$ -målelig og Z, Y er $(\mathcal{F}, B)$ -målelige følger af 1.38.4 'Målelige funktioner', at $f \circ Z, f \circ Y$ er $(\mathcal{F}, \mathcal{A})$ -målelige, dvs.

$f^{-1}(A) \in B$ og $Z^{-1}(f^{-1}(A)), Y^{-1}(f^{-1}(A)) \in \mathcal{F}$, dette benyttes i det følgende...

$$P_{f \circ Z}(A) := P(Z^{-1}(f^{-1}(A))) =: P_Z(f^{-1}(A)) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{pr. antagelse}}}{=} P_Y(f^{-1}(A)) := P(Y^{-1}(f^{-1}(A))) =: P_{f \circ Y}(A)$$

□

Lad $F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ betegne en fordelingsfunktion og $Z = (Z_1, \dots, Z_k)$ en k -dimensional stokastisk vektor.

Notation / definition:

Z er F -fordelt $\equiv Z \sim F : F_Z = F$

Påstand:

Lad Z, Y betegne 2 k -dimensionale stokastiske vektorer.

Da gælder: $Z \sim Y \iff F_Z = F_Y$

Bevis:

$\implies$:

$$Z \sim Y \implies \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k): P_Z(B) = P_Y(B) \stackrel{2.8.10}{\implies} \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k): \lambda_{F_Z}(B) = \lambda_{F_Y}(B)$$

Da F_Z, F_Y jf. en af de foregående sætn., som fordelingsfunktion for hh. Z, Y , opfylder 2.8.8, da $\lambda_{F_Z} = \lambda_{F_Y}$ (på $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$)

og da Lebesgue-Stieltje målt for en funktion, der opfylder 2.8.8., er entydigt bestemt (1.33.4 'Lebesgue-Stieltjes mål på $\mathbb{R}^k$ ') følger, at $F_X = F_Y$ (på $\mathbb{R}^k$)

⇐:

F_X, F_Y opfylder 2.8.8 (jvf. tidl. vist sætn.) af sætn. om Lebesgue-Stieltjes mål på $\mathbb{R}^k$ (1.33.4) følger, $\lambda_{F_X}, \lambda_{F_Y}$ eksisterer og da $F_X = F_Y$ er det klart, at $\lambda_{F_X} = \lambda_{F_Y}$. (på $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$)

Endvidere har vi tidligere vist, at F_X, F_Y opfylder 2.8.10

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k): P_X(B) = \lambda_{F_X}(B) = \lambda_{F_Y}(B) = P_Y(B)$$

□

Uafhængige stokastiske funktioner (2.9)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ betegner et ss-rum. $(M, \mathcal{U})$, $(L, \mathcal{B})$ betegner målelige rum

Lad $X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (M, \mathcal{U})$, $Y: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (L, \mathcal{B})$ betegne stokastiske fkt.

Vi siger, at X, Y er uafh., hvis $\sigma(X), \sigma(Y)$ er uafh., dvs. hvis

$$\forall A \in \mathcal{U}, B \in \mathcal{B}: P(X \in A \cap Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B) \quad (\text{jvf. 1.42.1 og 2.3.3})$$

$$\text{Notation: } X, Y \text{ uafh} \equiv X \perp Y$$

Lad $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, $\mathcal{G} \neq \emptyset$

Vi siger, at $\mathcal{G}, X$ er uafh., hvis $\mathcal{G}, \sigma(X)$ er uafh., dvs. hvis

$$\forall A \in \mathcal{U}, G \in \mathcal{G}: P(G \cap \{X \in A\}) = P(G) \cdot P(X \in A). \quad (\text{jvf. 1.42.1 og 2.3.3})$$

$$\text{Notation: } \mathcal{G}, X \text{ uafh} \equiv \mathcal{G} \perp X$$

Lad T betegne en endelig tællelig el. tællelig mængde.

Lad $(M_t, \mathcal{B}_t)$ betegne et måleligt rum for alle $t \in T$, og

$X_t: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (M_t, \mathcal{B}_t)$ betegne en stokastisk funktion for alle $t \in T$.

Vi siger, at $\{X_t | t \in T\}$ er uafh., hvis $\{\sigma(X_t) | t \in T\}$ er uafh., dvs. hvis

$\forall \alpha \subseteq T, \alpha \neq \emptyset$, α endelig tællelig mængd. $\forall t \in \alpha: B_t \in \mathcal{B}_t$:

$$P\left(\bigcap_{t \in \alpha} \{X_t \in B_t\}\right) = \prod_{t \in \alpha} P(X_t \in B_t) \quad (\text{jvf. 1.42.1 og 2.3.5})$$

Uafhængighedskriterier for stokastiske funktioner (2.10)

Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ betegne et ss-rum., og $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ betegne en n -dimensional stokastisk vektor fra $(\Omega, \mathcal{F})$ ind i $\mathbb{R}^n$.

Lad F betegne den simultane fordelingsfkt. for $\mathbf{X}$, og F_j betegne den X_j 'te marginale fordelingsfkt. for $j=1, \dots, n$.

Da er følgende udsagn ækvivalente

- 1) $X_1, \dots, X_n$ er uafh.
- 2) $\forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : P(\bigcap_{j=1}^n \{X_j \in B_j\}) = \prod_{j=1}^n P(X_j \in B_j)$
- 3) $\forall (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n : F(v_1, \dots, v_n) = \prod_{j=1}^n F_j(v_j)$
- 4) $\exists H_1, \dots, H_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \forall (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n : F(v_1, \dots, v_n) = \prod_{j=1}^n H_j(v_j)$

Bevis:

1) $\Rightarrow$ 2):

$X_1, \dots, X_n$ er uafh. Sæt $T := \{1, \dots, n\}$, vælg $\alpha = T$ af def.

2.9, at $\{X_t | t \in T\}$ er uafh. i 2.9 følger specielt, at

$$\forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : P(\bigcap_{j=1}^n \{X_j \in B_j\}) = \prod_{j=1}^n P(X_j \in B_j)$$

2) $\Rightarrow$ 3):

$$\forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : P(\bigcap_{j=1}^n \{X_j \in B_j\}) = \prod_{j=1}^n P(X_j \in B_j)$$

Lad $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ være givet.

Af 1.10.1 følger, at $\{X_1 \in \mathbb{R} | X_1 \leq v_1\}, \dots, \{X_n \in \mathbb{R} | X_n \leq v_n\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Sæt $B_1 = \{X_1 \in \mathbb{R} | X_1 \leq v_1\}, \dots, B_n = \{X_n \in \mathbb{R} | X_n \leq v_n\}$,

da $F(v_1, \dots, v_n) = P(X_1 \leq v_1, \dots, X_n \leq v_n)$ og $F_j(v_j) := P(X_j \leq v_j)$, $j=1, \dots, n$

følger at $F(v_1, \dots, v_n) = \prod_{j=1}^n F_j(v_j)$

3) $\Rightarrow$ 4):

Sæt $H_j = F_j$, $j=1, \dots, n$ pr. antagelse har vi derfor

$$\forall (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n : F(v_1, \dots, v_n) = \prod_{j=1}^n H_j(v_j)$$

4) $\Rightarrow$ 1):

$$\exists H_1, \dots, H_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n: F(v_1, \dots, v_n) = \prod_{j=1}^n H_j(v_j) \quad (*)$$

$$\text{Sæt } \mathcal{G}_j = \{G_j \subseteq \Omega \mid \exists v_j \in \mathbb{R}: G_j = \{\mathbf{X}_j \leq v_j\}\} \quad j=1, \dots, n$$

Det er klart, at $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ er (1f)-stabile brolegn. indeholdt i $\mathcal{F}$.

Lad $G_1 \in \mathcal{G}_1, \dots, G_n \in \mathcal{G}_1$, da $\exists v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}: G_1 = \{\mathbf{X}_1 \leq v_1\}, \dots, G_n = \{\mathbf{X}_n \leq v_n\}$

$$P\left(\bigcap_{j=1}^n G_j\right) = P(\mathbf{X}_1 \leq v_1, \dots, \mathbf{X}_n \leq v_n) = F(v_1, \dots, v_n) \stackrel{(*)}{=} \prod_{j=1}^n H_j(v_j) = \prod_{j=1}^n H_j(G_j),$$

da $H_j(G_j) = H_j \circ v_j$ (v_j kan jvf. def. på $\mathcal{G}_j$ opfattes som fkt. fra $\mathcal{G}_j$ ind i $\mathbb{R}$).

$$\text{Valg } \{v_{1k}\}_{k \geq 1}, \dots, \{v_{nk}\}_{k \geq 1} \subseteq \mathbb{R}: v_{1k} \uparrow \infty, \dots, v_{nk} \uparrow \infty \Rightarrow \bigcap_{j=1}^n \{\mathbf{X}_j \leq v_{jk}\} \uparrow \Omega$$

$$\stackrel{1.4.2}{\implies} \lim_{k \rightarrow \infty} P(\mathbf{X}_1 \leq v_{1k}, \dots, \mathbf{X}_n \leq v_{nk}) = P(\Omega) = 1, \text{ dvs. jvf. konvergens af}$$

reelle talfølger og da $P \leq 1$, at $\forall \varepsilon > 0 \exists k \geq 1: 1 - P(\bigcap_{j=1}^n \{\mathbf{X}_j \leq v_{jk}\}) < \varepsilon$

Desuden har vi, at $\{\mathbf{X}_j \leq v_{jk}\} \in \mathcal{G}_j$, $j=1, \dots, n$ for alle $k \geq 1$.

Satn. 2.4, 'Uafhængighedskriterier for σ -algebra I' giver at $\sigma(\mathcal{G}_1), \dots, \sigma(\mathcal{G}_n)$ er uafh.

Jvf. 1.10.1 og def. på $\mathcal{G}_j$ -one har vi derfor, at

$$\forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}): \mathbf{X}_1^{-1}(B_1), \dots, \mathbf{X}_n^{-1}(B_n) \text{ er uafh.}, \text{ dvs.}$$

$\sigma(\mathbf{X}_1), \dots, \sigma(\mathbf{X}_n)$ er uafh. (vi benyttede direkte def. på uafh.), men
det er jo præcis det vi skulle vise (jvf. def. på at $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ uafh.)

□

Lad T betyde en endelig tællig eller tællig mængde

Lad $(M_t, \mathcal{B}_t)$ betyde et måligt rum for alle $t \in T$, og $X_j: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (M_t, \mathcal{B}_t)$ betyde stokastiske funktioner, $t \in T$.

$\forall t \in T: g_t \in \mathcal{B}_t$, g_t er $(\mathcal{N})$ -stabil, $\sigma(g_t) = \mathcal{B}_t$ og antag desuden, at $\{X_t^{-1}(g_t) | t \in T\}$ er uafh., da gælder

1) $\{X_t | t \in T\}$ er uafh.

2) Lad $(L_t, \mathcal{L}_t)$ betyde et måligt rum for alle $t \in T$.

Lad $f_t: (M_t, \mathcal{B}_t) \rightarrow (L_t, \mathcal{L}_t)$ betyde en målig fkt. for alle $t \in T$.

Sæt $Y_t = f_t(X_t)$ for alle $t \in T$.

Da gælder, at $\{Y_t | t \in T\}$ er uafh.

3) Hvis $\{T_q | q \in Q\}$ er disjunkte delmængder af T , og

$\mathcal{F}_q = \sigma(X_t | t \in T_q)$, $q \in Q$, da er σ -alg. $\{\mathcal{F}_q | q \in Q\}$ uafh.

Bævis:

1) Lad $t \in T$. Af P.3.1 følger, at $X_t^{-1}(g_t)$ er $(\mathcal{N})$ -stabil, da g_t er $(\mathcal{N})$ -stabil

Dvs. $\{X_t^{-1}(g_t) | t \in T\}$ er en familie af $(\mathcal{N})$ -stabile og uafhængige brokkeh.

Af 2.5, 'Uafhængighedskriterier for σ -algebra II' følger, at

$\{\sigma(X_t^{-1}(g_t)) | t \in T\}$ er uafh., og da $\sigma(X_t^{-1}(g_t)) = X_t^{-1}(\sigma(g_t))$, $t \in T$

jvf. 1.38.5 'Målelige funktioner', har vi, at $\{X_t^{-1}(\sigma(g_t)) | t \in T\}$ er uafh.;

af def. på uafh. af stokastiske fkt. (og 1.42.2) har vi dermed, at

$\{X_t | t \in T\}$ er uafh., da $\forall t \in T: \sigma(g_t) = \mathcal{B}_t$

2)

$\mathbb{Y}_t$ er jvf. 1.38.4, 'Målelige funktioner' $(\mathcal{F}, \mathcal{U}_t)$ -målelig, og da $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ er et ss-rum er $\mathbb{Y}_t$ dermed en stokastisk funktion. (Bm. $\mathbb{Y}_t^{-1} = \Sigma_t^{-1} \circ f_t^{-1}$)

Lad $\alpha \leq T, \alpha \neq \emptyset, \alpha$ endelig tællelig, og lad $A_t \in \mathcal{U}_t$ for alle $t \in \alpha$

$$P(\cap_{t \in \alpha} \{\mathbb{Y}_t \in A_t\}) := P(\cap_{t \in \alpha} \{\mathbb{Y}_t^{-1}(A_t)\}) = P(\cap_{t \in \alpha} \{\Sigma_t^{-1}(f_t^{-1}(A_t))\})$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} \prod_{t \in \alpha} P(\Sigma_t^{-1}(f_t^{-1}(A_t))) =: \prod_{t \in \alpha} P(\mathbb{Y}_t \in A_t)$$

f_t målelig, dvs. $f_t^{-1}(A_t) \in \mathcal{B}_t$
 $\{\Sigma_t^{-1} | t \in T\}$ uafh. jvf. 1)

Af def. på uafh. mellem stokastiske funktioner følger, at $\{\mathbb{Y}_t | t \in T\}$ er uafh. (29.3)

3)

Detta er en direkte konsekvens af 2.5, 'Vækningskriterier for σ -algebra II',

da $\{\Sigma_t^{-1}(B_t) | t \in T\}$ jvf. P.3.1 er (ηf) -stabil.

(husk def. på, at stokastiske fkt. er uafh.)

□

De to Borel-Cantelli lemmer (2.11)

Påstand:

Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ betegne et ss-rum

$\forall \{A_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{F}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \implies P(\limsup A_n) = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \wedge \{A_n\}_{n \geq 1} \text{ uafh.} \implies P(\limsup A_n) = 1$$

Bevis:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=n}^{\infty} P(A_j) \right) = 0$$

$$0 \leq P(\limsup A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right) \stackrel{1.3.2}{\leq} P\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right) \stackrel{1.4.1}{\leq} \sum_{j=n}^{\infty} P(A_j) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

+ fastholdt n

Antag nu, at $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ og $\{A_n\}_{n \geq 1}$ er uafh.

Af 2.6, 'Uafhængighedskriterier for σ -alg. III' følger, at $\{A_n^c\}_{n \geq 1}$ er uafh.

Desuden har vi, at $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \implies \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) = \infty$, $k \geq 1$

Definer $A^k := \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$, bem. at $A^k \downarrow \limsup A_n$

Lad $k \geq 1$ være givet

Vælg $m \geq 1$: $k \leq m$.

$$P\left(\bigcup_{j=k}^m A_j\right) \stackrel{P.2.1}{=} 1 - P\left(\bigcap_{j=k}^m A_j^c\right) \stackrel{A^c \text{ er uafh.}}{=} 1 - \prod_{j=k}^m P(A_j^c) \stackrel{2.15.}{=} 1 - \prod_{j=k}^m (1 - P(A_j))$$

+ 2.1.5

$$\stackrel{1-x \leq e^{-x}}{\geq} 1 - \prod_{j=k}^m e^{-P(A_j)} = 1 - e^{-\sum_{j=k}^m P(A_j)}$$

anvendt m-k gange

Da $\sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) = \infty$, $k \geq 1$ og $\forall m \geq k \geq 1$: $1 \geq P\left(\bigcup_{j=k}^m A_j\right) \geq 1 - e^{-\sum_{j=k}^m P(A_j)}$

ser vi, at $P\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j\right) = P(A^k) = 1$

Af 1.4.3 har vi, da $P(A^1) \leq 1 < \infty$ og $A^k \downarrow \limsup A_n$, at

$$P(\limsup A_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(A^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (1) = 1$$

□

Bm. hvis $\{A_n\}_{n \geq 1}$ er uafh. da gælder, at $P(\limsup A_n) \in \{0, 1\}$

0-1 loven for brølægninger (2.12)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ betegner et ss-rum

Lad $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$ betegne en følge af (nf)-stabile brølægn. på Ω
 $\mathcal{F}^\infty \subseteq \mathcal{F}$ betegner en brølægn. på Ω , som opfylder

$$\forall n \geq 1: \mathcal{F}_n \perp \mathcal{F}^\infty, \quad \mathcal{F}^\infty \subseteq \sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n), \quad \mathcal{F}^\infty \text{ er (nf)-stabil}$$

Påstand: $\forall F \in \sigma(\mathcal{F}^\infty): P(F) = 0 \vee P(F) = 1$

Bevis:

Definer $\mathcal{F}_\infty := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$, da $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots$ og $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$ er (nf)-stabile følger, at $\mathcal{F}_\infty$ er (nf)-stabil:

Lad $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_\infty$, dvs. $\exists n, m \in \mathbb{N}: F_1 \in \mathcal{F}_n, F_2 \in \mathcal{F}_m$

Antag $n \leq m$ (situationen $m \leq n$ har et helt analogt bevis), da gælder, at $F_1 \in \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_m$, dvs. $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_m$, da $\mathcal{F}_m$ er (nf)-stabil: $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}$

Da $\forall n \geq 1: \mathcal{F}_n \perp \mathcal{F}^\infty$ gælder, jvf. def. af $\mathcal{F}_\infty$ og uafh. mellem brølægn., at $\mathcal{F}_\infty \perp \mathcal{F}^\infty$.

Både $\mathcal{F}_\infty$ og $\mathcal{F}^\infty$ er (nf)-stabil da $\mathcal{F}_\infty \perp \mathcal{F}^\infty$ følger derfor af sætn. 2.5, 'Uafhængighedskriterier for σ -algebra II', at $\sigma(\mathcal{F}_\infty) \perp \sigma(\mathcal{F}^\infty)$

Lad $F \in \sigma(\mathcal{F}^\infty)$

Da $\mathcal{F}^\infty \subseteq \sigma(\mathcal{F}_\infty)$ følger af 1.5.3, at $\sigma(\mathcal{F}^\infty) \subseteq \sigma(\mathcal{F}_\infty)$,
dvs. $F \in \sigma(\mathcal{F}_\infty)$. Men $\sigma(\mathcal{F}_\infty) \perp \sigma(\mathcal{F}_\infty)$, dvs. $P(F \cap F) = P(F) \cdot P(F)$
 $\Rightarrow P(F) = P(F)^2 \Rightarrow P(F) = 0 \vee P(F) = 1$

(husk jvf. alg. fund. teo. har $x^2 - x = 0$ kun løsn. 0 og 1)

□

0-1 loven for stokastiske funktioner (2.13)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ betegner et ss-rum

$\{X_n\}_{n \geq 1}$ betegner en følge af ^{uafh.} stokastiske funktioner def. på $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definer $\mathcal{F}^\infty := \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(X_j | j \geq n)$

Påstand: $\forall F \in \mathcal{F}^\infty : P(F)=0 \vee P(F)=1$

Hvis Y betegner en $\mathcal{F}^\infty$ -målign stokastisk variabel,

da er Y degenereret, dvs. $\exists a \in \mathbb{R} : P(Y=a)=1$ (ekvivalent: $Y=a$ P.as

Beweis:

Definer $\forall n \geq 1 : \mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$, $\mathcal{F}^n := \sigma(X_j | j \geq n+1)$

Af 2.10.7, 'Uafhængighedskriterier for stokastiske funktioner'

følger, at $\forall n \geq 1 : \mathcal{F}_n \perp \mathcal{F}^n$ desuden gælder $\mathcal{F}^\infty \subseteq \mathcal{F}^n$, dvs. $\mathcal{F}^\infty \perp \mathcal{F}_n$

Bm. at $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots$, Da $\mathcal{F}^\infty \subseteq \mathcal{F}^0$ følger dermed af

2.12 '0-1 loven for brokøgn' at $\forall F \in \mathcal{F}^\infty : P(F)=0 \vee P(F)=1$

Lad Y betegne en $\mathcal{F}^\infty$ -målign stokastisk variabel.

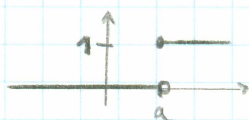
$\forall v \in \mathbb{R} : \{Y \leq v\} \in \mathcal{F}^\infty$, jvf. 2.7 'stokastiske variabel, vektorer og funktioner'.

Dvs. $P(Y \leq v)=0 \vee P(Y \leq v)=1$, $F_Y(v) := P(Y \leq v)$, dvs.

$$F_Y(v)=0 \vee F_Y(v)=1$$

Af 2.8, 'Fordelingsfunktioner og love' har vi, at F_Y er

voksende og højrekønt, samt at $\lim_{v \rightarrow -\infty} F_Y(v)=0$, $\lim_{v \rightarrow \infty} F_Y(v)=1$.



$$\text{Dvs. } \exists a \in \mathbb{R} : F_Y(v) = \begin{cases} 1, & v \geq a \\ 0, & v < a \end{cases}$$

$$P(Y=a) = P(a-\varepsilon < Y \leq a, \forall \varepsilon > 0)$$

Da $\forall \varepsilon > 0 : P(a-\varepsilon < Y \leq a) = F_Y(a) - F_Y(a-\varepsilon) = 1$ har vi, at $P(Y=a)=1$
1.3.3.

Sandsynlighedsmassefunktioner (2.14)

Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ betegne et ss. rum

Lad X betegne en stokastisk funktion, der tager værdier i et måleligt rum $(M, \mathcal{B})$, hvor $\mathcal{B}$ indeholder alle pkt. mgd. af M .

Vi definerer ssmassefunktionen P_X af X som følger...

$$\forall v \in M: P_X(v) = P(X=v) \quad (\text{Klart, at } P_X: M \rightarrow [0,1]) \quad [2.14.1]$$

Lad $Q \subseteq M$, Q endelig tællelig el. tællelig, da P er et mål på $(\Omega, \mathcal{F})$ og dermed σ -additiv, har vi $P(X \in Q) = \sum_{v \in Q} P_X(v)$ (*) [2.14.2]

Definer $sp_+(X) := \{v \in M \mid P(X=v) > 0\}$ (den diskrete støtte af X)

Påstand: $sp_+(X)$ er en højst tællelig mængde [2.14.3]

$$\forall B \in \mathcal{B}: \sum_{v \in B} P_X(v) = P(X \in B \cap sp_+(X)) \leq 1 \quad [2.14.4]$$

Beweis:

Da $\forall w \in M: P_X(w) = 1 - P_X(\Omega \setminus \{w\})$ jvf. 2.1.5 gælder for $n \geq 1$

at $\#\{v \in M \mid P(X=v) \geq 1/n\} \leq n$ (brug evt. σ -add. af P til et nedstudsbevis)

Idet $sp_+(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{v \in M \mid P(X=v) \geq 1/n\}$ følger, idet en tællelig foreningsmængdedannelse af endeligt tællelige mængder er en højst tællelig mængde, at $sp_+(X)$ er højst tællelig mængde.

Lad $B \in \mathcal{B}$ være givet

$$\sum_{v \in B} P_X(v) = \sum_{v \in B \cap sp_+(X)} P_X(v) + \sum_{v \in B \cap (sp_+(X))^c} P_X(v) = \sum_{v \in B \cap sp_+(X)} P_X(v) = P(X \in B \cap sp_+(X)) \leq 1 \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{\textit{\sigma}-additivitet af } P \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{2.1.5} \\ \square \end{matrix}$$

Påstand:

Følgende udsagn er ækvivalente

1) $\mathbb{X}$ er degenereret

2) $\exists a \in \mathbb{R} : \mathbb{Y} = a \text{ P.a.s}$

3) $\exists a \in \mathbb{R} : P(\mathbb{Y} = a) = 1$ [2.14.5]

4) $\exists a \in \mathbb{R} : P_{\mathbb{X}}(a) = 1 \wedge \forall v \neq a \in \mathbb{R} : P_{\mathbb{X}}(v) = 0$ [2.14.6]

5) $P_{\mathbb{X}} = \delta_a$ (δ_a er Dirac målet i a def. på $2^M|_M = M$, se 1.15) [2.14.7]

Beweis:

At 1) $\Rightarrow$ 2) følger af def. på at være degenereret

2) $\Rightarrow$ 3) af 2.1.5, 3) $\Rightarrow$ 4) af def. på $P_{\mathbb{X}}$ og 2.1.5, da

$$\forall v \in \mathbb{R} : v \neq a : 0 \leq \underbrace{P_{\mathbb{X}}(v)}_{2.1.4} \leq \underbrace{P(\{\mathbb{X} = a\}^c)}_{1.3.2} = 1 - \underbrace{P(\mathbb{X} = a)}_{2.1.5} = 0$$

4) $\Rightarrow$ 5) af def. på δ_a 1.3.2, 2.1.5 og 2.1.4.

5) $\Rightarrow$ 1) af def. på at være degenereret, δ_a og af 2.1.5

□

Påstand:

1) X er simpel $\iff sp_+(X)$ er en endelig tællig mgt og $\sum_{v \in M} P_X(v) = 1$ [2.14.8]

2) X er diskret $\iff \sum_{v \in M} P_X(v) = 1$ [2.14.9]

Beweis:

1)

$\Rightarrow$

X er simpel, dvs. $\exists F \in M$, F endelig tællig: $P(X \in F) = 1$

Lad $v \in F^c$: $0 \leq P(X=v) \leq P(X \in F^c) = 1 - P(X \in F) = 0$
2.1.4 1.3.2 2.1.5

Dvs. $sp_+(X) \subseteq F$, hvorefter det følger at $sp_+(X)$ er endelig tællig, og

$$\sum_{v \in M} P_X(v) = \sum_{v \in F} P_X(v) + \sum_{v \in F^c} P_X(v) = \sum_{v \in F} P_X(v) \stackrel{*}{=} P(X \in F) = 1$$

$\Leftarrow$

$sp_+(X)$ er en endelig tællig mængde og $\sum_{v \in M} P_X(v) = 1$

Sæt $F = sp_+(X)$, Vi har tidligere vist: $\forall B \in \mathcal{B}: \sum_{v \in B} P_X(v) = P(X \in B \cap sp_+(X)) \leq 1$

specielt gælder, $1 = \sum_{v \in M} P_X(v) = P(X \in M \cap sp_+(X)) = P(X \in sp_+(X)) = P(X \in F)$

2)

$\Rightarrow$

X er diskret, dvs. $\exists F \in M$, F er tællig og $P(X \in F) = 1$

Af 2.14.2 har vi $\sum_{v \in F} P_X(v) = P(X \in F) = 1$

$\Leftarrow$

Sæt $F = M \cap sp_+(X)$ Vi har tidligere vist, at

$\forall B \in \mathcal{B}: \sum_{v \in B} P_X(v) = P(X \in (B \cap sp_+(X))) \leq 1$, heraf ser vi

$$\sum_{v \in F} P_X(v) = \sum_{v \in M} P_X(v) \stackrel{\text{antagelse}}{=} 1$$

□

Påstand:

Hvis X er diskret gælder $\forall B \in \mathcal{B} : P(X \in B) = P_X(B) = \sum_{v \in B} P_X(v)$ [2.14.10]

Bevis:

Følger af def. på at være diskret og 2.14.2 $\square$

Bm. hvis X er diskret bestemmer P_X altså fordelingsloven for X , P_X fuldstændigt.

X siges at være diffus, hvis $\forall v \in M : P(X=v)=0$

Af def. på $sp_+(X)$ følger, at X er diffus hvis $sp_+(X)=\emptyset$ [2.14.11]

Antag at X er en stokastisk variabel,

Påstand: $\forall v \in \mathbb{R} : P_X(v) = F_X(v) - F_X(v-)$ [2.14.12]

Bevis:

Lad $v \in \mathbb{R}$ være givet

Af 1.10.1, 'Borel σ -algebra på $\mathbb{R}$ ' følger, at $\forall n \geq 1 \exists [v-2^{-n}, v] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Da $\exists [v-2^{-n}, v] \downarrow \{v\}$ og P_X er et mål på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ juf. 2.8.1,

'Fordelingsfkt. og love' følger af 1.4.3, at $P_X\{v\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_X([v-2^{-n}, v])$, herfor...

$$\begin{aligned} P_X(v) &:= P_X\{v\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_X([v-2^{-n}, v]) := \lim_{n \rightarrow \infty} P(v-2^{-n} < X \leq v) \\ &\stackrel{1.3.3}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (P(X \leq v) - P(X \leq v-2^{-n})) =: F(v) - \lim_{n \rightarrow \infty} F(v-2^{-n}) \end{aligned}$$

Da F er voksende har vi, at $\lim_{n \rightarrow \infty} F(v-2^{-n}) = \lim_{x \uparrow v} F(x) =: F(v-)$ [2.14.13] $\square$

Påstand:

$$sp_+(\mathbb{X}) = \{v \in \mathbb{R} \mid F_{\mathbb{X}} \text{ er diskontinuert i } v\} \quad [2.14.14]$$

$$\mathbb{X} \text{ er diffus} \iff F_{\mathbb{X}} \in C^0(\mathbb{R}) \quad [2.14.15]$$

Bevis:

Jvf. 2.8.3, 'Fordelingsfunktioner og love' er $F_{\mathbb{X}}$ højrekontinuert, dvs. at $F_{\mathbb{X}}$ diskont. $\iff F_{\mathbb{X}}$ ikke venstrekont., denne ækvivalens benyttes i følgende ...

Hvis $F_{\mathbb{X}}$ er diskont i et pkt. $v \in \mathbb{R}$ følger af 2.14.12, at $P_{\mathbb{X}}(v) \neq 0$, men det vil jo sige at $v \in sp_+(\mathbb{X})$.

Omvendt: hvis $v \in sp_+(\mathbb{X})$ har vi jvf. 2.14.12, at $F_{\mathbb{X}}(v) - F_{\mathbb{X}}(v-) \neq 0$, dvs. $F_{\mathbb{X}}$ er diskont. i v .

Da $\mathbb{X}$ er diffus hviss $sp_+(\mathbb{X}) = \emptyset$ følger det af ovenstående, at $\mathbb{X}$ er diffus hviss $F_{\mathbb{X}}$ er kont. på hele $\mathbb{R}$ $\square$

Maximal uligheder (2.17)

Lad $\{U_n\}_{n \geq 1}$ betegne en følge af stokastiske variable defineret på samme Ω -rum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Definer

$$\forall n \geq 1 : M_n := \max_{1 \leq j \leq n} U_j, \quad M = \sup_{j \in \mathbb{N}} U_j = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n, \quad U = \limsup_{j \rightarrow \infty} U_j = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{j \geq n} U_j)$$

Påstand: $M_n, n \geq 1$; M og U er veldefinerede stokastiske variable

Bevis:

Lad $x \in \mathbb{R}$ være givet

Da $\{U_n\}_{n \geq 1}$ er en følge af s.v. def. på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ følger, at

$\forall n \geq 1 : \{U_n > x\} \in \mathcal{F}$, jvf. 2.7.6, 'stokastiske variable, vektorer og funktioner'.

$\mathcal{F}$ er en σ -alg. på Ω og er dermed specielt (uc)-stabil, dvs.

$$\{M_n > x\} = \bigcup_{j=1}^n \{U_j > x\} \in \mathcal{F}, \quad \{M > x\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{U_j > x\} \in \mathcal{F}, \quad \{U > x\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\bigcup_{j=1}^n \{U_j > x\} \right) \in \mathcal{F}$$

Af 2.7.6, 'stokastiske variable, vektorer og funktioner' følger det ønskede. $\square$

Påstand:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad P(M_n > x) \leq \sum_{j=1}^n P(U_j > x), \quad P(M > x) \leq \sum_{j=1}^{\infty} P(U_j > x)$$

Hvis $\sum_{j=1}^{\infty} P(U_j > x) < \infty$ da gælder, at $P(U > x) = 0$

Bevis:

Jvf. (*) har vi specielt, at $\{M_n > x\} \subseteq \bigcup_{j=1}^n \{U_j > x\}$,

$\{M > x\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \{U_j > x\}$ og $\{U > x\} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} \{U_j > x\} = \limsup \{U_n > x\}$, $x \in \mathbb{R}$.

Af 1.4.1 har vi, at $P(M_n > x) \leq \sum_{j=1}^n P(U_j > x)$, $P(M > x) \leq \sum_{j=1}^{\infty} P(U_j > x)$

1.3.2 og 2.1.5 giver, at $0 \leq P(U > x) \leq P(\limsup \{U_n > x\})$,

samtidig har vi af 1.4.6 at $P(\limsup \{U_n > x\}) = 0$, da $\sum_{j=1}^{\infty} P(U_j > x) < \infty$, dvs.

$$P(U > x) = 0$$

$\uparrow$
af Borel-Cantelli's 1. lemma

$\square$

Maximal uligheder for subadditive systemer (2.18)

Lad $\{U_j\}_{j \geq 1}$, $\{V_j\}_{j \geq 1}$, $\{W_j\}_{j \geq 1}$ betegne 3 følger af stokastiske variable def. på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, således at...

$$\forall j \in \mathbb{N}: U_j \leq V_j + W_j$$

Definer:

$$M_n := \max_{1 \leq j \leq n} U_j, \quad L_n := \max_{1 \leq j \leq n} W_j, \quad M := \sup_{j \geq 1} U_j, \quad L := \sup_{j \geq 1} W_j$$

$$U := \limsup_{j \rightarrow \infty} U_j, \quad W := \limsup_{j \rightarrow \infty} W_j.$$

Påstand:

Antag, at en af de følgende betingelser er opfyldt...

$$\forall j \geq 1: V_j \perp (U_1, \dots, U_j) \quad \text{el.} \quad \forall j \geq 1: V_j \perp (U_j, U_{j+1}, U_{j+2}, \dots)$$

Da gælder...

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad P(M_n > x) \leq \frac{P(L_n > x - y)}{\min_{1 \leq j \leq n} P(V_j \leq y)} \quad [2.18.4]$$

$$P(M > x) \leq \frac{P(L > x - y)}{\sup_{j \geq 1} P(V_j \leq y)} \quad [2.18.5]$$

$$P(U > x) \leq \frac{P(W > x - y)}{\liminf_{j \rightarrow \infty} P(V_j \leq y)} \quad [2.18.6]$$

(Vi def. $\frac{0}{0} := 1$)

Specielt har vi...

Antag $a_1, \dots, a_n > 0$, $X_1, \dots, X_n$ er uafh. s.v. def. på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Def. $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ $S_j := X_1 + \dots + X_j$, $M_n := \max \{a_1 |S_1|, \dots, a_n |S_n|\}$, $m = \max \{a_1, \dots, a_n\}$

Da gælder $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$P(M_n > x) \cdot \min_{1 \leq j \leq n} P(|S_n - S_j| \leq \frac{y}{a_j}) \leq P(|S_n| > \frac{x-y}{m}) \quad [2.18.7]$$

Beweis:

Lad $x, y \in \mathbb{R}$ være givet

$\forall j \geq 1$: $A_j := \{U_j > x\}$, $B_j := \{V_j \leq y\}$ Antag $\forall j \geq 1$: $V_j \perp (U_1, \dots, U_j)$

Sat $D_1 := A_1$, $\forall j \geq 2$: $D_j = A_j \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{j-1})$

(Dvs. $D_1, D_2, \dots$ betegner disjunktionen af $A_1, A_2, \dots$)

Vi har (af 1.2.12-13), at ...

$$\{M_n > x\} = \bigcup_{j=1}^n \{U_j > x\} = \bigcup_{j=1}^n A_j \stackrel{(1.2.13)}{=} \bigcup_{j=1}^n D_j \quad (1) \quad \text{og } D_1, D_2, \dots \text{ er disjunkte (1.2.12)} \quad (2)$$

$$A_j \cap B_j = \{U_j > x, V_j \leq y\} \stackrel{\substack{\text{af antagelsen om} \\ \forall j \geq 1: U_j \leq V_j + W_j}}{\subseteq} \{U_j > x, U_j - W_j \leq y\} = \{U_j > x, U_j - y \leq W_j\}$$

$$= \{x - y < U_j - y \leq W_j\} \subseteq \{x - y < W_j\}, \text{ dvs. } A_j \cap B_j \subseteq \{x - y < W_j\} \quad (3)$$

Af def. på D_j , $j \geq 1$ og $(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ -stabilitet af $\sigma(U_1, \dots, U_j)$ følger, at $D_j \in \sigma(U_1, \dots, U_j)$, $j \geq 1$.

Af antagelsen og 2.10, 'Uafhængighedskriteriet for stokastiske funktioner', har vi, at $V_j \perp \sigma(U_1, \dots, U_j)$. Dvs. at $\forall j \geq 1$: $B_j \perp D_j$. (4)

$$P(L_n > x-y) = P(\bigcup_{j=1}^n \{W_j > x-y\}) \stackrel{\text{def. på } L_n}{\geq} P(\bigcup_{j=1}^n (A_j \cap B_j)) \stackrel{(3)+1.3.2}{\geq}$$

$$\stackrel{\text{def. på } D_j + 1.3.2}{\geq} P(\bigcup_{j=1}^n (D_j \cap B_j)) \stackrel{D_j\text{-ene disjunkte}}{=} \sum_{j=1}^n P(D_j \cap B_j) \stackrel{(4)}{=} \sum_{j=1}^n P(D_j)P(B_j)$$

$$\geq \min_{1 \leq i \leq n} P(B_i) \sum_{j=1}^n P(D_j) \stackrel{\substack{\min_{1 \leq i \leq n} \\ D_j\text{-ene disjunkte}}}{=} \min_{1 \leq i \leq n} P(B_i) \cdot P(\bigcup_{j=1}^n D_j) = \min_{1 \leq j \leq n} P(V_j \leq y) P(M_n > x)$$

↓

$$P(M_n > x) \leq \frac{P(L_n > x-y)}{\min_{1 \leq j \leq n} P(V_j \leq y)}, \text{ hvis } \min_{1 \leq j \leq n} P(V_j \leq y) \neq 0.$$

↓

$$P(M > x) \leq \frac{P(L > x-y)}{\inf_{j \geq 1} P(V_j \leq y)}, \text{ hvis } \inf_{j \geq 1} P(V_j \leq y) \neq 0 \quad [2.18.6]$$

Sæt $M^p := \sup \{U_j \mid j \geq p\}$, $L^p := \sup \{W_j \mid j \geq p\}$, $p \geq 1$

Af def. på U og W følger, at $M^p \downarrow U$ og $L^p \downarrow W$

Vi ser af 2.18.6, at $P(M^p > x) \leq \frac{P(L^p > x-y)}{\inf_{j \geq p} P(V_j \leq y)}$

For $p \rightarrow \infty$ har vi derfor jvf. 1.4.3, at

$$P(U > x) \leq \frac{P(W > x-y)}{\liminf_{j \rightarrow \infty} P(V_j \leq y)}$$

Antag nu istedet, at $\forall j \geq 1: V_j \perp (U_j, U_{j+1}, \dots)$

Sæt $D_j := A_j \setminus (A_{j+1} \cup \dots \cup A_n)$ $j \in \{1, \dots, n-1\}$ $D_n := A_n$

D_j -ene er disjunkte og $UD_j = UA_j$, et bevis helt analogt med ovenstående giver de ønskede resultater.

Antag $a_1, \dots, a_n > 0$, $X_1, \dots, X_n$ er uafh. s.v. def. på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Def. $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ $S_j := X_1 + \dots + X_j$, $M_n := \max \{a_1 |S_1|, \dots, a_n |S_n|\}$, $m := \max \{a_1, \dots, a_n\}$

Sæt nu $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ $U_j = a_j |S_j|$, $V_j = a_j |S_n - S_j|$, $W_j = m |S_n|$

Da $S_j = S_j - S_n + S_n \Rightarrow |S_j| \leq |S_j - S_n| + |S_n| = |S_n - S_j| + |S_n|$
 $\Rightarrow a_j |S_j| \leq a_j |S_n - S_j| + m |S_n| \Rightarrow U_j \leq V_j + W_j, j=1, \dots, n$
($a_j \leq m$)

og $\sigma(V_j) \subseteq \sigma(X_{j+1}, X_{j+2}, \dots, X_n)$, $\sigma(U_1, \dots, U_j) \subseteq \sigma(X_1, \dots, X_j)$

$\sigma(X_1, \dots, X_j) \perp \sigma(X_{j+1}, \dots, X_n)$ jvf 2.10, 'Uafh. kriterier for s.fkt.'

$\Rightarrow \sigma(V_j) \perp \sigma(U_1, \dots, U_j) \Rightarrow V_j \perp (U_1, \dots, U_j) \quad j \in \{1, \dots, n\}$

Følger af 2.18.4, at

$$P(M_n > x) \cdot \min_{1 \leq j \leq n} P(|S_n - S_j| \leq \frac{y}{a_j}) \leq P(|S_n| > \frac{x-y}{m}) \quad x, y \in \mathbb{R}$$

□