



22. maj 1998

Geometri 1.

BEMÆRKNINGER TIL EKSAMENSSPØRGSMÅL

Generelt gælder det for alle eksamensspørgsmål, at der ved hvert spørgsmål er en eller flere centrale sætninger, propositioner eller lemmaer med bevis, som man skal udvælge en passende mængde af til foredraget. Det er vigtigt man grundigt præsentere den sætning, proposition eller lemma samt beviset herfor, man finder mest central indenfor spørgsmålet.

Endvidere bemærkes det at eksamensspørgsmålene jo ikke er emnemæssige fuldstændig disjunkte. F. eks. er der jo klart overlap mellem (10), (11) og (12) og mellem (13) og (14).

Specifikt kan det bemærkes:

- (1) Til spørgsmål (9) Navlepunktssætningen, at af sproglige hensyn gøres der opmærksom på at Navlepunktssætningen er Proposition 4. s. 147 omhandlende "umbilical points" = navlepunkter.
- (2) Til spørgsmål (13) Paralleltransport, at begrebet kovariant aflede og de lemmaer og formler der høre dertil tænkes omfattet af dette spørgsmål som et led i diskussionen af paralleltransport.

Jørgen Ellegaard Andersen



19. maj 1998

Geometri 1.

PENSUM OG EKSAMENSSPØRGSMÅL

Pensum.

do Carmo 1 – 2, 1 – 3, 1 – 4, 1 – 5, 1 – 6, Note N1 Whitney's sætning for plane kurver, Note N2 Supplerende noter om differentiable flader, do Carmo 2 – 2, 2 – 3, 2 – 4, 2 – 5, 2 – 6, Appendix til Kapitel 3 s. 214 – 216, 3 – 2, 3 – 3, 4 – 2, 4 – 3 til mid s. 235, 4 – 4 t.o.m. Clairaut's relation i eksempel 5 s. 257 fraregnet eksempel 2., 4 – 5 t.o.m. eksempel 6 s. 279 fraregnet eksempel 3, 4 og 5.

Eksamensspørgsmål.

- ✓ (1) Kurveteoriens hovedsætning.
- ✓ (2) Whitney's sætning for plane kurver.
- ✓ (3) Inversfunktionssætning.
- ✓ (4) Regulære flader og Urbilleder af regulære værdier.
- ✓ (5) Parameterskift for regulære flader.
- ✓ (6) Tangentplanet og differentialen af en differentiabel afbildning.
- ✓ (7) Orientering af flader.
- (8) Gauss afbildningen og dens differential.
- (9) Navlepunktssætningen.
- (10) Gauss afbildningen i lokale koordinater.
- (11) Gauss krumning.
- ✓ (12) Theorema Egregium.
- ✓ (13) Paralleltransport.
- ✓ (14) Geodætisk krumning og geodætiske kurver.
- ✓ (15) Gauss-Bonnet's sætning.

VEND!

Eksamen.

Eksamen finder sted d. 15 – 19 samt 22 Juni. Hver morgen kl. 8:30 trækker dagens første eksaminand sit spørgsmål.

Eksaminationen forløber således:

- (1) Eksaminanden trækker sit spørgsmål.
- (2) Eksaminanden forbereder sig i ca. 30 minutter. Det forventes, at man har forberedt et foredrag af ca. 15 – 20 minutters varighed til hvert af eksamensspørgsmålene, så der kun er behov for afpudsning og genopfriskning af detaljer.
- (3) Eksaminanden eksamineres i ca. 30 minutter. I de første ca. 15 – 20 minutter holdes det forberedte foredrag med minimal indgriben fra eksaminator eller censors side. Derefter stiller eksaminator og evt. censor spørgsmål af forskellig art. Det kan være om definitioner, sætninger eller typiske argumenter fra pensum eller diskussion af en lille opgave, som kan løses ved hjælp af metoder og resultater fra pensum.

Jørgen Ellegaard Andersen



18. maj 1998

Geometri 1.

UGESEDDER NR. 15

Forelæsningerne 22. Maj.

Vi skal som den sidste sætning i kurset bevise den globale version af Gauss-Bonnet's sætning.

For at kunne bevise denne sætning har vi brug for begrebet *en triangulering* af en regulær region på en regulær flade. Løst sagt er en triangulering af en regulær region på en regulær flade en opdeling af regionen i trekanter på fladen. - Vi vil definere en triangulering præcist og postulere et par facts om trianguleringer uden bevis. Blandt andet har enhver regulær region på en regulær flade en triangulering. Endvidere, hvis vi har en region R , som er trianguleret, således der er F trekanter, E kanter og V hjørner så er

$$\chi(R) = F - E + V$$

uafhængig af trianguleringen af regionen R og er derfor en topologisk karakteristik af R , som kaldes *Euler-Poincaré karakteristiken* af R .

Baseret på disse facts giver vi så et bevis for den globale version af Gauss-Bonnet's sætning. Derefter skal vi se en række smarte anvendelser af denne fantastiske sætning.

Endelig skal vi også nævne (unden bevis) klassifikationssætningen for kompakte og sammenhængende flader i det 3-dimensionale euclidske rum:

To kompakte og sammenhængende flader i det 3-dimensionale euclidske rum er diffeomorfe hvis og kun hvis de har samme Euler-Poincaré karakteristik.

Altså sådanne flader er klassificeret ved et enkelt heltal. Som et korollar af den globale Gauss-Bonnet's sætning, skal vi vise et kanon resultat, som siger at Euler-Poincaré karakteristiken kan udregnes som et integral af Gauss-krumningen over fladen:

For en kompakt og sammenhængende regulær flade S er Euler-Poincaré karakteristiken givet ved

$$\int_S K d\sigma = 2\pi\chi(S).$$

Jørgen Ellegaard Andersen

The power of geometry is in the interplay between local and global!



12. maj 1998

Geometri 1.

UGESEDDEL NR. 14

Forelæsningsne 14. – 15. Maj.

Forelæsningsne starter i afsnit 4 – 4, hvor Jørgen Tornehave slap. D.v.s. vi udleder de lokale ligninger (4), side 254, for geodætiske kurver og beviser proposition 5 på den følgende side om *eksistens og entydighed* lokalt af en geodætiske kurve i en vilkårlig tangentretning i et vilkårligt punkt på en vilkårlig regulær flade. Vi afslutter afsnittet med en gennemgang af den første halvdel af eksempel 5 (til og med Clairaut's relation) om geodætiske kurver på en omdrejningsflade.

Derefter går vi videre med *Gauss-Bonnet's sætning og dens anvendelser*, afsnit 4 – 5. *Gauss-Bonnet's sætning* er en vidunderlig sætning, idet den relaterer geometriske og topologiske information. Som en meget simpel anvendelse, giver formen at summen af vinklerne i en geodætisk trekant på en regulær flade afviger fra det klassiske π præcist med integralet af Gauss-krumningen over trekanten. D.v.s., hvis $K = 0$, som i planen, er der ingen afvigelse, hvis $K = 1$, som på en sfære, så er vinkelsummen π plus arealet af trekanten og endelig hvis $K = -1$, som på en hyperbolsk flade, så er vinkelsummen differensen af π og arealet af trekanten.

Først postulerer vi *sætningen om vinkel-drejningen* af en simpel, lukket, stykkevis regulær parametriseret kurve. Jeg skal give Jer et hint til hvordan denne sætning bevises, men beviset vil ikke blive gennemgået i detaljer.

Derefter beviser vi den *lokale form* af Gauss-Bonnet's sætning for *simple regioner*, som er indeholdt i et kort på en orienteret fladen.

Næste uge afslutter vi kurset ved at gennemgå den *globale version* af Gauss-Bonnet samt at give en stribe anvendelser af Gauss-Bonnet's sætning.

Øvelsesopgaver 18. Maj – 22. Maj:

4.3.9, 4.4.3, 4.4.4, 4.4.7, 4.4.9 samt opgaven på bagsiden af ugesedlen.

Jørgen Ellegaard Andersen

The beauty in geometry lies in its interplay with topology!

Opgave.

Lad S være en orienteret regulær flade og antag at R er en simpel region på S således at ∂R er en n -kant indeholdt i et plan. Antag at den inducerede orientering på ∂R er modsat orientering induceret fra det indre af n -kanten i planet. Antag at R er indeholdt i billedet af et kort $X : U \rightarrow S$, hvor U er homeomorf med en åben disk i planen.

Udregn

$$\int_R K d\sigma.$$

(opg. 4.3.1)

Lad $S \subseteq \mathbb{R}^3$ betegne en regulær flade

$x: U \text{ åben} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ betegne et kort, $x(U)=S$ således, at koefficienter for den første fundamentalform er E, F, G , og K Gauss krumning i et pkt. $p \in S$

Påstand:

$$F=0:$$

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}$$

Bevis:

At $F=0$ giver ifølge lign. (2) s. 232 i Do Carmo, at

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v}{2G}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G} \quad (*)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{G_u}{2E}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}, \quad (\Gamma_{12}^2)_u = \frac{2GG_{uu} - 2G_u^2}{4G^2}, \quad (\Gamma_{11}^2)_v = \frac{-2GE_v + 2G_v E_u}{4E^2}$$

$$\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v = \frac{E_{vv}\sqrt{EG} - E_v \frac{1}{2\sqrt{EG}}(E_v G + E G_v)}{EG} = \frac{2E_{vv}EG - E_v^2 G - E G_v E_v}{2\sqrt{EG} \cdot EG}$$

$$\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u = \frac{G_{uu}\sqrt{EG} - G_u \frac{1}{2\sqrt{EG}}(E_u G + E G_u)}{EG} = \frac{2G_{uu}EG - E_u G G_u - E G_u^2}{2\sqrt{EG} \cdot EG}$$

Vi ser

$$-\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\} = \frac{-2E_{vv}EG + E_v^2 G + E G_v E_v - 2G_{uu}EG + E_u G G_u + E G_u^2}{4E^2 G^2}$$

$$-\frac{1}{E} ((\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2)$$

$$= -\frac{1}{E} \left(\frac{2GG_{uu} - 2G_u^2 + 2GE_{uv} - 2G_v E_v + G_u^2 + E_v G_v}{4G^2} - \frac{E_v^2 + E_u G_u}{4EG} \right)$$

$$= \frac{-2GG_{uu}E + 2G_u^2E - 2GE_{uv}E + 2E_v G_v E - G_u^2E - EE_v G_v + E_v^2G + E_u G_u G}{4E^2G^2}$$

$$= \frac{-2E_{uv}EG + E_v^2G + EG_u E_v - 2GG_{uu}E + E_u G_u G + G_u^2E}{4E^2G^2}$$

□



6. maj 1998

Geometri 1.

UGESEDDEL NR. 13

Denne ugeseddel udkommer forsinket og i et reduceret format, idet jeg har været syg og sengeliggende siden weekenden.

Forelæsningerne 7. Maj.

Jørgen Tornehave vil fortsætte gennemgangen af afsnit 4 – 4 om paralleltransport og geodætiske kurver, der hvor Andrew slap i fredags. Jeg vil så gøre afsnittet færdigt og gå videre med afsnit 4 – 5 om Gauss-Bonnet i næste uge.

Øvelsesopgaver 11. Maj – 15. Maj:

4.2.3, 4.2.4, 4.2.11, 4.2.14, 4.2.18, 4.3.3, 4.3.4.

Afleveringsopgaver 11. Maj – 15. Maj:

4.3.1

Jørgen Ellegaard Andersen

The worst thing is being so sick you can't even do geometry!

4.2.3

Lad $S, \bar{S}$ betegne regulære flader i $\mathbb{R}^3$ og lad $\varphi: S \rightarrow \bar{S}$ betegne en diffeomorfi.

Påstand:

φ er en isometri

$\Leftrightarrow$

$\forall \alpha: I \text{ åbent interval } \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S, \alpha \in C^\infty(I, S):$

$$\forall t \in I: \int_{t_0}^t |\alpha'(\tau)| d\tau = \int_{t_0}^t \left| \frac{d}{d\tau} (\varphi \circ \alpha(\tau)) \right| d\tau, \text{ givet } t_0 \in I$$

Bevis:

$\Downarrow$:

At φ er en isometri er ensbetydende med

$$\forall p \in S; w \in T_p(S): I_p(w) = I_{\varphi(p)}(\varphi_* w) \quad (+)$$

Lad $\alpha: I \text{ åbent interval } \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S, \alpha \in C^\infty(I, S)$ betegne en parametriseret kurve på S , da er $\varphi \circ \alpha: I \rightarrow \bar{S}$ en parametriseret kurve på $\bar{S}$ og for givet $t_0 \in I$ og vilk. $t \in I$ har vi

$$\int_{t_0}^t |\alpha'(\tau)| d\tau = \int_{t_0}^t \sqrt{I_p(\alpha'(\tau))} d\tau = \int_{t_0}^t \sqrt{I_{\varphi(p)}(d\varphi(\alpha'(\tau)))} d\tau = \int_{t_0}^t \left| \frac{d}{d\tau} (\varphi \circ \alpha(\tau)) \right| d\tau$$

↑:

Lad $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$, $\alpha \in C^\infty(I, S)$ betegne en parametriseret kurve på S , da er $\varphi \circ \alpha: I \rightarrow \bar{S}$ en parametriseret kurve på $\bar{S}$ og pr. antagelse har vi for $t_0 \in I$ givet, $t \in I$ vilk.

$$\int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt = \int_{t_0}^t \left| \frac{d}{dt} (\varphi \circ \alpha(t)) \right| dt = \int_{t_0}^t \sqrt{I_p(d\varphi(\alpha'(t)))} dt$$

$$\parallel$$
$$\int_{t_0}^t \sqrt{I_p(\alpha'(t))} dt \quad (*)$$

Vi skal vise $I_p(\alpha'(t)) = I_{\varphi(\alpha)}(d\varphi(\alpha'(t)))$, jvf. bn (t)
af ovenstående ser vi, at dette er ækvivalent med at vise
 $|\alpha'(t)| = |d\varphi(\alpha'(t))|$

Antag $|\alpha'(t)| < |d\varphi(\alpha'(t))|$ for $t \in I$

Af Ebbe Thue Poulsen's Mat II noter følger, at idet

$\tilde{t} \rightarrow |d\varphi(\alpha'(\tilde{t}))| - |\alpha'(\tilde{t})|$ er en pæn fkt. $\exists \varepsilon > 0 \forall \tilde{t} \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon):$

$$|\alpha'(\tilde{t})| < |d\varphi(\alpha'(\tilde{t}))| \Rightarrow \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} |\alpha'(t)| dt < \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} |d\varphi(\alpha'(t))| dt \quad \text{m} \quad (*)$$

Dvs. $|\alpha'(t)| \geq |d\varphi(\alpha'(t))|$, $\forall t \in I$

Tilsvarende vises $|\alpha'(t)| \leq |d\varphi(\alpha'(t))|$, $\forall t \in I$

Dermed har vi alt i alt: $\forall t \in I: |\alpha'(t)| = |d\varphi(\alpha'(t))|$

Jvf. ovenstående bn. har vi dermed fuldført vort bevis.

□

4.2.4

Påstand: Sferen S^2 er lokalt konform med x - y -planet

Bevis:

Vi benytter notationen og resultaterne i exc. 2.2.16 (afl. nr. 5)

Af exc. 2.2.16 følger, at π er en diffeomorfi fra S^2 ind i x - y planet. Jvf. 2.2.16 a) har vi...

$$\pi_u^{-1} = \frac{1}{(u^2+v^2+4)^2} \begin{pmatrix} 4(-u^2+v^2+4) \\ -8uv \\ 16u \end{pmatrix}, \quad \pi_v^{-1} = \frac{1}{(u^2+v^2+4)^2} \begin{pmatrix} -8uv \\ 4(u^2-v^2+4) \\ 16v \end{pmatrix}$$

$$\langle \pi_u^{-1}, \pi_u^{-1} \rangle = 16 / (u^2+v^2+4)^2$$

$$\langle \pi_u^{-1}, \pi_v^{-1} \rangle = 0$$

$$\langle \pi_v^{-1}, \pi_v^{-1} \rangle = 16 / (u^2+v^2+4)^2$$

Vi benytter identitetsafb. som kort for x - y planet, hvilket trivielt giver følgende koefficienter for den første fundamentalform på x - y planet: $\bar{E}=1$, $\bar{F}=0$, $\bar{G}=1$

Ovenstående udregn. giver desuden følgende koefficienter for den første fundamentalform på S^2 mht. til π^{-1} som jo er def. på x - y planet: $E=16/(u^2+v^2+4)=G$, $F=0$

Idet vi def. $\lambda^2: S \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall p \in S: \lambda^2(p) = \frac{16}{\|\pi(p)\|^2+4}$

ser vi:

$$E = \lambda^2 \bar{E}, \quad F = \lambda^2 \bar{F}, \quad G = \lambda^2 \bar{G}$$

Af prop. 2 s. 227 følger det ønskede.

□

4.2.11

a)

$S \subseteq \mathbb{R}^3$ betegner en regulær flade

$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ betegner en afstandsbevarende (exc. 4.2.8) afbildning. (*)

$$F(S) \subseteq S$$

Påstand: $F|_S: S \rightarrow S$ er en isometri på S

Bevis:

Jvf. exc. 4.2.8 er G er diffeomorfi.

Af exc. 4.2.3 følger, at $F|_S$ er en isometri på S , hvis vi for en parametriseret regulær kurve $\alpha: I \rightarrow S$ har:

$$\int_{t_0}^t |\alpha'(s)| ds = \int_{t_0}^t |dF|_S(\alpha'(s))| ds \quad t, t_0 \in I$$

Af sætn. om geometrisk tolkn. af integralet for kurvelængde (Gray) følger

$$\int_{t_0}^t |\alpha'(s)| ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| \quad t_0 \leq t_1 < \dots < t_n = t \in I$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \|F|_S(\alpha(t_i)) - F|_S(\alpha(t_{i-1}))\|$$

$$= \int_{t_0}^t |dF|_S(\alpha'(s))| ds$$

□

b)

Til enhver ortogonalafb. svarer en rotation og omvendt.

Det er desuden klart, at enhver rotation af S^2 er en afstandsbevarende diffeomorfi ind i S^2 .

Af a) følger, at enhver ortogonalafb. af $\mathbb{R}^3$ er en isometri.

Man kan vise, at mængden af isometrier på en regulær flade danner en gruppe, og at mængden af ortogonale lineære afb. af $\mathbb{R}^3$ danner en gruppe. Ovenstående giver dermed, at gruppen af ortogonale lin. afb. af $\mathbb{R}^3$ er indeholdt i gruppen af isometrier på S^2 .

c)

Lad S_1 betegne cylinderen $x^2 + y^2 = 1$ og S_2 betegne helicoidet
Af ex. 1 s. 29 i De Corno følger, at S_1, S_2 mht. til de
valgte kort på S_1, S_2 er isometriske (Dvs. S_1, S_2 er lokalt isometriske)
Det er klart, at afstanden mellem to pkt. på S_1 er mindre
end (el. lig) 2, imidlertid tilhører pkt. $(-\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{\pi}{2}, 0)$
planet S_2 og deres afstand er $\pi > 2$.

Dvs. den lokale isometri mellem S_1 og S_2 er ikke afstandsbevarende

4.2.14

Lad $S, \bar{S}$ betegne regulære flader i $\mathbb{R}^3$ og $\varphi: S \rightarrow \bar{S}$ betegne en diffeomorfi

Påstand:

φ er en konform afb. $\Leftrightarrow \forall p \in S; v_1, v_2 \in T_p(S): \cos(v_1, v_2) = \cos(\varphi(v_1), \varphi(v_2))$

Bevis:

' $\Rightarrow$ ':

Lad $p \in S, v_1, v_2 \in T_p(S)$ være givet.

At φ er en konform afb. betyder $\exists \lambda^2: S \rightarrow \mathbb{R}_+, \lambda^2$ diff.:

$$\langle \varphi(v_1), \varphi(v_2) \rangle = \lambda^2 \langle v_1, v_2 \rangle \quad (*)$$

Antag $|v_1| = 0 \vee |v_2| = 0$, da er det trivielt, at

$$\cos(v_1, v_2) = \cos(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) = 0$$

Idet $|v_i| = 0 \Leftrightarrow v_i = 0$ og jf. (*): $\varphi(0) = 0$

Antag $|v_1| \neq 0 \wedge |v_2| \neq 0$

$$\text{Vi får, idet } |\varphi(v_1)|^2 = \langle \varphi(v_1), \varphi(v_1) \rangle = \lambda^2 \langle v_1, v_1 \rangle = \lambda^2 |v_1|^2$$

og tilsvarende $|\varphi(v_2)|^2 = \lambda^2 |v_2|^2$, at $|\varphi(v_1)| = \sqrt{\lambda^2} |v_1| \neq 0$

og $|\varphi(v_2)| = \sqrt{\lambda^2} |v_2| \neq 0$ (husk $|v_1| \neq 0 \wedge |v_2| \neq 0 \wedge \lambda^2 > 0$)

Dus.

$$\begin{aligned} \cos(v_1, v_2) &:= \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{|v_1| |v_2|} = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle \lambda^2}{|v_1| |v_2| \lambda^2} = \frac{\lambda^2 \langle v_1, v_2 \rangle}{\sqrt{\lambda^2} |v_1| \sqrt{\lambda^2} |v_2|} \\ &= \frac{\langle \varphi(v_1), \varphi(v_2) \rangle}{|\varphi(v_1)| |\varphi(v_2)|} =: \cos(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) \end{aligned}$$

' $\leq$ ':

Lad $p \in S$, $v_1, v_2 \in T_p(S)$ være vilk.

Pr. antagelse har vi $\cos(v_1, v_2) = \cos(\varphi(v_1), \varphi(v_2))$

Vi skal vise, at $\exists \lambda^2: S \rightarrow \mathbb{R}_+$ diff. således

$$\langle \varphi(v_1), \varphi(v_2) \rangle = \lambda^2 \langle v_1, v_2 \rangle \quad (*)$$

Hvis $|v_1| = 0 \wedge |v_2| = 0$ følger (*), idet vi lader $\lambda^2: S \rightarrow \mathbb{R}_+$ være def. $\lambda^2(p) = 1$, $p \in S$ og idet vi obs., at $|v_i| = 0 \Leftrightarrow v_i = 0$ og $\forall w \in T_p(S)$: $\cos(v_i, w) = \cos(\varphi(v_i), \varphi(w)) = 0 \Leftrightarrow v_i = \varphi(v_i) = 0$ hvilket giver $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle \varphi(v_1), \varphi(v_2) \rangle = 0$

Antag $|v_1| \neq 0 \wedge |v_2| \neq 0$

$$\cos(v_1, v_2) := \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{|v_1| |v_2|}, \quad \cos(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) := \frac{\langle \varphi(v_1), \varphi(v_2) \rangle}{|\varphi(v_1)| |\varphi(v_2)|}$$

$$\text{Sæt } \lambda^2 = \frac{|\varphi(v_1)| |\varphi(v_2)|}{|v_1| |v_2|}$$

4.2.18

Lad $S, \bar{S}$ betegne regulære flader i $\mathbb{R}^3$, $\varphi: S \rightarrow \bar{S}$ en diffeomorfi,
 $\chi: U \text{ åben} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ et atlas på S

Det er klart, at $\varphi \circ \chi: U \rightarrow \bar{S}$ er et atlas på $\bar{S}$.

Påstand:

Hvis φ er en konform afbildning og at φ er 'arealbevarende', dvs.

$$\iint_Q |\chi_u \wedge \chi_v| du dv = \iint_Q |d\varphi(\chi_u) \wedge d\varphi(\chi_v)| du dv \quad (*)$$

$Q = \chi^{-1}(R)$, hvor R er en foreningsmængde af en åben kurvesammenhængende delmængde af S , D med ∂D , da er φ en isometri.

Bevis:

$$(*) \Rightarrow \sqrt{EG - F^2} = |\chi_u \wedge \chi_v| = |d\varphi(\chi_u) \wedge d\varphi(\chi_v)| = \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}$$

At φ er en konform afbildning, betyder $\exists \lambda \in C^\infty(S, \mathbb{R}_+)$:
 $\forall p \in S; v, w \in T_p(S): \langle d\varphi(v), d\varphi(w) \rangle = \lambda^2 \langle v, w \rangle$, og
 dermed specielt: $\bar{E} = \lambda^2 E, \bar{G} = \lambda^2 G, \bar{F} = \lambda^2 F$

$$\text{Dette giver } \bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = (\lambda^2)^2 EG - F^2 \wedge \bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = EG - F^2$$

$\Downarrow$

$$\lambda^2 = 1$$

$\Downarrow$

$$\langle d\varphi(v), d\varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

□

4.3.4

Påstand: Ingen omegn af et vilk. pkt. på S^2 kan afb. isometrisk ind i et plan.

Bevis:

Antag det modsatte.

Dvs. da $K_S \equiv 1$ på S^2 følger af Theorema Egregium at $K_p \equiv 1$ på planet, men dette er en modstrid idet planet har $K_p \equiv 0$. $\square$

(opg. 3.3.5)

Definer

$$\underline{x}: U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad U :=]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[\times]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[\quad (\text{el. bedrøede } (u,v) \text{ hvor } U \leftrightarrow \underline{x}(U))$$

$$\forall (u,v): \quad \underline{x}(u,v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2)$$

I det følgende benytter vi den sædvanlige met. indført i De Carro...

$$p \in \underline{x}(U):$$

$$\underline{x}_u = (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u) \quad ; \quad \underline{x}_v = (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v)$$

$$\underline{x}_{uu} = (-2u, 2v, 2) \quad ; \quad \underline{x}_{uv} = (2u, -2v, -2) \quad ; \quad \underline{x}_{vv} = (2v, 2u, 0)$$

$$\begin{aligned} E = \langle \underline{x}_u, \underline{x}_u \rangle &= (1 - u^2 + v^2)^2 + 4u^2v^2 + 4u^2 \\ &= u^4 + (1 + v^2)^2 - 2u^2 - 2u^2v^2 + 4u^2v^2 + 4u^2 \\ &= (1 + v^2) + u^4 + 2u^2(1 + v^2) = (u^2 + v^2 + 1)^2 \end{aligned}$$

Pga. symmetri har vi, at $G = E$

$$F = \langle \underline{x}_u, \underline{x}_v \rangle = 2uv(1 - u^2 + v^2) - 2uv(v^2 - u^2 - 1) - 4uv = 0$$

$$\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v = \begin{pmatrix} 1 - u^2 + v^2 \\ 2uv \\ 2u \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2uv \\ 1 - v^2 + u^2 \\ -2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u - 2u^3 - 2uv^2 \\ 2v + 2v^3 + 2u^2v \\ 1 - u^4 - v^4 - 2u^2v^2 \end{pmatrix}$$

$$|\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v| = \sqrt{EG - F^2} = (u^2 + v^2 + 1)^2$$

$$e = \left\langle \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|}, x_{uu} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{(u^2+v^2+1)^2} (4u^2+4u^4 + \cancel{4u^2v^2} + 4v^2+4v^4 + 4u^2v^2 + 2 - 2u^4 - 2v^4 - \cancel{4u^2v^2})$$

$$= \frac{1}{(u^2+v^2+1)^2} (2u^2+2v^2+2u^4+2v^4-u^4-v^4+2u^2v^2) \cdot 2$$

$$= \frac{1}{(u^2+v^2+1)^2} (2u^2+2v^2+u^4+v^4+1+2u^2v^2) \cdot 2 = \frac{(u^2+v^2+1)^2}{(u^2+v^2+1)^2} \cdot 2 = 2$$

Af de ovenstående udreg. størrelser ser vi, at $g = -2$
(idet $x_w = -x_{uu}$ og pga. symmetri)

$$f = \left\langle \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|}, x_{uv} \right\rangle = -4uv - 4u^3v - 4uv^3 + 4uv + 4uv^3 + 4u^3v = 0$$

Af ovenstående følger, at

$$\frac{e}{E} = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}, \quad \frac{g}{G} = \frac{-2}{(1+u^2+v^2)^2}$$

Da $F=f=0$ har vi dermed, jvf. bn. s. 162 i Do Carmo, at

$$k_1 = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}, \quad k_2 = \frac{-2}{(1+u^2+v^2)^2}$$

Da $k_1 \neq k_2$ er ingen af pkt.erne på $\alpha(u)$ navlepunkter, desuden har vi, at $F=f=0$, af overvejelse s. 161 i 2C fås, at krumningslinjerne er koordinatlinjerne.

Af Do Carus s. 166 følger, at $\alpha \in C^\infty(I \text{ åbent interval} \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, α t.k., $\forall t \in I: \alpha(t) = \alpha(u(t), v(t))$ er en asymptotisk kurve, hviss

$$e(u')^2 + 2f u'v' + g(v')^2 = 0$$

$\Updownarrow$ jvf. ovenstående udregn.

$$2(u')^2 - 2(v')^2 = 0$$

$\Updownarrow$

$$\pm u' = v'$$

$\Updownarrow$

$$u - v = c_0 \quad \vee \quad u + v = c_1 \quad c_0, c_1 \in \mathbb{R}$$



27. april 1998

Geometri 1.

UGESEDDER NR. 12

Forelæsningerne 30. April – 1. Maj.

Vi er nu nået til en af hovedsætningerne i kurset, nemlig Gauss' *Theorema Egregium*, afsnit 4 – 3, som siger at Gauss-krumningen er en intrinsisk geometrisk størrelse, d.v.s. Gauss-krumningen er invariant under lokale isometrier. Måden vi beviser dette på er ved at udlede en formel for Gauss-krumningen lokalt i ethvert kort, som kun afhænger af den første fundamentalform. D.v.s. vi giver et udtryk for Gauss-krumningen som kun afhænger af funktionerne E, F og G , og deres partiel afledede, lokalt i kortet. Da den første fundamentalform er invariant under lokale isometrier, så er Gauss-krumningen det derfor også.

Efter vi har gennemgået *Theorema Egregium* og konsekvenser heraf, springer vi til afsnit 4 – 4. Vi gennemgår altså ikke Bonnet's sætning.

I Afsnit 4 – 4 skal vi diskutere *paralleltransport* og *geodætiske kurver*.

Først definerer vi geometrisk den *kovariante afledede* af et vektorfelt defineret på en regulær flade og viser dernæst at den kovariante afledede er intrinsisk.

Et *parallelt* vektorfelt langs en kurve på en flade defineres ved at have kovariant afledet langs kurven lig nul. Denne definition vil vi bruge til at give mening til *paralleltransport* af en tangentvektor langs en kurve på en flade, generaliserende den velkendte paralleltranslation af vektorer i planen.

Dernæst definerer vi *geodætiske* kurver, som de kurver, hvis afledede er parallelle langs kurven, helt i analogi med definitionen på en ret linie i planen. Derefter skal vi se eksempler på geodætiske kurver på enhedskuglen og cylinderen.

Andrew du Plessis står for forelæsningerne fredag i denne uge.

Næste uge fortsætter vi med afsnit 4 – 4.

Øvelsesopgaver 4. Maj – 8. Maj:

3.3.4, 3.3.13, 3.3.16, 3.3.22, 3.3.23

Afleveringsopgaver 4. Maj – 8. Maj:

3.3.5

Jørgen Ellegaard Andersen

The intrinsic geometry of surfaces is mindblowing!

3.3.4

Definer $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2: h(u,v) = u \cdot v$

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2, z = h(x,y)\}$$

Af prop. 1 s. 58 i Do Carmo følger, at S er en reg. flade, og at S er orientierbar følger af bm. s. 136.

Jvf. DC s. 163 og med den sædvanlige notation har vi, at

$\forall p \in S$:

$$h_x = y, \quad h_y = x, \quad h_{xx} = 0, \quad h_{xy} = 1, \quad h_{yy} = 0$$

$$E = y^2, \quad F = xy, \quad G = x^2$$

$$e = 0, \quad f = \frac{1}{(1+y^2+x^2)^{1/2}}, \quad g = 0$$

Af Do Carmo s. 160-161 følger, at en sammenhængende reg. kurve α på S , $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\forall t \in I: \alpha(t) = \alpha(u(t), v(t))$ er

en asymptotisk kurve, hvis

$$e(u')^2 + 2f u'v' + g(v')^2 = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^{1/2}} u'v' = 0$$

$\Updownarrow$ $eg - f^2 < 0$ + bm. s. 160 i Do Carmo

$$u = c_0 \quad \vee \quad v = c_1 \quad ; \quad c_0, c_1 \in \mathbb{R}$$

en krumningslinje, hviss

$$(fE - eF)(u')^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)(v')^2$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ e=g=0}}{=} f(E(u')^2 - G(v')^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} E(u')^2 - G(v')^2 = 0 \\ f > 0 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow v^2(u')^2 - u^2(v')^2 = 0 \Leftrightarrow \pm v u' = u v'$$

$$\Leftrightarrow \frac{u}{u'} = \pm \frac{v}{v'} \quad (\text{Juf. Dcs 161 er koordinatfkt ikke asymptotiske kurver})$$

$$\Leftrightarrow$$

3.3.13

Lad $S \subseteq \mathbb{R}^3$ betegne en orienterbar regulær flade

Def. $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\forall p \in \mathbb{R}^3: F(p) = c \cdot p$, $c \in \mathbb{R}_+$

$$\bar{S} := F(S)$$

Påstand: $\bar{S}$ er en orienterbar regulær flade

Bevis:

Lad $\mathcal{U} = \{x_j \mid j \in J \subseteq \mathbb{N}\}$ betegne et atlas på S

Det er klart, at $c \cdot x_j$, $j \in J$ opfylder def. N.2.12 (da x_j , $j \in J$ opfylder def. N.2.12), og at

$\mathcal{U}_c = \{c \cdot x_j \mid j \in J \subseteq \mathbb{N}\}$ dækker $\bar{S}$ og dermed er et atlas på $\bar{S}$.

Vælg en orientering af S og lad $N: S \rightarrow S^2$ betegne det dertilhørende enhedsnormalvektorfelt.

Før $p \in S$, $x \in \mathcal{U}$: $p \in x(U)$ kan vi (bm. Do Carmo s. 154-155) antage $N = \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|}$

$$\text{Bm.: } \frac{c \cdot x_u \wedge c \cdot x_v}{|c \cdot x_u \wedge c \cdot x_v|} = \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|}$$

Dvs. at $\bar{N}: \bar{S} \rightarrow S^2$; $\forall p \in \bar{S}$, $\bar{N}(p) = N(\frac{p}{c})$ definerer et diff. enhedsnormalvektorfelt på $\bar{S}$.

Af prop. 1 s. 105 følger $\bar{S}$ er orienterbar

□

Af udtrykkene i De Carmo s. 92 og 154-156, ovenstående betragtninger og reglerne for differentiation følger...

$$\bar{K} = K / c^2 \quad \text{og} \quad \bar{H} = H / c$$

3.3.16

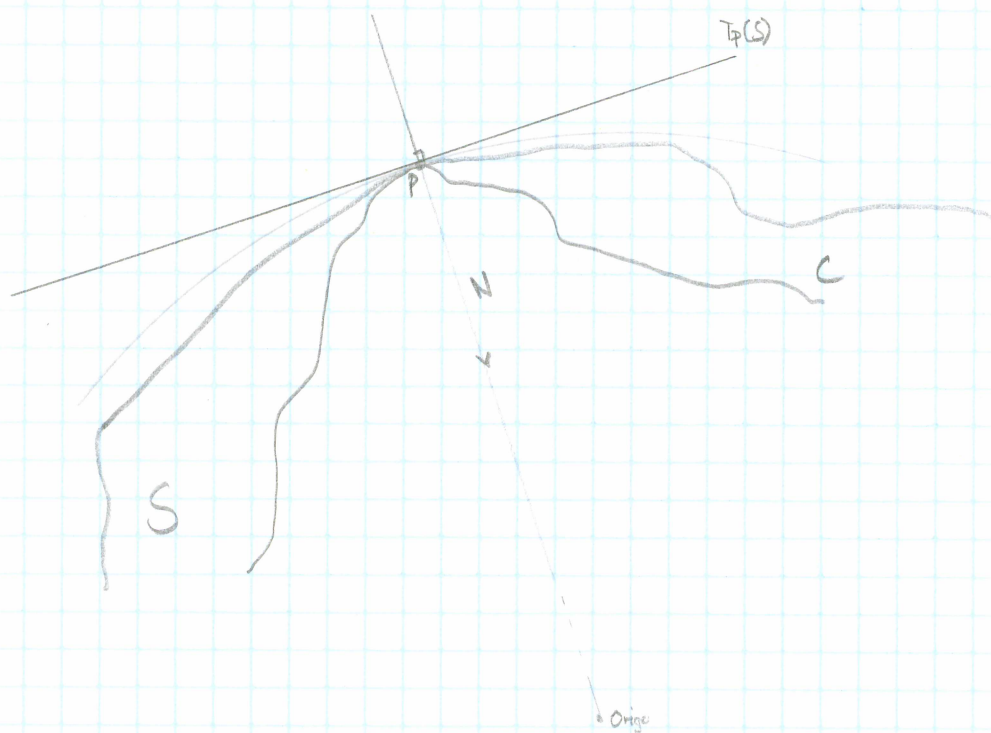
Lad $S \subseteq \mathbb{R}^3$ betegne en orienterbar regulær flade

Antag at S er kompakt (i $\mathbb{R}^3$ ækvivalent med at S lukket og begrænset)

Påstand: S har mindst et elliptisk pkt.

Bevis:

At S er lukket og begrænset betyder, at der eksisterer en sfære med centrum i origo og radius lig R som indeholder S og har min. et pkt. tilfælles med S ; vi betragter et sådant pkt. p . (*)

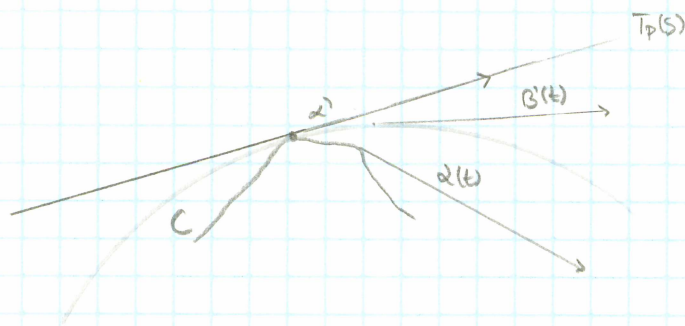


Da S klart ligger på den ene side af tangentplanet $T_p(S)$ (el. modsat med vor valgte p i (*)) følger af prop. 1 s. 158 i De Canno, at p ikke er et hyperbolsk pkt. (et modstridningsbevis).

Betragt sfæren med centrum i origo og radius R som en (Juf. Do Carmo s. 104 ex. 2) orientébar regulær flade. S^2_R
 Juf. DC ex. 7 s. 143 er p et navlept. for S^2_R hvori normalkrumningen er $1/R$ (>0 da $R>0$)

Betragt en parametriseret regulær kurve på S , parametriseret ved bue længde: $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \cdot \alpha(0) = p, \alpha'(0) \in T_p(S), \alpha \in \mathcal{U}^{(t)}$
 Vi vil nu vise, at normalkrumningen i retning $\alpha'(0)$, k_n er skarpt større end nul.

$$1/R = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha'(0) - \beta'(t)}{t} \stackrel{\text{pyth.}}{\leq} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha'(0) - \alpha'(t)}{t} = k_n$$



Da retning af $\alpha'(0)$ var vilk. følger af prop. 1 s. 83 i DC og def. 4 s. 144 og def. 6-7 s. 146, at $k \geq 1/R > 0$ og dermed, at p er et elliptisk pt. på S .

□

(+)

$\mathcal{U}$ er normalsnitte af S i p langs $\alpha'(0)$ (se DC s. 142-3)

3.3.22 (Hessicanden)

Lad S betegne en orienterbar regulær flade

$h: S \rightarrow \mathbb{R}$ betegner en diff. fkt (se Do Carmo s. 72 def. 1)

Antag at for $p \in S$: $dh_p = 0$ (se DC s. 84-85 prop. 2)

Lad $w \in T_p(S)$ og lad $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$ betegne en glat kurve på S , således: $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$

Definer

$$H_p h(w) = \left. \frac{d^2(h \circ \alpha)}{dt^2} \right|_{t=0}, \quad w \in T_p(S)$$

Lad $\mathbf{x}: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ betegne et kort på S , således $p \in \mathbf{x}(U)$

Væg (u', v') således: $w = u' \cdot \mathbf{x}_u + v' \cdot \mathbf{x}_v$ (og $\alpha''(0) = w'' = (u'', v'')$)

Påstand:

$$H_p h(w) = H_p h(u' \mathbf{x}_u + v' \mathbf{x}_v) = H_p h(u', v') = h_{uu}(p)(u')^2 + 2h_{uv}(p)u'v' + h_{vv}(p)(v')^2$$

Beweis:

$$\begin{aligned} H_p h(w) &= \left. \frac{d^2(h \circ \alpha)}{dt^2} \right|_{t=0} = h_{uu}(u')^2 + h_{uv}u'v' + h_u u'' + h_{vv}(v')^2 + h_{vu}u'v' + h_v v'' \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{DC s. 84-5} \\ &\quad \text{+ produktregl.} \\ &= h_{uu}(u')^2 + 2h_{uv}u'v' + h_{vv}(v')^2 \\ (dh_p = (h_u, h_v) = 0) \end{aligned}$$

□

Det er klart, at $H_p h(w)$ ikke afhænger af parametriseringen α ,
og af prop. 1 s. 83 i Do Carmo følger, at $H_p h: T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$ er veldefineret.

Vi ser desuden, at $H_p h$ er en kvadratisk form på $T_p(S)$

Definer $h: S \rightarrow \mathbb{R}$; $\forall q \in S: h(q) = \langle q - p, N(p) \rangle$

$$\left. \frac{dh \circ \alpha}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \langle \alpha(t) - p, N(p) \rangle \right|_{t=0} = \langle \alpha'(t), N(p) \rangle \Big|_{t=0} = 0 \quad \alpha' \in T_p(S)$$

Da α vilk. ser vi, at $dh_p = 0$, dvs. p er et kritisk pkt. for h .

Dvs. $H_p h: T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$ er veldef. for h lig ovenstående fkt.

Lad $w \in T_p(S)$, $|w|=1$ være givet, og lad $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$:

$|\alpha'(t)|=1$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\alpha(0)=p$, $\alpha'(0)=w$ og α reguler kurve.

Påstand:

$$k_n(w) = \langle \alpha''(0), N(p) \rangle = H_p h(w)$$

$\uparrow$
 DC s. 141

Bevis:

$$\frac{d^2}{dt^2} (h \circ \alpha(t)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \langle \alpha'(t), N(p) \rangle \Big|_{t=0} = \langle \alpha''(0), N(p) \rangle = k_n(w)$$

Af DC s. 142 følger, at $\Pi_p = H_p h$ (h højdefkt.) □
 VIKTET!

3.3.23 (Morse funktioner på orienterbare regulære flader)

Lad S betegne en orientierbar regulær flade, og

$h: S \rightarrow \mathbb{R}$ betegne en diff. fkt. (se def. s. 75 i DoCarmo)

Antag, at $p \in S$ er et kritisk pkt. for h (se exc. 2.4.28), dvs $dh_p = 0$

Lad $A_p h$ betegne matricen for den selvadjungerede lineære afb. associeret med den kvadratiske form $H_p h$ (se exc. 3.3.22 + app. 3)

Hvis $A_p h$ er ikke-singulær, dvs. $A_p h$ er invertibel (ækv. sejlens lin. uafh.), siges p at være et ikke-degenereret kritisk pkt. ellers siges p at være et degenereret kritisk pkt..

h siges at være en Morse funktion, hvis alle dens kritiske punkter er ikke-degenereret.

Def. $h_r: S \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall q \in S: h_r(q) = \sqrt{\langle q-r, q-r \rangle}$, $r \in \mathbb{R}^3 \setminus S$

Påstand: $dh_{r,p} = 0 \iff (p-r) \parallel N(p)$

Bevis:

' $\Rightarrow$ ':

Lad $\alpha: U \text{ åben} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, $p \in \alpha(U)$ betegne et kort på S

Ifølge Do Carmo s. 84-85 har vi...

$$\Omega = dhr_p \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2\sqrt{\langle p-r, p-r \rangle}} \cdot (2\langle x_u, p-r \rangle, 2\langle x_v, p-r \rangle)$$

$\uparrow$
 hursk rts
 $\Rightarrow p-r \neq 0$

$$= \frac{1}{\sqrt{\langle p-r, p-r \rangle}} (\langle x_u, p-r \rangle, \langle x_v, p-r \rangle)$$

$\Downarrow$

$$\langle x_u, p-r \rangle = \langle x_v, p-r \rangle = 0$$

$\Downarrow$

$$x_u \perp (p-r), x_v \perp (p-r)$$

$$\Downarrow x_u, x_v \text{ lin. uafh.}$$

$$(p-r) \parallel x_u \wedge x_v \parallel N(p)$$

'<=':

$$(p-r) \parallel N(p)$$

$$\Downarrow x_u, x_v \text{ lin. uafh. } x_u \wedge x_v \parallel N(p)$$

$$\langle x_u, p-r \rangle = 0 = \langle x_v, p-r \rangle$$

$\Downarrow (*)$

$$dhr_p = \Omega$$

□

Lad $w \in T_p(S)$, $|w|=1$

Antag $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ er en parametriseret regulær kurve, således:

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = w$$

(Lad $k_n = \Pi_p(w)$ (se Do Carmo s. 142), og lad $\{e_1, e_2\}, k_1, k_2$)
være som i def. 4 s. 144 i Do Carmo.)

Påstand:

$$h_p h_r(w) = \frac{1}{h_r(p)} - k_n$$

Bevis:

$$h_{nn}(p) = \overset{1}{\uparrow} \text{ ovenstående udtræk i (*) af } dh_r$$

(opg. 3.3.2)

Definer $\underline{x} :]0, 2\pi[\times \mathbb{R} =: U \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\forall (u, v) \in U : \underline{x}(u, v) = (v \cdot \cos u, v \cdot \sin u, c \cdot u)$, $c \in \mathbb{R}_+$

Vi har tidl. set, at $\underline{x}(U)$ er en reg. flade i $\mathbb{R}^3$

Af bm. s. 136 i Do Carmo følger, at $\underline{x}(U)$ er orientierbar

Vi antager, at $N_p = \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|}(p)$, $p \in \underline{x}(U)$ (*)

hvor N_p betegner den valgte orientering (enhedsnormalvektorfelt) på $\underline{x}(U)$

Med notationen fra Do Carmo kap. 3.3 har vi ... (se s. 160-1)

$\alpha \in C^\infty(I \text{ åbent interval i } \mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ r.k., $\forall t \in I : \alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$ er

en asymptotisk kurve, hvis

$$e(u')^2 + 2f u'v' + g(v')^2 = 0 \quad (1)$$

en krumningslinje, hvis

$$(fE - eF)(u')^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)(v')^2 = 0 \quad (2)$$

$$\forall (u,v) \in U:$$

$$\underline{x}_u = (-v \cdot \sin u, v \cdot \cos u, c) \quad , \quad \underline{x}_v = (\cos u, \sin u, 0)$$

$$\underline{x}_{uu} = (-v \cdot \cos u, -v \cdot \sin u, 0) \quad , \quad \underline{x}_{vv} = (0, 0, 0)$$

$$\underline{x}_{uv} = (-\sin u, \cos u, 0)$$

$$E = \sqrt{v^2 + c^2} \quad , \quad F = 0 \quad , \quad G = 1 \quad (\text{allerede udregnet i eks. 3 s. 94 i DK})$$

$$\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v = (-c \sin u, c \cos u, -v) \quad , \quad |\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v| = \sqrt{v^2 + c^2}$$

Af Do Carmo s. 154 og med (*) antagelsen fås:

$$e = \langle N, \underline{x}_{uu} \rangle = 0 \quad , \quad f = \langle N, \underline{x}_{uv} \rangle = \frac{c}{\sqrt{v^2 + c^2}} \quad , \quad g = \langle N, \underline{x}_{vv} \rangle = 0$$

Dermed bliver (1):

$$\frac{2c}{\sqrt{v^2 + c^2}} u' v' = 0$$

Da $eg - f^2 = \frac{c^2}{v^2 + c^2} < 0$ fås, jvf. overvejelserne s. 160 i Do Carmo, at løsn. til (1) er koordinat-kurvene på S .

Dvs. de asymptotiske kurver for S er koordinatkurvene.

(2) bliver:

$$c (u')^2 - \frac{c}{\sqrt{v^2 + c^2}} (v')^2 = 0$$

ekvivalent med

$$(u')^2 = \frac{1}{\sqrt{v^2 + c^2}} (v')^2$$

løsn. til denne diff. lign.

$$\pm u = \ln (|\sqrt{v^2 + c^2} + v|) + c_0$$

$$\stackrel{(+)}{=} \ln (\sqrt{v^2 + c^2} + v) + c_0 \quad (\text{hvor } c_0 \text{ konst.})$$

Des. at krumningslinierne er de α for hvilke (+) er opfyldt.

Lign (5) s 156 i Do Carmo giver

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{E.G - F^2} = 0$$



20. april 1998

Geometri 1.

UGESEDDER NR. 11

Forelæsningerne d. 23. og 24. April.

Vi fortsætter vores studie i lokale koordinater i afsnit 3 – 3, ved at udregne en formel for den anden fundamentalform for flader, som er givet som grafen af en funktion.

Som afslutning på afsnit 3 – 3 skal vi bevise at vores definition af Gauss-krumningen er ækvivalent med Gauss' oprindelige definition af Gauss-krumningen.

Derefter begynder vi studiet af den intrinsiske geometri af flader, Kap. 4. Den *intrinsiske geometri* af en flade er geometriske størrelser, som er bevaret under lokale isometrier. Pr. definition, er en *lokal isometri* en lokal diffeomorfi, hvis afledede i alle punkter er en isometri. I afsnit 4 – 2 skal vi gennemgå begrebet *isometri* og se at det er den naturlige ækvivalens for regulære flader. Det er udmiddelbart fra definitionen af en isometri, at den første fundamentalform er bevaret under isometrier. Vi skal bevise at et koordinatskift er en isometri hvis og kun hvis den første fundamentalform er identisk i de to koordinatsystemer.

Som afslutning af afsnit 4 – 2 skal vi lige kort nævne begrebet *konforme afbildninger*.

I næste uge fortsætter vi med afsnit 4 – 3.

Øvelsesopgaver 27. April – 1. Maj:

3.2.9, 3.2.10, 3.2.13, 3.2.15, 3.2.17, 3.3.1, 3.3.3

Afleveringsopgaver 27. April – 1. Maj:

3.3.2

Jørgen Ellegaard Andersen

Everything should be considered up to some natural equivalence!

3.2.9

Lad S betyde en orientébar regulær flade i $\mathbb{R}^3$ og N Gauß-afb. på S

Lad $\alpha: I \text{ åben } \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$ betyde en parametriseret regulær kurve på S

Påstand:

Antag at $\alpha(I) \subseteq S$ ikke indeholder plane eller paraboliske pkt'er

Da er $N \circ \alpha: I \rightarrow S^2$ en parametriseret regulær kurve på S^2 .

($N \circ \alpha$ betegnes det sfæriske billede af α)

Beweis:

Jvf. def. s. 75 i Do Carmo skal vi vise, at

$N \circ \alpha: I \rightarrow S^2$ er en glat homeomorfi med et injektivt differential

Da $\alpha(I)$ ikke indeholder plane eller paraboliske pkt.

har vi (jvf. def. 6-7 s. 146 i DC og med not. fra def. 4 s. 144 i DC),

at $\forall p \in \alpha(I): dN_p = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$, $k_1, k_2 \neq 0$, hvor vi har udregnet dN_p mht. basen $\{e_1, e_2\}$ for $T_p(S)$.

Dette er tydeligvis et injektivt differentiale, og da

$d\alpha_t^{(*)}$ antages at være injektivt (dvs. $d\alpha_t = (c_1, c_2) \cdot c_1 \neq 0 \vee c_2 \neq 0$),

thi $\alpha(I)$ antages at være en regulær kurve, fås

$$d(N \circ \alpha)_t = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \cdot c_1 \\ k_2 \cdot c_2 \end{bmatrix}, \text{ hvor } k_1 \cdot c_1 \neq 0 \vee k_2 \cdot c_2 \neq 0$$

(se evt. DC s. 84-85)

(*) hvor $\alpha(t) = p$, husk α er en homeomorfi (og dermed specielt injektiv)

idet $k_1, k_2 \neq 0$ og $c_1 \neq 0 \vee c_2 \neq 0$

Dvs. differentiallet af $N \circ \alpha$ er injektivt for alle $t \in I$.

Af. def. s. 136 + sætn. + bevis s. 84-5 i Do Carmo følger at $N \circ \alpha$ er differentiabel (idet N diff. og α diff.)

Det resterer at vise, at $N \circ \alpha$ er en homeomorfi.

α er pr. antagelse en homeomorfi

N er jvf. de foregående udregninger og prop. 3 s. 86 en homeomorfi. Sammensætn. af homeomorfier er en homeomorfi, dvs. $N \circ \alpha$ er en homeomorfi.

□

Lad $C = \alpha(I)$, $\alpha: I \text{ åben} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$ betegne en krumningslinje på S , hvor C opfylder betingelserne i ovenstående sætn.

Ovenstående sætn. giver, at $N \circ \alpha$ er en parametriseret regulær kurve på S^2 , desuden har vi...

Påstand:

For $p \in C$ givet har vi

$$k = |k_N| k_N$$

hvor k er krumningen af C i p , k_N er normalkrumningen af C i p og k_N er krumningen af $N(C)$ i $N(p)$.

Bevis:

Lad $p \in C$ være givet. Antag $k \neq 0$ (for $k=0 \Rightarrow k_N=0$)[†], $k_N \neq 0$

Jvf. exc. 2.3.15 og bn. s. 22 + def. på reg. kurve s. 75 kan vi antage, at α er parametriseret med buelængde (åkv.: $|\alpha'|=1$)

Da C er en krumningslinje følger af Olinde Rodrigues sætn., prop. 3 s. 145 i Do Carmo, at (antag $t_0 = \alpha^{-1}(p)$)

$$N'(t) = k_N(t) \alpha'(t), t \in I \quad (*)$$

hvor k_N er en glat fkt. i I

Desuden har vi, at (da α parametriseret ved buelængde)

$$|\alpha'(t)|=1, \quad k(t) = |\alpha''(t)|, \quad \alpha'(t) \perp \alpha''(t), \quad t \in I$$

† husk $k_N = k$, $\forall k_N = k$, pr. antagelse og pr. antagelse $k_1 \neq 0 \wedge k_2 \neq 0$

Af exc. 1.5.12 b har vi (not. $k_N = k_N(t_0)$, $N' = N'(t_0)$ osv. benyttes

$$k_N = \frac{|N' \wedge N''|}{|N'|^3}$$

$$N'' = k_n' \alpha' + k_n \alpha'' \quad \Rightarrow \quad |N' \wedge N''| = |k_n|^2 \cdot k$$

thi $|N'\rangle = |k_n\rangle$
(*)
 $|a'\rangle = 1$

Dus.

$$k_N = \frac{|k_N|^2 k}{|k_N|^3} = \frac{k}{|k_N|} \Rightarrow k = |k_N| \cdot k_N$$

↑
weiss $|k_N| \neq 0$

D

3.2.10

Lad $S \subseteq \mathbb{R}^3$ betegne en orienterbar regulær flade,
og lad $C \subseteq S$ betegne en krumningslinje på S , der
intetsteds tangenter en asymptotisk ret. ($\forall p \in C: k_n \neq 0$)

Påstand:

Hvis vinklen mellem det osculerende plan og tangentplanet for S
er konstant (set som fkt. af $p \in C$), da er C en plan kurve.

Bevis:

Antag $\alpha: I \text{ åben } \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$ er en parametrisering af C , hvor $|\alpha'| = 1$

Med den sædvanlige notation har vi (husk kap. 1-5)

Vinklen mellem det osculerende plan og tangentplanet for S er konst

$\Downarrow$

$$\langle b, N \rangle = c_0 \quad (c_0 \in \mathbb{R} \text{ konst.})$$

$\Downarrow$

$$\langle b', N \rangle + \langle b, N' \rangle = 0$$

$\Downarrow$ Frenet lign. + Olinde Rednigues sætn.

$$\langle \tau \cdot n, N \rangle + \langle b, k_n \cdot \alpha' \rangle \stackrel{b \perp \alpha'}{=} \langle \tau n, N \rangle = \tau \langle n, N \rangle = 0$$

$$\Downarrow \forall p \in C: k_n \neq 0 \Rightarrow \langle n, N \rangle \neq 0$$

$\tau \equiv 0$, hvoraf det enskede, jvf. bn. s. 18 i Do Carmo, følger.

□

3.2.13 (Beltrami - Ennepers satn.)

Lad $S \subseteq \mathbb{R}^3$ betegne en orientérbar regulær flade,
og $C \subseteq S$ betegne en asymptotisk kurve på S .

Lad $p \in C$ være givet

$\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow C$, $\alpha(0) = p$ betegner en fkl. som opfylder def. s. 75
i Do Carmo. Vi kan antage, at α er parametriseret med buelængde

Antag $k = |\alpha''(t)| \neq 0$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

Påstand: $|\tau| = \sqrt{-k}$

Bevis:

(Bm. $k \leq 0$ på C)

Da C er en asymptotisk kurve på C har vi for givet $p \in C$:

$$k_n := \cos \varphi \quad k = 0 \quad \xLeftrightarrow[k \neq 0]{\varphi = \angle n, N} \quad \langle n, N \rangle = 0$$

At α er parametriseret ved buelængde betyder $\langle n, t \rangle = 0$

Ovenstående giver $b = N$ (not. se DC kap 15)

Frenet lign. giver dermed $N' = \tau \cdot n$

Skriver vi N' i basen $\{e_1, e_2\}$ (som i def. 4 s. 144 DC) har vi
derudover, at $N' = k_1 \cos \theta \cdot e_1 + k_2 \sin \theta \cdot e_2$ $\theta = \angle \alpha', e_1$
(For notation se Do Carmo s. 144)

Eulers formel og pythagoras giver dermed.. (DC s. 145)

$$|\tau|^2 = k_1^2 \cos^2 \theta + k_2^2 \sin^2 \theta = -k_1 k_2 \sin^2 \theta - k_1 k_2 \cos^2 \theta$$

$$= -k_1 k_2 = -K \quad \Rightarrow \quad |\tau| = \sqrt{-K}$$

(Eulers formel: $k_n = 0 = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta \Rightarrow k_1^2 \cos^2 \theta = -k_1 k_2 \sin^2 \theta,$
 $k_2^2 \sin^2 \theta = -k_1 k_2 \cos^2 \theta$)

□

3.2.15 (Joachimstahl's sætn.)

Lad $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ betegne to orienterbare regulære flader

Lad orienteringer på S_1, S_2 være valgt, og lad

N_1, N_2 betegne de dertilhørende enhedsnormalvektorfelder

Antag, at $S_1 \cap S_2 =: C$ er en sammenhængende reg. kurve,

og at C er en krumningslinje på S_1 .

Definer $\Theta(p): C \rightarrow [0, \pi] \quad \forall p \in C: \Theta(p) = \angle N_1, N_2$
($\Theta(p) = \arccos \langle N_1, N_2 \rangle$)

Lad $\alpha: I$ åbent interval $\subseteq \mathbb{R} \rightarrow C$ betegne en parametrisering af C ;
vi kan antage, at α er parametriseret ved bue længde.

($\Theta \circ \alpha$ er tydeligvis en glat fkt.)

Påstand:

$\Theta(p)$ er konstant på $C \iff C$ er en krumningslinje på S_2

Beweis:

' $\implies$ ':

$\Theta(p)$ konst. på $C \implies \Theta \circ \alpha$ er konst. på I

$\implies \langle N_1 \circ \alpha, N_2 \circ \alpha \rangle = c_0, c_0 \in \mathbb{R}$

$\implies \frac{d}{dt} \langle N_1 \circ \alpha, N_2 \circ \alpha \rangle = \langle N_1', N_2 \rangle|_{\alpha} + \langle N_1, N_2' \rangle|_{\alpha} = 0$

$$\implies \langle -k_n \alpha', N_2 \rangle + \langle N_1, N_2' \rangle = \langle N_1, N_2' \rangle = 0$$

Olinde Rodrigues $\alpha' \in T_p(S_2)$

Dus. $N_1 \perp N_2'$, da $N_2 \perp N_2'$ følger deraf, (da $N_1 \perp \alpha'$, $N_2 \perp \alpha'$)

$N_2' \parallel \alpha'$ under forudsætn. af at $N_1 \nparallel N_2$, men for $N_1 \parallel N_2$ på C

er $N_1' = N_2'$ og da følger, at $N_2' \parallel \alpha'$ af Olinde Rodrigues

sætn. (prop. 3 s. 145).

Dus der eksisterer en fkt. λ (der tydeligvis er glat) på I , således at $N_2' = \lambda \alpha'$; at C er en krumningslinje på S_2 følger dermed af Olinde Rodrigues' sætn.

' $\Leftarrow$ ':

C er en krumningslinje på $S_2 \implies N_2' = \lambda_2 \alpha'$
Olinde Rodrigues

Af antagelsen om, at C er krumningslinje på S_1 har vi tilsvarende,

at $N_1' = \lambda_1 \alpha'$. (λ_1, λ_2 er diff. fkt. på I)

Θ er konst. på C hviss $\frac{d}{dt} \langle N_1, N_2 \rangle = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle N_1, N_2 \rangle &= \langle N_1', N_2 \rangle + \langle N_1, N_2' \rangle = \langle \lambda_1 \alpha', N_2 \rangle + \langle N_1, \lambda_2 \alpha' \rangle \\ &= 0 \quad (\text{da } \alpha' \in T_p(S_1) \wedge \alpha' \in T_p(S_2)) \end{aligned}$$

□

3.2.17

Lad $S \subseteq \mathbb{R}^3$ betegne en orienterbar regulær flade

I det følgende benyttes den sædv. not. (se De Corno kap. 3.2)

Antag at $H \equiv 0$ på S og at S ikke indeholder nogle plane punkter (*)

Påstand:

$$\forall p \in S, w_1, w_2 \in T_p(S): \langle dN_p(w_1), dN_p(w_2) \rangle = -K(p) \langle w_1, w_2 \rangle$$

Beweis:

$$(*) \Rightarrow \forall p \in S: k_1(p) = -k_2(p) \neq 0 \text{ og } K(p) = -k_1^2 \text{ for givet } p \in S$$

Antag, at $w_1 = \begin{pmatrix} u_1' \\ v_1' \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} u_2' \\ v_2' \end{pmatrix}$ i basen $\{e_1, e_2\}$
for givne $w_1, w_2 \in T_p(S)$

$$\langle dN_p(w_1), dN_p(w_2) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} k_1 u_1' \\ -k_1 v_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_1 u_2' \\ -k_1 v_2' \end{pmatrix} \right\rangle = k_1^2 \left\langle \begin{pmatrix} u_1' \\ v_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2' \\ v_2' \end{pmatrix} \right\rangle = -K \langle w_1, w_2 \rangle$$

$$(\text{husk i basen } \{e_1, e_2\}: dN_p = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{pmatrix})$$

□

Det er klart, at med valgte orienteringer af $T_p(S)$ og $T_{N(p)}(N(S))$ kan vi sige, at ovenstående proposition udtrykker, at vinklen mellem to kurver på S er lig vinklen mellem de to kurvers sfæriske billeder op til et fortegn.

3.3.1

Definer $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall (x,y)$ $h(x,y) = axy$, $a \in \mathbb{R}$

Vi ser, at $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ og heraf følger, juf. prop 1 s. 58 i Do Carmo og bm. s. 136 i Do Carmo, at

$$S = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2, z = h(x,y)\}$$

er en orientierbar regulær flade

$$p = (0,0,0) \in S$$

Med notationen fra Do Carmo s. 162-163 fås følgende udregn. i p...

$$h_x = 0, h_y = 0, h_{xy} = a, h_{xx} = 0, h_{yy} = 0$$

og dermed (juf. formlerne s. 163 i DC)

$$K = \frac{h_{xx} h_{yy} - h_{xy}^2}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^2} = -a^2, \quad H = \frac{(1 + h_x^2) h_{yy} - 2 h_x h_y h_{xy} + (1 + h_y^2) h_{xx}}{2(1 + h_x^2 + h_y^2)^{3/2}} = 0$$

3.3.3

Definer $\underline{x}: U :=]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\forall (u, v) \in U: \quad \underline{x}(u, v) = (\cosh v \cdot \cos u, \cosh v \cdot \sin u, v)$$

Sat $\varphi(v) = \cosh v$, $\psi(v) = v$, da $\varphi(v) > 0$ (idet $\cosh \in [1, \infty)$)
har vi, at $\underline{x}(v)$ er en omdrejningsflade (da φ, ψ er glatte fkt.)

Af ex. 4 s. 161 i Do Carmo følger, idet (med den sædv. notation)

$$\varphi'(v) = \sinh(v), \quad \varphi''(v) = \cosh(v)$$

$$\psi'(v) = 1, \quad \psi''(v) = 0, \quad \text{at}$$

$$E = \cosh^2 v, \quad F = 0, \quad G = 1 + \sinh^2 v = \cosh^2 v$$

$$e = -\cosh v, \quad f = 0, \quad g = \cosh v$$

Jvf DC s. 160-1 fås, at $\alpha \in C^\infty(I)$ (abt. int. på $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3$) r. k.

$\forall t \in I: \alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$ er en asymptotisk kurve hviss,

$$-\cosh v \cdot (u')^2 + \cosh v \cdot (v')^2 = 0$$

$$\Updownarrow \cosh \in [1, \infty)$$

$$(v')^2 - (u')^2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\pm v' = u'$$

$$\Updownarrow$$

$$v - u = c_0 \quad \vee \quad v + u = c_1 \quad ; \quad c_0, c_1 \in \mathbb{R}$$

(opg. 3.2.3)

$C \subset S$ betegner en regulær kurve på en regulær flade S

Påstand:

Antag at $\forall p \in S: K(p) > 0$

Da gælder for et givet $p \in C$, at

$$k \geq \min(|k_1|, |k_2|)$$

hvor k betegner krumningen af C i p og k_1, k_2 betegner hovedkrumningerne for S i p .

Bevis:

Lad $p \in C$ være givet

$$k \geq |k_n| = |k_1 \cdot \cos^2 \theta + k_2 \cdot \sin^2 \theta| \geq \min(|k_1|, |k_2|) (|\cos^2 \theta + \sin^2 \theta|) = \min(|k_1|, |k_2|)$$

pr. def. af k_n Eulers formel $\theta = \langle n, N \rangle$ $K(p) > 0 \Rightarrow \text{sign}(k_1) = \text{sign}(k_2)$

□

(opg. 3.2.3)

$S \subseteq \mathbb{R}^3$ betegner en regulær flade med gaussisk krumning $K > 0$.

C betegner en regulær kurve på S .

Påstand:

For givet $p \in C$ gælder, idet k_1, k_2 betegner hovedkrumningerne af S i p , og k betegner krumningen af C i p , at

$$k \geq \min(|k_1|, |k_2|)$$

Bevis:

Bm. $K > 0 \Rightarrow \text{sign}(k_1) = \text{sign}(k_2)$ * (alle pkt. på S er elliptiske pkt.)

$$k \geq |k_n| = |k_1 \cdot \cos^2 \theta + k_2 \cdot \sin^2 \theta| \geq \min(|k_1|, |k_2|) (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \min(|k_1|, |k_2|)$$

*
↑
def. af k_n ↑
Euler formel s. 145 i DC,
hvor $\theta = \angle n, N$

Fint.

Godt

19/5 - 28

SKH



15. april 1998

Geometri 1.

UGESEDDER NR. 10

Forelæsningerne d. 16. og 17. April.

Marcel Bökstedt gennemgik før påske afsnit 3 – 2. Vi går nu videre med afsnit 3 – 3.

Først skal vi udregne den afledte af Gauss-afbildningen i lokale koordinater. Dette giver os en formel for den anden fundamentalform i lokale koordinater, hvorefter vi udleder formler for Gauss-krumningen og middelkrumningen. Dette giver os mulighed for at forstå hvorledes en flade i et elliptisk eller hyperbolsk punkt ligger i forhold til tangentplanet i punktet. Vi skal se ved eksempler at lignende generelle resultater ikke gælder for paraboliske eller plane punkter.

Vi udleder ligninger, som fortæller hvornår koordinat kurverne for et kort er asymptotiske kurver og hvornår de er krumningskurver.

Endvidere studerer vi den anden fundamentalform for omdrejnings flader og for flader, som er givet som grafen af en funktion.

Endelig skal vi bevise at vores definition af Gauss-krumningen er ækvivalent med Gauss' oprindelige definition af Gauss-krumningen.

Næste uge går vi videre med afsnit 4 – 2. Vi har desværre ikke tid til at gennemgå afsnit 3 – 4 om vektorfelter og afsnit 3 – 5 om "ruled surfaces" og minimalflader. Dette er meget interessante og særdeles forskningsaktive geometriske emner. Vidunderlig og spændende ekstralæsning!!

Øvelsesopgaver 20. April – 24. April:

2.6.7, 3.2.2, 3.2.4, 3.2.5, 3.2.6, 3.2.7, 3.2.8

Afleveringsopgaver 20. April – 24. April:

3.2.3

Jørgen Ellegaard Andersen

Local insight is important!

2.6.7

Lad S betegne en regulær flade og $V \subseteq S$ være åben i S .

Påstand: Hvis V er diffeomorf med et Möbiusbånd, da er S ikke-orienterbar

Bevis:

Antag at V er diffeomorf med et Möbiusbånd, og at S er orienterbar

Det er jvf. def. 2.12 N2 og def. 1 s. 103 i Do Carmo klart, at vi kan betragte V som en regulær orienterbar flade.

At V er diffeomorf med et Möbiusbånd, $\mathcal{M}$ vil sige, at der eksisterer en diffeomorfi $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow V$.

Det er trivielt, at φ specielt er en lokal diffeomorfi i ethvert pkt. på $\mathcal{M}$.

Af exc. 2.6.2 følger, at $\mathcal{M}$ er orienterbar.

Men dette er jvf. Do Carmo s. 107-8 en modstrid

□

3.2.2

S reg. flade, C reg. kurve på S S orienterbar

Påstand:

Hvis $\forall p, q \in C: T_p(S) + p = T_q(S) + q$, da er alle pkt. er på C enten paraboliske eller plane.

Bevis:

Lad $p \in C$ være givet og lad $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow C \subseteq \mathbb{R}^3$, $p = \alpha(0)$ betegne en differentiabel homeomorfi. (se def. på reg. kurve s. 75 i Do Carmo)

Lad $N: S \rightarrow S^2$ betegne Gauss afb. på S

Antagelsen giver, at N er konstant på C , dvs.

$$\forall p \in C: dN_p(\alpha'(0)) = \left. \frac{d}{dt} (N(\alpha(t))) \right|_{t=0} = N'(0) = \underline{0} = 0 \cdot \alpha'(0)$$

Da $|\alpha'(0)| = 1$ er $\alpha'(0) \neq 0$, og vi kan konkludere, at 0 er en egen værdi for dN_p .

Juf. opp. 3 + def. 4 s. 144 i Do Carmo har vi dermed, at $k_1 = 0 \vee k_2 = 0$, hvor k_1, k_2 betegner hovedkrumningene for S i p .

Da $\det(dN_p) = K = k_1 \cdot k_2 = 0$ (se def. 6 s. 146 i Do Carmo) følger det ønsket af def 7 s. 146 i DC.

□

3.2.4

Lad S betegne en regulær flade

Antag $\forall p \in S: |k_1(p)| \leq 1 \wedge |k_2(p)| \leq 1$ (k_1, k_2 hovedkrumningerne for S)

Lad C betegne en regulær kurve på S og lad $\forall p \in C$ $k(p)$ betegne krumningen af C i p .

Påstand:

Vi kan ikke konkludere ud fra ovenstående, at $\forall p \in C: k(p) \leq 1$

Beweis:

Vi skal give et mod eksempel.

Betrakt $\mathbb{R}^2$ -planet, jvf. ex. 1 s. 137 i Do Carmo gælder

$\forall p \in \mathbb{R}^2: |k_1(p)| = |k_2(p)| = 0 \leq 1$, men kurven $y = x^2$ har krumning 2.

□

3.2.5

Lad $S \subseteq \mathbb{R}^3$ betegne en regulær flade

Lad $p \in S$ være givet, og lad $e \in T_p(S)$, $|e|=1$ være fast

Påstand:

$$H = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi k_n(\theta) d\theta, \quad k_n(\theta) \text{ betegner normalkrumningen i retning } \theta \text{ i forhold til } e$$

Bevis:

$p \in S$, $e \in T_p(S)$, e fastholdt, $|e|=1$ være givet

Lad k_1, k_2, e_1, e_2 være som i def. 4 s. 144 i Do Carmo.

Af opp. 3 har vi, at $\langle e, e_2 \rangle = 0$

Lad φ være valgt således, at $\cos \varphi = \langle e, e_1 \rangle$ (klart: $\varphi \in [0, \pi]$ konstant)

Af Eulers formel har vi for $\theta \in [0, \pi]$:

$$k_n(\theta) = k_1 \cdot \cos^2(\theta + \varphi) + k_2 \cdot \sin^2(\theta + \varphi) \quad (*)$$

Det er heraf klart, at $k_n(\theta)$ er kont. på $[0, \pi]$

af Analyseens Fundamentalteorem følger, at $k_n(\theta)$ er integrabel på $[0, \pi]$

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi k_n(\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (k_1 \cdot \cos^2(\theta + \varphi) + k_2 \cdot \sin^2(\theta + \varphi)) d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi} k_1 \cdot \int_0^\pi \cos^2(\theta + \varphi) d\theta + \frac{1}{\pi} k_2 \cdot \int_0^\pi \sin^2(\theta + \varphi) d\theta$$

$$= \frac{k_1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{k_2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{k_1 + k_2}{2} = H$$

□

3.2.6

Lad S betegne en orienterbar regulær flade.

Lad $p \in S$ være givet

Lad $r_1, r_2 \in T_p(S)$ således, at $\langle r_1, r_2 \rangle = 0$, $|r_1| = |r_2| = 1$ (†)

Lad k_1, k_2, e_1, e_2 være som i def 4. s. 144 i Do Carmo

Af app. 3 har vi, at $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$

Lad $\theta = \angle r_1, e_1$, og antag yderligere $\theta + \frac{\pi}{2} = \angle r_2, e_1$

Def. $k_n(\varphi) = k_1 \cdot \cos^2 \varphi + k_2 \cdot \sin^2 \varphi$ (normalkrumningen i retning φ), $\varphi \in [0, 2\pi]$

Påstand:

$k_n(\theta) + k_n(\theta + \frac{\pi}{2})$ er en konst. uafh. af θ

Bevis:

Det er klart, at k_n er diff. mht. θ og vi har

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} (k_n(\theta) + k_n(\theta + \frac{\pi}{2})) &= k_1 \cdot 2 \cdot \cos \theta \cdot (-\sin \theta) + k_2 \cdot 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \\ &+ k_1 \cdot 2 \cdot \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \cdot (-\sin(\theta + \frac{\pi}{2})) + k_2 \cdot 2 \cdot \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \cdot \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ &= k_1 \cdot 2 \cdot \cos \theta \cdot (-\sin \theta) + k_2 \cdot 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + k_1 \cdot 2 \cdot (-\sin \theta) \cdot (-\cos \theta) \\ &+ k_2 \cdot 2 \cdot \cos \theta \cdot (-\sin \theta) = 0 \end{aligned}$$

Det ønskede er dermed et resultat af Cauchys middelværdissætning.

□

3.2.7

Lad S betegne en orienteret regulær flade

Påstand:

Lad $p \in S$ være et ikke-pluket pkt. og antag $H(p) = 0$,
da har p to ortogonale asymptotiske retninger.

Bevis:

Lad $p \in S : H(p) = 0$ være givet

Jf. def. 6 s. 146 i Do Carmo har vi, at

$H(p) = \frac{k_1 + k_2}{2} = 0 \implies k_1 = -k_2$, da p er et ikke-pluket pkt. fås
desuden: $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ (k_1, k_2 betegner hovedkrumningerne i p)

Af. def. 7 s. 146 i DC har vi, at p er et hyperbolsk pkt.

Jf. diskussionen i DC s. 149 har vi, at

p har præcis to asymptotiske retn., og at disse er
givet som asymptoter til hyperblen

$$k_1 x^2 - k_1 y^2 = 1 \quad (+)$$

hvor (x, y) er koordinaterne for en vektor i $T_p(S)$
i den sædvanlige basis $\{e_1, e_2\}$ (se def. 4 s. 144 i DC)

Retn.-vektorer for asymptoterne til (+) er (k_1, k_1) og $(k_1, -k_1)$
(se evt. Adams s. 472-3) og disse er helt klart ortogonale.

□

3.2.8

Billedet af Gaußafb. for en række orienterbare reg. flader

a)

Paraboloidet $z = x^2 + y^2$

Betragt kurven $z = x^2$ ⁽⁺⁾, det er nu klart, at billedet af Gaußafb. er en åben halvkugle...

Med et enhedsnormalvektorfelt, som 'peger væk fra' paraboloidet ser vi, at billedet af Gaußafb. er plet på S^2 under xyplanet

b)

Hyperboloidet $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

Betragt kurven $x^2 - z^2 = 1$ ⁽⁺⁾, dette er en hyperbel med asymptoterne $sp((1, 0, 1))$ og $sp((1, 0, -1))$.

Vi ser, at billedet af Gaußafb. er 'bæltet' omkring S^2 mellem planene $z_1 = 1/\sqrt{2}$ og $z_2 = -1/\sqrt{2}$

c)

Catinoïden $x^2 + y^2 = \cosh^2 z$

Betragt kurven $x^2 = \cosh^2 z$ ⁽⁺⁾, da $\cosh(0) = 1$

$\lim_{z \rightarrow \infty} \cosh(-z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \cosh(z) = \infty$ ser vi, at billedet af

Gaußafb. er S^2 fraregnet 'polerne'.

(+) hvor $y=0$

(opg. 2.5.14)

S betegner en regular flade.

$f: S \rightarrow \mathbb{R}$ betegner en diff. afb. (se def. 1 s. 72)

Definer for alle $p \in S$ vektoren $\text{grad } f(p) \in T_p(S)$, som opfylder

$$\forall v \in T_p(S): \langle \text{grad } f(p), v \rangle = df_p(v)$$

Lad $x: U \text{ \textit{\"{o}ben} } \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, $p \in x(U)$ betegne et kort p\u00e5 S . (s\u00e5t $(u,v) = x^{-1}(p)$)

Jvf. def. s. 92 i Do Carmo har vi, idet vi benytter notationen

$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \quad x_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u,v), \quad E = E(u,v), \quad F = F(u,v), \quad G = G(u,v), \quad \text{at}$$

$$E = \langle x_u, x_u \rangle_p, \quad F = \langle x_u, x_v \rangle_p, \quad G = \langle x_v, x_v \rangle_p$$

Jvf. Do Carmo s. 84-85 har vi, at $df_p = (f_u, f_v)|_p$, n\u00e5r vi ser df_p som fkt. fra $T_p(S)$ mht. basen $\{x_u, x_v\}$ ind i $\mathbb{R}$.

P\u00e5stand:

$$\text{grad } f(p) = \frac{f_u(p) \cdot G - f_v(p) \cdot F}{E \cdot G - F^2} x_u + \frac{f_v(p) \cdot E - f_u(p) \cdot F}{E \cdot G - F^2} x_v, \quad p \in S$$

(og $\text{grad } f$ er dermed en veldef. diff. afb. fra S ind i $\mathbb{R}^3$)

Bevis:

Lad $p \in S$ v\u00e6re givet.

Med notationen indf\u00f8rt i det ovenst\u00e5ende har vi, at en ortonormalbasis for $T_p(S)$ er

$$\{v_1, v_2\} := \left\{ \frac{1}{|x_u|} x_u, \frac{1}{|x_u| |x_u \wedge x_v|} (|x_u|^2 x_v - \langle x_u, x_v \rangle x_u) \right\}$$

(benyt bl.a. (2) s. 14, formelen for $|x_u \wedge x_v|^2$ s. 13 i Do Carmo)

$$\langle \text{grad } f(p), v_1 \rangle_p = df_p(v_1) = \frac{f_u(p)}{|x_u|}$$

$$\langle \text{grad } f(p), v_2 \rangle_p = df_p(v_2) = \frac{1}{|x_u| |x_u \wedge x_v|} (|x_u|^2 f_v(p) - \langle x_u, x_v \rangle f_u(p))$$

Dus.

$$\text{grad } f(p) = \langle \text{grad } f(p), v_1 \rangle_p \cdot v_1 + \langle \text{grad } f(p), v_2 \rangle_p \cdot v_2$$

$$= \frac{f_u(p)}{|x_u|^2} x_u + \frac{1}{|x_u|^2 |x_u \wedge x_v|^2} (|x_u|^2 f_v(p) - \langle x_u, x_v \rangle f_u(p)) |x_u|^2 x_v$$

$$- \frac{\langle x_u, x_v \rangle}{|x_u|^2 |x_u \wedge x_v|^2} (|x_u|^2 f_v(p) - \langle x_u, x_v \rangle f_u(p)) x_u$$

$$= \left(\frac{f_u(p)}{|x_u|^2} + \frac{\langle x_u, x_v \rangle f_u(p)}{|x_u|^2 |x_u \wedge x_v|^2} \right) x_u - \frac{\langle x_u, x_v \rangle f_v(p)}{|x_u \wedge x_v|^2} x_u + \frac{|x_u|^2 f_v(p) - \langle x_u, x_v \rangle f_u(p)}{|x_u \wedge x_v|^2} x_v$$

$$= \frac{|x_v|^2 f_u(p)}{|x_u \wedge x_v|^2} x_u - \frac{\langle x_u, x_v \rangle f_u(p)}{|x_u \wedge x_v|^2} x_u + \frac{|x_u|^2 f_v(p) - \langle x_u, x_v \rangle f_u(p)}{|x_u \wedge x_v|^2} x_v$$

$$(\text{Da } |x_u \wedge x_v|^2 + \langle x_u, x_v \rangle^2 = |x_u|^2 |x_v|^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = |x_u|^2 |x_v|^2)$$

$$= \frac{G f_u(p) - F f_v(p)}{E \cdot G - F^2} x_u + \frac{E f_v(p) - F f_u(p)}{E \cdot G - F^2} x_v$$

$$(\text{Da } |x_u \wedge x_v|^2 = E \cdot G - F^2 \text{ se licks. s. 98 i Do Carmo})$$

□

Vi bn. at for $S = \mathbb{R}^2$ har vi (idet $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$ er et atlas for $\mathbb{R}^2$)

$$\forall p \in \mathbb{R}^2 : \text{grad } f(p) = f_x(p) \cdot e_1 + f_y(p) \cdot e_2$$

(Derved er ovenstående def. en udvidelse af begrebet gradient af en diff. fkt. i to variable.)

Påstand:

$p \in S$, $v \in \{w \in T_p(S) \mid |w|=1\}$ (v_i benytter basen $\{x_u, x_v\}$ for $T_p(S)$)

$$df_p(v) = \max \{df_p(w) \mid w \in T_p(S), |w|=1\} \text{ hviss } v = \frac{1}{|\text{grad } f(p)|} \cdot \text{grad } f(p)$$

Bevis:

Lad $p \in S$, $v \in \{w \in T_p(S) \mid |w|=1\}$ være givet.

$$df_p(v) = \underset{\substack{\text{def.} \\ \text{på grad } f}}{\langle \text{grad } f(p), v \rangle} = \underset{\substack{\text{def.} \\ \text{på } \langle, \rangle}}{|\text{grad } f(p)| \cdot |v| \cdot \cos \theta} \quad (\theta = \langle \text{grad } f(p), v \rangle)$$

$$= |\text{grad } f(p)| \cdot \cos \theta$$

Vi ser, at $df_p(v) = \max \{df_p(w) \mid w \in T_p(S), |w|=1\}$ hviss $\theta=0$, da $v \in \{w \in T_p(S) \mid |w|=1\}$ er dette tilfældet hviss $v = \frac{1}{|\text{grad } f(p)|} \cdot \text{grad } f(p)$

□

c)

$$C = \{q \in S \mid f(q) = k\}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Påstand:

$$\forall p \in C: \text{grad } f(p) \neq 0 \implies C \text{ reg. kurve}$$

Bevis:

Lad $p \in C$ være givet

$$\text{grad } f(p) \neq 0 \implies 0 \neq |\text{grad } f(p)|^2 = \langle \text{grad } f(p), \text{grad } f(p) \rangle = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. på grad } f(p)}}{df_p(\text{grad } f(p))}$$

$$\text{Dvs. : } f_u|_p \neq 0 \vee f_v|_p \neq 0$$

Af exc. 2.4.28 følger, at C er en reg. kurve.

□

Påstand:

Antag $\forall p \in C: \text{grad } f(p) \neq 0$, dvs. (jvf. ovenstående sætn.), at C er en reg. kurve.

Lad $p \in C$ være givet og antag $\alpha(t_0) = p$, $t_0 \in I$ (Notation s. 75 i DC) da gælder

$$\text{grad } f(p) \perp \alpha'(t_0) \quad \text{el. ækv.} \quad \langle \text{grad } f(p), \alpha'(t_0) \rangle = 0$$

Bevis:

$$\langle \text{grad } f(p), \alpha'(t_0) \rangle = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. på grad } f(p)}}{df_p}(\alpha'(t_0)) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{se evt. DC s. 84-85}}}{\frac{d}{dt}}(f(\alpha(t))) \Big|_{t_0} = \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha(I) \subseteq C}}{\frac{d}{dt}}(k) = 0$$

□

(Bm df_p surjektiv ækv. $\text{grad } f(p) \neq 0$)

opg. 2.4.28 (bm. b) er blot en skitse, der er 'huller')

S betegner en regulær flade. (se def. N.2.12)

$f: S \rightarrow \mathbb{R}$ betegner en diff. fkt. (se def. 1 s. 72 i Do Carmo)

a)

Definition:

$p \in S$ siges at være et kritisk pkt. for f , hvis df_p (se def. s. 84-85 i DC) ikke er en surjektiv afb., i så fald kaldes $f(p)$ en kritisk værdi. Punkter i $\mathbb{R}$, som ikke er kritiske værdier for f , kaldes regulære værdier.

Med notationen som benyttes på s. 84-85 i DC ser vi, at df_p ikke er surjektiv, hvis $\frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_p = \frac{\partial f}{\partial v}\bigg|_p = 0$.

b)

Påstand:

Lad $a \in f(S)$ betegne en regulær værdi for f .

$C = \{(x, y, z) \in S \subseteq \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = a\}$ er da en regulær kurve på S .

Bevis:

Juf. def. s. 75 i DC på regulær kurve skal vi vise, at

$\forall p \in C \exists I$ åbent interval $\subseteq \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\alpha \in C^\infty(I, C \cap B(p, \varepsilon))$, α homeomorfi:

$\forall t \in I: \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t)$ er injektiv.

Det er klart, at ovenstående er vist, hvis vi viser, at

$\forall p \in C \exists \varepsilon > 0$ således at $C \cap B(p, \varepsilon)$ er diffeomorf med et åbent interval I da den reelle akse.

Lad $p \in C$ være givet

Lad $\underline{x}: U \text{ åben} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ betegne et kort på S , således at $p \in \underline{x}(U)$

Sæt $q = (u_0, v_0) = \underline{x}^{-1}(p)$

Af antagelsen om at a er en regulær værdi for f (og $a \in f(S)$), har vi at enten er $\frac{\partial f}{\partial u}|_p \neq 0$ el $\frac{\partial f}{\partial v}|_p \neq 0$.

Antag $\frac{\partial f}{\partial v}|_p \neq 0$

Definer $F: U \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \forall (u,v) \in U: F(u,v) = (u, f \circ \underline{x}(u,v))$

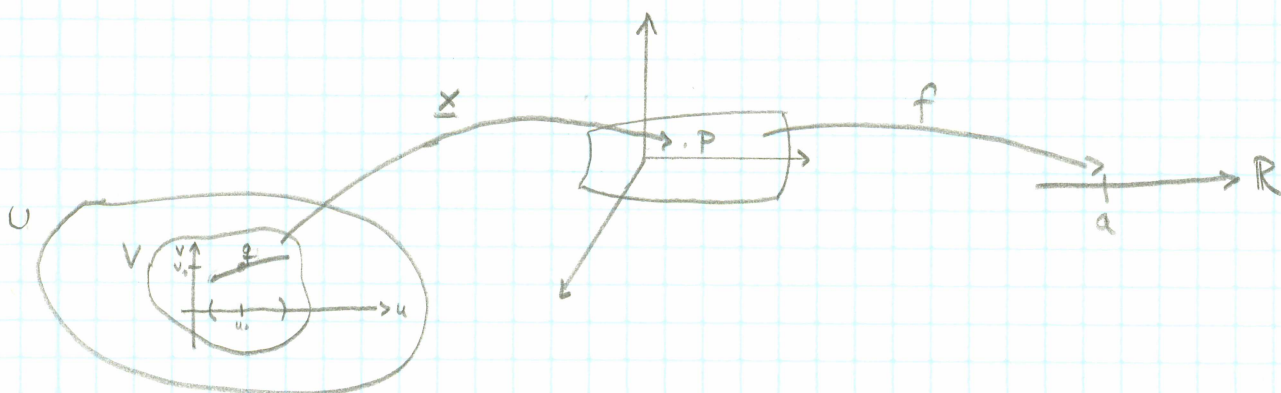
$$dF_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u}|_p & \frac{\partial f}{\partial v}|_p \end{pmatrix}, \quad |dF_q| = \frac{\partial f}{\partial v}|_p \neq 0$$

Ifølge inversfunktionssætn. $\exists V$ åben, $q \in V \subseteq U$, W åben $\subseteq \mathbb{R}^2$, $W = F(V)$ således, at $F|_V$ er en diffeomorfi. (*)

Vi observerer, at $F(u_0, v_0) = (u_0, f \circ \underline{x}(u_0, v_0)) = (u_0, a)$

Af (*) har vi dermed:

$\exists \delta > 0; g \in C^\infty((- \delta + u_0, u_0 + \delta), \mathbb{R}) \quad \forall u \in (- \delta + u_0, u_0 + \delta), (u,v) \in F|_V^{-1}(u,a):$
 $v = g(u)$ og g er en diffeomorfi



Sæt $\epsilon = \sup \{d(p, x \circ g(u)) \mid u \in [-\delta' + u_0, u_0 + \delta']\}$, $\delta' < \delta$

Det er nu klart, at

$$C := \{x(u, g(u)) \in \mathbb{R}^3 \mid u \in (-\delta' + u_0, u_0 + \delta')\} \subseteq f^{-1}(a)$$

$$C \cap b(p, \epsilon) = C' \cap b(p, \epsilon)$$

og endelig at $C \cap b(p, \epsilon)$ er diffeomorf med et åbent interval på den reelle akse.

□



27. marts 1998

Geometri 1.

UGESEDDER NR. 9

Forelæsningserne d. 2. og 3. April.

Vi fortsætter vores studie af *Gauss-afbildningen* og den *anden fundamentalform* i afsnit 3 – 2. Specielt skal vi studere sammenspillet mellem den *anden fundamentalform* og *normalkrumningen* for regulære kurver på fladen: Maximum og minimum for normalkrumningen af en regulær kurve gennem et givet punkt på en regulær flade viser sig at være lig med egenverdierne for differentialet af Gauss-afbildningen i punktet. Disse kaldes *hovedkrumningerne* og de tilsvarende egenretninger kaldes *hovedretningerne*.

Vi definere også de to meget vigtige *Gauss-krumning* og *middelkrumning* i et vilkårligt punkt på fladen, som henholdsvis determinanten og halvdelen af sporet af differentialet af Gauss-afbildningen i punktet. Afhængig af om Gauss-krumningen er positiv, negativ eller nul i et punkt, kalder vi punktet *elliptisk*, *hyperbolsk* eller *parabolsk*. Hvis den minimale normalkrumning er lig den maksimale normalkrumning i et punkt, siges punktet at være et *navle punkt*. Vi vil se, at åbne delmængder af planer og af sfærer er de eneste regulære flader, som består udelukkende af navle punkter.

Vi afslutter afsnittet med et lokalt studie af regulære flader omkring elliptiske, hyperbolske og parabolske punkter.

Derefter går vi videre med afsnit 3 – 3 og studerer Gauss-afbildningen i lokale koordinater. Vi fortsætter med dette afsnit i ugen efter påske.

Disse forelæsninger vil blive givet af Marcel Bökstedt.

Ingen forelæsninger d. 9. og 10. April p.g.a. Påsken.

Øvelsesopgaver 6. April – 17. April:

2.4.21, 2.5.3, 2.5.9, 2.5.10, 2.5.15, 2.6.2, 2.6.4

Afleveringsopgaver 6. April – 17. April:

2.5.14

Jørgen Ellegaard Andersen

Geometry is about the beauty of nature!

2.4.21

S betegner en kurvesammenhængende regulær flade.

Lad $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ betegne en diff. fkt. (se def. s. 72 i Do Carmo)

Påstand:

$$\forall p \in S: df_p = 0 \implies \exists c \in \mathbb{R} \forall p \in S: f(p) = c$$

Bevis:

Lad $p, q \in S$ være givet ($p \neq q$)

S kurvesammenhængende, dvs. $\exists \alpha: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S, \alpha(a) = p, \alpha(b) = q, \alpha$ kont.

Lad $r \in \alpha([a, b]) \subseteq S$ være givet, og lad $x_r: U_r \text{ åben} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S, r \in x_r(U_r)$ betegne et kort på S . Sæt $\varphi = x_r^{-1}(r)$

Det er klart, at $\exists b(\varphi, \varepsilon) \in U_r, V_r \text{ åben i } S, r \in V_r: x(b(\varphi, \varepsilon)) = V_r$

Lad $s \in V_r$ være givet. Sæt $\psi = x^{-1}(s)$

Definer $\beta: (-\delta, 1+\delta) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow U_r \forall t \in (-\delta, 1+\delta): \beta(t) = \psi \cdot t + (1-t) \varphi$

Af Do Carmo s. 84-85 følger, at (for $t \neq 0$ har vi jo stadig, at $\beta'(t) \in T_r(S)$)

$$\forall t \in (-\delta, 1+\delta): \frac{d}{dt} (f \circ x_r \circ \beta(t)) = df_r \circ \beta'(t) = 0$$

antagelsen.

Dvs. f er konst. på $x \circ \beta(-\delta, 1+\delta)$; da $s \in V_r$ var vilk. og $\psi \in b(\varphi, \varepsilon)$

dermed var vilk. ser vi, at f er konst. på V_r .

Nu har vi, at $\forall r \in \alpha([a, b]) \exists I_r \text{ åben i } [a, b] \text{ (} I_r \text{ et interval), } c_r \in \mathbb{R}: \forall t_r \in I_r: f(\alpha(t_r)) = c_r$.

Det er desuden klart, at $[a, b] = \bigcup_{r \in \alpha([a, b])} I_r$

Heine-Borels sætn. giver:

$\exists \alpha$, α endelig tællelig mgt.: $[a, b] = \bigcup_{r \in \alpha} I_r$, dvs. $f(x([a, b])) = f(x(\bigcup_{r \in \alpha} I_r))$

Da $f \circ x$ er kont. på $[a, b]$ følger af sætn. om sammenhængende billede, at $\exists c \in \mathbb{R} \forall r \in \alpha: c_r = c$, dvs. at f er konstant på $x([a, b])$ og dermed at $f(p) = f(q)$.

p, q var vilk. dvs. f er konstant på S .

□

2.5.3

Definieren $\chi: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow S^2$ (se ex. 2.2.16, S. 67; Do Carmo)*

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : \chi(u,v) = \left(\frac{4 \cdot u}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{4 \cdot v}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{2 \cdot (u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 4} \right)$$

(Juf. * er χ et kort for $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$)

$$\frac{\partial \chi}{\partial u}(u,v) = \left(\frac{-4(u^2 - v^2 - 4)}{(u^2 + v^2 + 4)^2}, \frac{-8 \cdot u \cdot v}{(u^2 + v^2 + 4)^2}, \frac{16 \cdot u}{(u^2 + v^2 + 4)^2} \right), (u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial v}(u,v) = \left(\frac{-8 \cdot u \cdot v}{(u^2 + v^2 + 4)^2}, \frac{-4(v^2 - u^2 - 4)}{(u^2 + v^2 + 4)^2}, \frac{16 \cdot v}{(u^2 + v^2 + 4)^2} \right)$$

$$p = \chi(u_0, v_0), (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

$$E(u_0, v_0) = \frac{16}{(u_0^2 + v_0^2 + 4)^2}$$

$$F(u_0, v_0) = 0$$

$$G(u_0, v_0) = \frac{16}{(u_0^2 + v_0^2 + 4)^2}$$

Dvs. for $w = (u, v) \in T_p(S^2)$:

$$I_p(w) = \frac{16((u')^2 + (v')^2)}{(u_0^2 + v_0^2 + 4)^2}$$

2.5.9

$C \subseteq \mathbb{R}^3$ betegner en reguler plan kurve.

Antag C ligger i x - y planet og lad $(a, b) \in \mathbb{R}$

$(f(v), g(v))$, $a < v < b$ betegne en parametrisering for C .

Jvf. Do Carmo s. 76 betegner

$\chi:]0, 2\pi[\times]a, b[=: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\forall (u, v) \in U: \chi(u, v) = (f(v) \cdot \cos(u), f(v) \cdot \sin(u), g(v))$
et kort på omdrejningsfladen for C .

Af def. s. 92 i Do Carmo har vi, for $(u, v) \in U$, $p = \chi(u, v)$

$$E(u, v) = \left\langle \frac{\partial \chi}{\partial u}, \frac{\partial \chi}{\partial u} \right\rangle_p = f(v)^2$$

$$F(u, v) = \left\langle \frac{\partial \chi}{\partial u}, \frac{\partial \chi}{\partial v} \right\rangle_p = 0 \quad (*)$$

$$G(u, v) = \left\langle \frac{\partial \chi}{\partial v}, \frac{\partial \chi}{\partial v} \right\rangle_p = f'(v)^2 + g'(v)^2$$

Påstand:

Der findes en parametrisation af $\chi(U)$, $\tilde{\chi}: \tilde{U} \text{ \textit{\"{o}ben}} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \chi(U)$,
s\u00e5ledes, at $\forall (\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{U}$:

$$\tilde{E}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{f}(\tilde{v})^2, \tilde{F}(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0, \tilde{G}(\tilde{u}, \tilde{v}) = 1 \quad (\text{hvor } \tilde{f} \text{ er en diff. fkt.})$$

Bevis:

Ifølge Do Carmo s. 21-22 kan vi reparametriserer $\chi(U)$ med buel\u00e6ngde.

Dvs. der eksisterer en parametrisering af $\chi(U)$, $(\tilde{f}(\tilde{v}), \tilde{g}(\tilde{v}))$, $a < \tilde{v} < b$
s\u00e5ledes, at $\tilde{f}'(\tilde{v})^2 + \tilde{g}'(\tilde{v})^2 = 1$ (jvf Do Carmo s. 6)

Vi ser (*) at denne parametrisering giver det \u00f8nskede

□

2.5.10

Sæt

$$U := \{(p, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid p > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$$

$$P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\} \quad (\text{Per et plan og dermed specielt en reg. flade})$$

Det er klart (def. 2.12.N2), at følgende betegner et kort på P

$$\forall (p, \theta) \in U: \chi(p, \theta) = (p \cdot \cos \theta, p \cdot \sin \theta, 0)$$

$$\forall (p, \theta) \in U:$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial p}(p, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad \frac{\partial \chi}{\partial \theta}(p, \theta) = (-p \cdot \sin \theta, p \cdot \cos \theta, 0)$$

Juf. def. s. 92 har vi: $(p := \chi(p, \theta))$

$$E(p, \theta) = \left\langle \frac{\partial \chi}{\partial p}, \frac{\partial \chi}{\partial p} \right\rangle_p = 1, \quad F(p, \theta) = \left\langle \frac{\partial \chi}{\partial p}, \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right\rangle_p = 0, \quad G(p, \theta) = \left\langle \frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right\rangle_p = p^2$$

2.5.15

S betegner en reg. flade

$\alpha: U \text{ åben} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ betegner et kort på S

Lad E, F og G betegne koefficienterne i den første fund. form dif. ud fra α

$\phi, \psi: \alpha(U) \rightarrow \mathbb{R}$ betegner to diff. fkt.

Antag $a \in \phi(\alpha(U))$, $b \in \psi(\alpha(U))$ er reg. værdier for hh. ϕ og ψ .

Definer $C_1 := \{p \in S \mid p \in \phi^{-1}(a)\}$, $C_2 := \{p \in S \mid p \in \psi^{-1}(b)\}$

Af exc. 2.4.28 følger at C_1, C_2 er regulære kurver på S .

Påstand:

C_1, C_2 er ortogonale $\iff E\phi_u\psi_v - F(\phi_u\psi_v + \phi_v\psi_u) + G\phi_v\psi_u = 0$

(Vi benytter not. introduceret s. 84-85 i Do Carmo og som vi benyttede i exc. 2.5.14)

Bevis:

Jvf. bn. til exc. 2.5.14 - A8, 3/3n har vi, at

$\forall p \in C_1 \cap C_2$: $\text{grad } \phi(p) \neq 0$ $\vee$ $\text{grad } \psi(p) \neq 0$

Jvf. exc. 2.5.14 c) er vi færdige, hvis vi for $p \in C_1 \cap C_2$ givet

kan vise, at $\text{grad } \phi(p) \perp \text{grad } \psi(p) \iff E\phi_u\psi_v - F(\phi_u\psi_v + \phi_v\psi_u) + G\phi_v\psi_u = 0$

$$0 = \langle \text{grad } \psi(p), \text{grad } \phi(p) \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{husk } \text{grad } \phi(p) \in T_p(S) \\ \text{+ def af grad } \psi(p)}}{=} d\psi_p(\text{grad } \phi(p)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{exc 2.5.14 a)}}{=} \frac{1}{E \cdot G - F^2} (\psi_u \psi_v) \begin{pmatrix} G\phi_u - F\phi_v \\ E\phi_v - F\phi_u \end{pmatrix}$$

$$\iff E\phi_u\psi_v - F(\phi_u\psi_v + \phi_v\psi_u) + G\phi_v\psi_u = 0$$

□

Betragt afb. $\underline{x}: U :=]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\forall (u, v) \in U: \underline{x}(u, v) = (v \cdot \cos u, v \cdot \sin u, a u)$, $a \neq 0$

Dette er jvf. exc. 2.5.9 + ex. 3 s. 94 i Do Carmo et kort på helicoidet, S .

Definer $\varphi, \psi: S \rightarrow \mathbb{R}$

$\forall (x, y, z) \in (S \setminus \{(x, y, z) \in S \mid x \geq 0 \wedge y = 0\}) =: S_1 : \varphi(x, y, z) = x$

$\forall (x, y, z) \in (S \setminus \{(x, y, z) \in S \mid x \geq 0 \wedge (y = 0 \vee x = 0)\}) =: S_2 : \psi(x, y, z) = y^2 + a^2 \cdot \sin^2(\frac{z}{a})$

Det er klart, at $S_1, S_2 \subseteq \underline{x}(U)$, og dermed kan vi udtrykke φ, ψ v.h.j.a. variablerne for $\underline{x}$:

$\forall (u, v) \in U = \underline{x}^{-1}(S_1) : \varphi(u, v) = v \cdot \cos u$

$\forall (u, v) \in U \cap \underline{x}^{-1}(S_2) = \{]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} : \psi(u, v) = (v^2 + a^2) \sin^2(u)$

Med den sædvanlige notation har vi (i hh. φ og ψ def. områder)

$$\varphi_u = -v \cdot \sin u, \quad \varphi_v = \cos u, \quad \psi_u = 2(v^2 + a^2) \sin(u) \cdot \cos(u)$$

$$\psi_v = 2v \cdot \sin^2(u)$$

Jvf. def. i exc. 2.4.28 a) ser vi, at

$\forall c \in \mathbb{R} : c \in \varphi(S_1)$, c reg. værdi for φ

$\forall k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_- : k \in \psi(S_2)$, k reg. værdi for ψ .

og jvf. ex. 3 s. 94 i Do Carmo har vi

$$\forall (u, v) \in U : E = v^2 + a^2, \quad F = 0, \quad G = 1$$

Vi ser, at $\forall (u,v) \in U \wedge x^{-1}(s_2) = x^{-1}(s_2)$

$$E\varphi_v\psi_v - \underset{\substack{\uparrow \\ F=0}}{F(\varphi_u\psi_v + \varphi_v\psi_u)} + G\varphi_u\psi_v = E\varphi_v\psi_v + G\varphi_u\psi_u$$

$$= (v^2 + a^2) \cdot \cos(u) \cdot 2 \cdot v \cdot \sin^2(u) - v \cdot \sin(u) \cdot 2 \cdot (v^2 + a^2) \cdot \sin(u) \cdot \cos(u)$$

$$= 2 \cdot v \cdot \sin^2(u) \cdot \cos(u) \cdot (1 - 1) = 0$$

For given $c \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$ følger dermed, at

$C_1 = \{(x,y,z) \in S \subseteq \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x,y,z) = c\}$, $C_2 = \{(x,y,z) \in S \subseteq \mathbb{R}^3 \mid \psi(x,y,z) = k\}$
er to ortogonale regulære kurver, jvf. ovenstående sætn.

2.6.2

S_1, S_2 betegner regulære flader i $\mathbb{R}^3$.

$\phi: S_1 \rightarrow S_2$ betegner en diff. afb. (se def. s. 73 i Do Carmo)

Påstand:

S_2 orienterbar og ϕ er en lokal diffeomorfi i $p \in S_1$, hvor $p \in S_1$ vilk.

$\Downarrow$

S_1 er orienterbar

Bewis:

At S_2 er en orienterbar regulær flade vil sige, at givet to kort på en mgd. $W \subseteq S_2$, er Jacobideterminanten for koordinatskiftfunktionen (mellem definitionsmgd. for de to kort) positiv overalt i W . (*)

At ϕ er en lokal diffeomorfi vil sige, at givet $p \in S_1$, $\exists V$ åben i S_1 , $p \in V$ således, at ϕ er en diffeomorfi mellem $V \subseteq S_1$ og $\phi(V) \subseteq S_2$. (†)

Lad to kort på en mgd. $U \subseteq S_1$ være givet (husk S_1 reg. flade)

For at vise at S_1 er orienterbar, skal vi vise, at Jacobideterminanten for koordinatskiftfunktionen (mellem def. mgd. for de to kort på U) er positiv overalt i U , (Jvf. def. 1 s. 103 i Do Carmo)

Lad $p \in U$ være givet.

Ifølge (†) $\exists V$ åben i S_1 , $p \in V$, således at φ er en diffeomorfi mellem $V \subseteq S_1$ og $\varphi(V) \subseteq S_2$.

Betragt restriktionerne af kortene på U til $U \cap V$.

(Ifølge exc 2.2, N2 (TØ nr. 5) er $U \cap V$ åben i S_1)

Kan vi vise, at Jacobideterminanten for restriktionerne af koordinatskiftfunktionen (mellem de to dif. mgl. for kortene på U) er positiv er vi færdige, da p er vilk.

Lad α, α' betegne restriktionerne af de ovenfor omtalte kort.

Da φ restriktet til $V \cap U$ er en diffeomorfi er det klart, at $\varphi \circ \alpha$, $\varphi \circ \alpha'$ er kort på $\varphi(V \cap U) \subseteq S_2$. (evt. se def. 2.12 NR)

Ifølge (*) er Jacobideterminanten for koordinatskiftet.

$(\varphi \circ \alpha')^{-1} \circ (\varphi \circ \alpha)$ positiv, og dette var præcis hvad vi skulle vise.

□

2.6.4.

Påstand:

En regulær kurvesammenhængende orienter-bar flade har præcis to forskellige orienteringer.

Bevis:

Lad S betegne en regulær kurvesammenhængende orienter-bar flade

Pr. def. eksisterer der mindst to forskellige orienteringer af S , idet N betegner et diff. enheds normal vektorfelt på S er $-N$ jo et andet diff. enheds normal vektorfelt.

Lad N, M betegne to diff. enheds normal vektorfelter på S

Da $N(p), M(p) \in (T_p(S))^\perp$ for alle $p \in S$ ser vi, at vi kan def.

$$\Theta: S \rightarrow \{-1, 1\} : M(p) = \Theta(p) \cdot N(p) \quad (*)$$

Kan vi vise, at Θ er konst. på hele S , er vi færdige....

Pr. antagelse er S kurvesammenhængende, dvs.

$$\forall p, q \in S \exists \alpha: [0, 1] \rightarrow S, \alpha(0) = p, \alpha(1) = q, \alpha \in C^0([0, 1], S) \quad (†)$$

Lad $p, q \in S$ være givet.

Da M, N er diff. vektorfelter def. på hele S , har vi jvf. $\circledast$

og sætn. om sammensætn. af kont. fkt., at Θ er kont.

på hele S . Men det vil jo sige, at for α valgt som i $(†)$, har vi

$\Theta \circ \alpha \in C^0([0, 1], \{\pm 1\})$ jvf. sætn. om sammensætn. af kont. fkt.

Af skæringsætn. følger, at Θ er konstant på $\alpha([0, 1])$, da

p, q var vilk. følger, at Θ er konstant på hele S . $\square$

(opg. 2.4.16)

Lad $S \subseteq \mathbb{R}^3$ betegne en regulær flade

$\underline{x}: U_1 \rightarrow V$, $\bar{x}: U_2 \rightarrow V$ betegner kort på V åben i S .
(dvs. U_1, U_2 åbne $\subseteq \mathbb{R}^2$ og $\underline{x}, \bar{x}$ opfylder def. 2.12.N2)

Lad $p \in V$, $w \in T_p(S)$ være givet

Sæt $(u_0, v_0) = \underline{x}^{-1}(p)$, $(\bar{u}_0, \bar{v}_0) = \bar{x}^{-1}(p)$ (klart at $(u_0, v_0) \in U_1$, $(\bar{u}_0, \bar{v}_0) \in U_2$)

Ifølge prop. 1 s.70 i Do Carmo er U_1, U_2 diffeomorfe, dvs.

$\exists h: U_1 \rightarrow U_2$, således at h er en diffeomorfi.[†]

Sæt $\forall (u, v) \in U_1$, $h(u, v) = (\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v))$ (h er $C^\infty(U_1, U_2)$ jvf. [†])

Lad $\underline{x}_u, \underline{x}_v, \bar{x}_{\bar{u}}, \bar{x}_{\bar{v}}$ være defineret som i DC s. 84.

Ifølge DC s. 84 $\exists \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}: w = \alpha_1 \underline{x}_u + \alpha_2 \underline{x}_v = \beta_1 \bar{x}_{\bar{u}} + \beta_2 \bar{x}_{\bar{v}}$

Ifølge def. 2.1 N2 har vi for alle $(u, v) \in U_1$:

$$dh_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Påstand:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{pmatrix} \bigg|_{(u_0, v_0)} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Bevis:

Ifølge prop. 1 s. 83 kan vi vælge $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow V$, $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$, α diff.

Definer $\bar{\beta}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U_1$, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon): \bar{\beta}(t) = \underline{x}^{-1} \circ \alpha(t)$

Ifølge DC s. 84 har vi, at $\bar{\beta}'(0) = (\alpha_1, \alpha_2)$ ($\bar{\beta}(0) = (u_0, v_0)$)

Kædereglen giver, at $\bar{\beta}$ er $C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon), U_1)$

Definer $\underline{\beta}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U_2$, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon): \underline{\beta}(t) = h \circ \bar{\beta}(t)$

Ifølge DC s. 84 har vi, at $\underline{\beta}'(0) = (\beta_1, \beta_2)$ ($\underline{\beta}(0) = (u_0, v_0)$)

Kædereglen giver, at $\underline{\beta}$ er $C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon), U_2)$

Af kædereglen følger, at $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$:

$$\underline{\beta}'(t) = dh_{\underline{\beta}(t)} \cdot \bar{\beta}'(t)$$

Specielt har vi

$$(\beta_1, \beta_2) = \underline{\beta}'(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{pmatrix} \bigg|_{\bar{\beta}(0)} \cdot \bar{\beta}'(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{pmatrix} \bigg|_{(u_0, v_0)} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

□

Gælder 19/5 - 08 Sult



23. marts 1998

Geometri 1.

UGESEDDER NR. 8

Forelæsningerne d. 26. og 27. Marts.

Forelæsningerne Torsdag d. 26 er flyttet til følgende lokaler:

kl. 14 - 15: Aud D1 og kl. 15 - 16 Aud E. Fredag er vi som sædvanlig i Aud D1.

Vi skal i afsnit 2 – 6 definere begreberne *orientabilitet* og *orientering* af en regulær flade. Vi skal vise at en regulær flade er orienterbar hvis og kun hvis der findes et differentiablet *enhedsnormalvektorfelt* til fladen. Alle de eksempler på regulære flader, vi har set indtil nu i kurset har været orienterbare. Möbiusbåndet, som vi vil gennemgå, er et eksempel på en regulær flade, som ikke er orienterbar.

Afsnit 2 – 6 er det sidste afsnit i kapitel 2 vi gennemgår. Afsnit 2 – 7 indholder en fantastisk sætning om kompakte orienterbare regulære flader som vi desværre ikke kan nå at gennemgå. Sætningen står på side 114 i do Carmo. Check it out!

Vi går videre med afsnit 3 – 2 og definerer den såkaldte *Gauss-afbildning* fra orienterede regulære flader ind i enhedskuglen. Gauss-afbildningen er særdeles vigtig i det geometriske studie af regulære flader. Vi vil første regne nogle eksempler igennem. Derefter viser vi at differentialen af Gauss-afbildningen er selv-adjungeret og giver anledning til en kvadratisk form på tangentrummet til fladen i ethvert punkt på fladen. Denne kvadratiske form kaldes den *anden fundamentalform*. Vi skal bruge en smule teori om selv-adjungerede operatore og kvadratiske former, som I har lært i Mat 10. Appendixet til kapitel 3 i do Carmo, side 214 – 216 giver faktisk en meget kort og præcis udledning af den teori vi skal bruge. Appendixet vil ikke blive gennemgået i forelæsningerne, men det antages I kender indholdet af det.

I næste uge fortsætter vi studiet af Gauss-afbildningen, afsnit 3 – 2.

Øvelsesopgaver 30. Marts – 3. April:

2.4.7, 2.4.10, 2.4.11, 2.4.12, 2.4.24, 2.5.1, 2.5.5

Afleveringsopgaver 30. Marts – 3. April:

2.4.16

Jørgen Ellegaard Andersen

Orient your self towards geometry!

Geometri 1, TØ nr. 8

2.4.7

Lad S betegne en regulær flade

Definer $f: S \rightarrow \mathbb{R}$, $p_0 \in \mathbb{R}^3$ $\forall p \in S: f(p) = |p - p_0|^2$

Jvf. Ex. 1 s. 72 i Do Carmo er f diff. (se def. s. 72 i DC)

Påstand:

$$\forall p \in S, w \in T_p(S) \quad df_p(w) = \langle 2w, p - p_0 \rangle$$

Bevis:

Lad $p \in S$

Lad $w \in T_p(S)$ være givet.

Jvf. prop. 1 s. 83 i Do Carmo kan vi vælge

$$\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S, \quad \alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = w$$

Af Do Carmo s. 84-85 har vi, at

$$df_p(w) = \left. \frac{d}{dt} |\alpha(t) - p_0|^2 \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \langle \alpha(t) - p_0, \alpha(t) - p_0 \rangle \right|_{t=0}$$

$$= 2 \langle \alpha'(t), \alpha(t) - p_0 \rangle \Big|_{t=0} = 2 \langle w, p - p_0 \rangle$$

□

2.4.10

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ betegner en regulær kurve parametriseret ved buelængde og $\forall s \in I: k(s) \neq 0$

Lad $r \in \mathbb{R}, r \neq 0$, definer $\mathbf{x}(s, v) = \alpha(s) + r(n(s) \cdot \cos v + b(s) \cdot \sin v)$ $(s, v) \in I \times]0, 2\pi[$

Antag at α, r er således, at $\mathbf{x}$ er en regulær parametriseret flade

$\forall (s, v) \in I \times]0, 2\pi[$:

$$\begin{aligned} N(s, v) &:= \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(s, v) \right|^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) \\ &= \text{sign}(r \cdot \cos(v) \cdot k(s) - 1) (\cos(v) \cdot n(s) + \sin(v) \cdot b(s)) \\ &= -(\cos(v) \cdot n(s) + \sin(v) \cdot b(s)) \end{aligned}$$

(Det er klart jvf. def. 2 s. 78 at def. på $N(s, v)$ s. 87 kan udvides til en regulær parametriseret flade.)

Da
$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(s, v) = (t(s) + r(n'(s) \cdot \cos v + b'(s) \cdot \sin v)) \wedge (r(b(s) \cdot \cos v - n(s) \cdot \sin v))$$

$\uparrow$
Først lign

$$= (t(s) + r(T(s) \cdot n(s) \cdot \sin v - (k(s) \cdot t(s) + T(s) \cdot b(s)) \cos v)) \wedge (r(b(s) \cdot \cos v - n(s) \cdot \sin v))$$

$$= -r \cdot \cos(v) \cdot n(s) + \underline{r^2 \cdot \cos(v) \cdot \sin(v) \cdot T(s) \cdot t(s)} + r^2 \cdot \cos^2(v) \cdot k(s) \cdot n(s)$$

distributiv regel
for vektorprodukt

$$-r \sin(v) \cdot b(s) + r^2 \sin(v) \cdot \cos(v) \cdot k(s) \cdot b(s) - r^2 \sin(v) \cdot \cos(v) \cdot T(s) \cdot t(s)$$

$$\begin{aligned} &= r \cdot \cos(v) (r \cdot \cos(v) \cdot k(s) - 1) n(s) + r \cdot \sin(v) (r \cdot \cos(v) \cdot k(s) - 1) b(s) \\ &= r \cdot (r \cdot \cos(v) \cdot k(s) - 1) (\cos(v) \cdot n(s) + \sin(v) \cdot b(s)) \end{aligned}$$

Da $N(s, v) \neq 0$ ($\{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\}$ basis for tangentplanet) og $(s, v) \mapsto (r \cdot \cos(v) \cdot k(s) - 1) \neq 0$ er en kont. afb. def. på en kurvesammenhengende delmængde af $\mathbb{R}^2$, samt at $(\frac{\pi}{2}, v) \mapsto -1$ følger af skæringssetn. at $\text{sign}(r \cdot \cos(v) \cdot k(s) - 1) = -1$.

2.4.11

Definer for $f, g \in C^\infty(I \text{ åben} \subseteq \mathbb{R})$, $\forall u \in I: f(u) \neq 0, g'(u) \neq 0 \dots$

$$\underline{x}: I \times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3, \forall (u, v) \in U: \underline{x}(u, v) = (f(u) \cdot \cos(v), f(u) \cdot \sin(v), g(u))$$

Det er klart, at U er en åben delmængde af $\mathbb{R}^2$, og at $\underline{x}$ er $C^\infty(U)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} &= (f'(u) \cdot \cos(v), f'(u) \cdot \sin(v), g'(u)) \wedge (-f(u) \cdot \sin(v), f(u) \cdot \cos(v), 0) \\ &= (-g'(u) \cdot f(u) \cdot \cos(v), -g'(u) \cdot f(u) \cdot \sin(v), f'(u) \cdot f(u)) \neq 0 \end{aligned}$$

Dvs. $d\underline{x}(u, v)$ er injektiv.

Vi ser, at $\underline{x}(U)$ er en regulær parametriseret flade (def 2. s. 78 i DC)

Def. på enhedsnormalvektoren / normallinje kan tydeligvis udvides til regulære parametriserede flader (Da Caruso s. 87)...

$$\forall (u, v) \in U: N(u, v) = \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}(u, v) \right|^{-1} \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right)$$

Normallinjen i $\underline{x}(u, v)$ er $\text{sp}(N(u, v)) + \underline{x}(u, v)$

$$\text{Sæt } c = \frac{1}{g'(u)}$$

$$\begin{aligned} \text{Da } c \cdot N(u, v) + \underline{x}(u, v) &= (f(u)(1 - c \cdot g'(u)) \cdot \cos(v), f(u)(1 - c \cdot g'(u)) \cdot \sin(v), c \cdot f'(u) f(u) + g(u)) \\ &= (0, 0, \frac{f'(u) \cdot f(u)}{g'(u)} + \frac{g(u)}{g'(u)}) \in \text{sp}(e_3) \end{aligned}$$

ser vi, at alle normallinjer for $\underline{x}(U)$ skærer z -aksen.

2.4.12

Lad $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, b, c \neq 0$ være givet

Definer

$$P_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a \cdot x\}$$

$$P_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = b \cdot y\}$$

$$P_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = c \cdot z\}$$

Definer $f_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3: f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a \cdot x$

$f_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3: f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - b \cdot y$

$f_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3: f_3(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - c \cdot z$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) = 2x - a, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) = 2y, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) = 2z$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) = 2x, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) = 2y - b, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) = 2z$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y, z) = 2x, \quad \frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y, z) = 2y, \quad \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) = 2z - c$$

Vi ser, at

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) = 0 \quad \text{hvis } (x, y, z) = \left(\frac{a}{2}, 0, 0\right) \notin P_1 \text{ (da } a \neq 0)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) = 0 \quad \text{hvis } (x, y, z) = \left(0, \frac{b}{2}, 0\right) \notin P_2 \text{ (da } b \neq 0)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) = 0 \quad \text{hvis } (x, y, z) = \left(0, 0, \frac{c}{2}\right) \notin P_3 \text{ (da } c \neq 0)$$

Da $0 \in f_1(\mathbb{R}^3), f_2(\mathbb{R}^3), f_3(\mathbb{R}^3)$ og jvf. bm. i De Carro s. 59

følger af prop. 2, at $f_1^{-1}(0) = P_1, f_2^{-1}(0) = P_2, f_3^{-1}(0) = P_3$ er regulære flader.

Lad $(x_1, y_1, z_1) \in P_1 \cap P_2$, $(x_2, y_2, z_2) \in P_2 \cap P_3$, $(x_3, y_3, z_3) \in P_1 \cap P_3$ være givet. Dus. $ax_1 = by_1$, $by_2 = cz_2$, $ax_3 = cz_3$ (*)

Af Ex. 2.4.1 følger, at

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) \Big|_{(x_1, y_1, z_1)} = (2x_1 - a; 2y_1; 2z_1) \text{ er en normalvektor til } T_{(x_1, y_1, z_1)}(P_1)$$

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \Big|_{(x_1, y_1, z_1)} = (2x_1; 2y_1 - b; 2z_1) \text{ er en normalvektor til } T_{(x_1, y_1, z_1)}(P_2)$$

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \Big|_{(x_2, y_2, z_2)} = (2x_2; 2y_2 - b; 2z_2) \text{ er en normalvektor til } T_{(x_2, y_2, z_2)}(P_2)$$

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_3}{\partial y}, \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) \Big|_{(x_2, y_2, z_2)} = (2x_2; 2y_2; 2z_2 - c) \text{ er en normalvektor til } T_{(x_2, y_2, z_2)}(P_3)$$

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) \Big|_{(x_3, y_3, z_3)} = (2x_3 - a; 2y_3; 2z_3) \text{ er en normalvektor til } T_{(x_3, y_3, z_3)}(P_1)$$

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_3}{\partial y}, \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) \Big|_{(x_3, y_3, z_3)} = (2x_3; 2y_3; 2z_3 - c) \text{ er en normalvektor til } T_{(x_3, y_3, z_3)}(P_3)$$

Da

$$\begin{aligned} \langle (2x_1 - a; 2y_1; 2z_1), (2x_1; 2y_1 - b; 2z_1) \rangle &= 4x_1^2 - 2ax_1 + 4y_1^2 - 2by_1 + 4z_1^2 \\ &\stackrel{(*)}{=} 4(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - ax_1) = 0 \text{ da } (x_1, y_1, z_1) \in P_1, \end{aligned}$$

$$\langle (2x_2; 2y_2 - b; 2z_2), (2x_2; 2y_2; 2z_2 - c) \rangle \stackrel{(**)}{=} 4(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - by_2) = 0, (x_2, y_2, z_2) \in P_2$$

$$\langle (2x_3 - a; 2y_3; 2z_3), (2x_3; 2y_3; 2z_3 - c) \rangle \stackrel{(**)}{=} 4(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 - ax_3) = 0, (x_3, y_3, z_3) \in P_1$$

ser vi, at P_1, P_2, P_3 skærer hinanden ortogonalt.

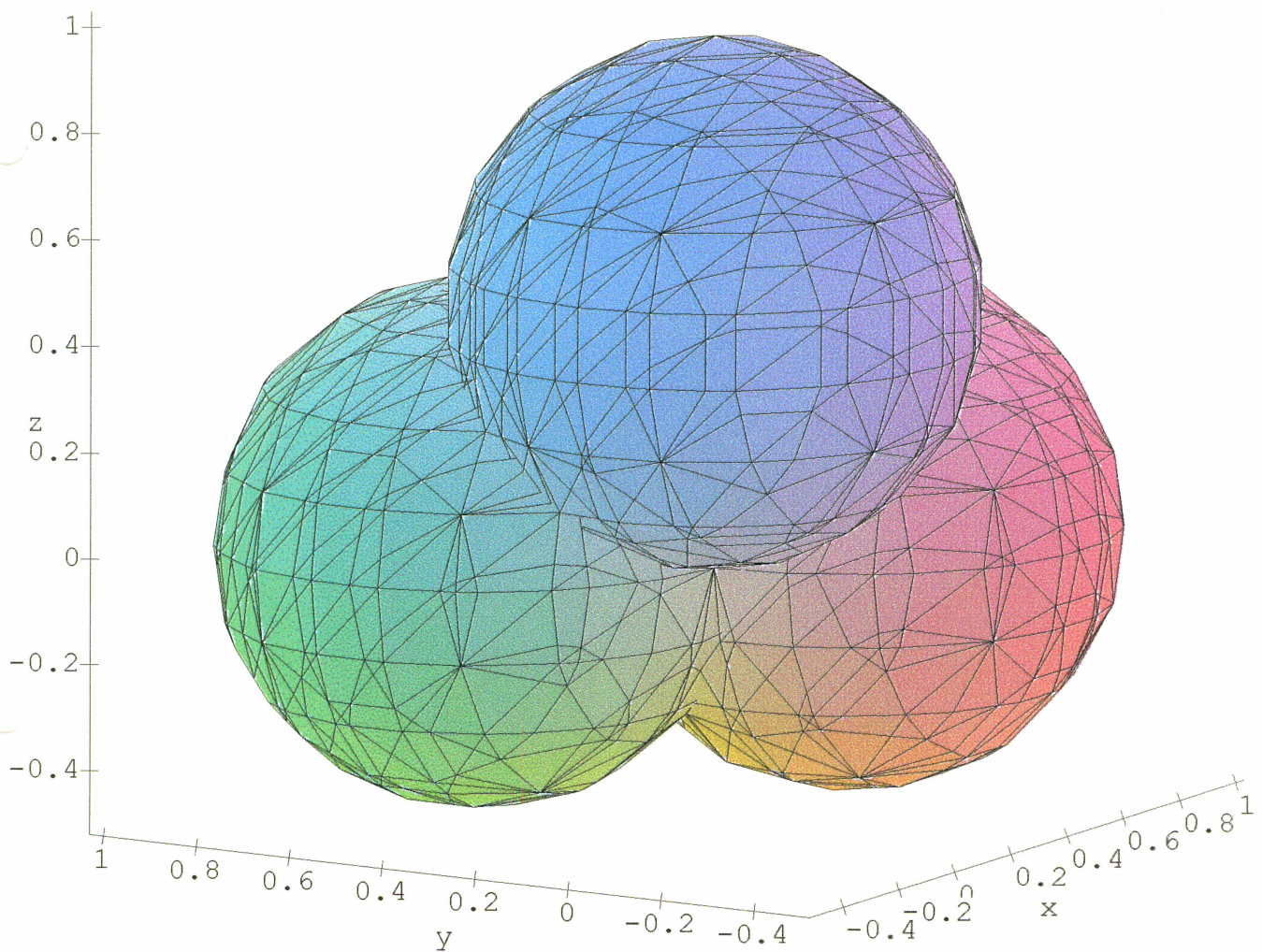
(Bm. at $\emptyset \in P_1 \cap P_2, P_2 \cap P_3, P_1 \cap P_3$)

```
> with(plots);
```

```
[animate, animate3d, conformal, contourplot, cylinderplot, densityplot, display, display3d,  
fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, loglogplot,  
logplot, matrixplot, odeplot, pointplot, polarplot, polygonplot, polygonplot3d,  
polyhedraplot, replot, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, sphereplot,  
surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]
```

```
> implicitplot3d( {x^2 + y^2 + z^2 = x, x^2 + y^2 + z^2 = y, x^2 + y^2 + z^2 = z}, x=-1..1,  
> y=-1..1, z=-1..1, grid=[15,15,15]);
```

```
>
```



2.4.24

Lad S_1, S_2, S_3 betegne regulære flader, og

$\varphi: S_1 \rightarrow S_2$, $\psi: S_2 \rightarrow S_3$ betegne diff. afb. (se def. s. 73 i Do Carmo)

Påstand:

$\psi \circ \varphi: S_1 \rightarrow S_3$ er diff. og $\forall p \in S_1: d(\psi \circ \varphi)_p = d\psi_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p$

Bevis:

Lad $p \in S_1, w \in T_p(S_1)$ være givet

Lad $\chi_1: U_1 \text{ åben} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$, $\chi_2: U_2 \text{ åben} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2$, $\chi_3: U_3 \text{ åben} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S_3$ betegne kort på hh. S_1, S_2 og S_3 , således $p \in \chi_1(U_1)$, $\varphi(\chi_1(u_1)) \in \chi_2(U_2)$, $\psi(\chi_2(u_2)) \in \chi_3(U_3)$

Da φ, ψ er diff. har vi juf. def. s. 73 i Do Carmo, at

$\chi_2^{-1} \circ \varphi \circ \chi_1: U_1 \rightarrow U_2$, $\chi_3^{-1} \circ \psi \circ \chi_2: U_2 \rightarrow U_3$ er diff.

i hh. $\chi_1^{-1}(p)$ og $\chi_2^{-1}(\varphi(p))$. Dette er afb. fra åbne delmængd. af

$\mathbb{R}^2$ (ind i åbne delmængd. af $\mathbb{R}^2$) og således kan vi benytte kædereglen, der i dette tilfælde (bl.a.) siger, at $\chi_3^{-1} \circ \psi \circ \chi_2 \circ \chi_2^{-1} \circ \varphi \circ \chi_1$, $= \chi_3^{-1} \circ \psi \circ \varphi \circ \chi_1$ er diff. i p .

Af def. s. 73 i Do Carmo har vi, at $\psi \circ \varphi$ er diff. i p .

Da p vilk. ser vi, at $\psi \circ \varphi$ er diff. på S_1 .

Ifølge prop. 1 s. 83 kan vi vælge $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S_1$, α diff

og $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$

Sæt $\forall (u_1, v_1) \in U_1$, $(u_2, v_2) \in U_2$, $(u_3, v_3) \in U_3$

$$\chi_{1u}(u_1, v_1) = \frac{\partial \chi_1}{\partial u_1}(u_1, v_1), \quad \chi_{1v}(u_1, v_1) = \frac{\partial \chi_1}{\partial v_1}(u_1, v_1), \quad \chi_{2u}(u_2, v_2) = \frac{\partial \chi_2}{\partial u_2}(u_2, v_2)$$

$$\chi_{2v}(u_2, v_2) = \frac{\partial \chi_2}{\partial v_2}(u_2, v_2), \quad \chi_{3u}(u_3, v_3) = \frac{\partial \chi_3}{\partial u_3}(u_3, v_3), \quad \chi_{3v}(u_3, v_3) = \frac{\partial \chi_3}{\partial v_3}(u_3, v_3)$$

Af Do Carmo s. 84 følger $\{\chi_{1u}, \chi_{1v}\}_{x=\alpha(0)}, \{\chi_{2u}, \chi_{2v}\}_{x=\varphi(\alpha(0))}, \{\chi_{3u}, \chi_{3v}\}_{x=\psi(\varphi(\alpha(0)))}$ er baser for

hh. $T_p(S_1)$, $T_{\varphi(p)}(S_2)$, $T_{\psi(\varphi(p))}(S_3)$.

Definer

$$\beta_1: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U_1, \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon): \beta_1(t) = x_1^{-1} \circ \alpha(t) \quad (\beta_1 \text{ er } C^\infty(-\varepsilon, \varepsilon), U_1))$$

$$\beta_2: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U_2, \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon): \beta_2(t) = x_2^{-1} \circ \varphi \circ x_1 \circ \beta_1(t) \quad (\beta_2 \text{ er } C^\infty(-\varepsilon, \varepsilon), U_2))$$

$$\beta_3: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U_3, \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon): \beta_3(t) = x_3^{-1} \circ \psi \circ x_2 \circ \beta_2(t) \quad (\beta_3 \text{ er } C^\infty(-\varepsilon, \varepsilon), U_3))$$

Af De Carmo s. 84-85 fremgår, at i baserne angivet på den foregående side, har vi... (benyttes bl.a. prop. 2)

$$\omega = \beta_1'(0), \quad \varphi(\omega) = \beta_2'(0), \quad \psi(\varphi(\omega)) = \beta_3'(0)$$

$$\beta_2'(0) = d(x_2^{-1} \circ \varphi \circ x_1)|_{\beta_1'(0)} = d\varphi_p \cdot \beta_1'(0)$$

$$\beta_3'(0) = d(x_3^{-1} \circ \psi \circ \varphi \circ x_2)|_{\beta_2'(0)} = d(\psi \circ \varphi)_p \cdot \beta_2'(0)$$

Af kædereglen følger, idet $x_3^{-1} \circ \psi \circ \varphi \circ x_2|_{\beta_2'(0)} = x_3^{-1} \circ \psi \circ x_2 \circ x_2^{-1} \circ \varphi \circ x_1|_{\beta_1'(0)}$

$$d(x_3^{-1} \circ \psi \circ \varphi \circ x_2)|_{\beta_2'(0)} = d(x_3^{-1} \circ \psi \circ x_2)|_{x_2^{-1}(\varphi(p))} \circ d(x_2^{-1} \circ \varphi \circ x_1)|_{\beta_1'(0)}$$

$$= d\psi_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p$$

$$\text{Dvs. } d(\psi \circ \varphi)_p = d\psi_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p$$

□

2.5.1

a)

$\chi:]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[=: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, lad $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\forall (u, v) \in U: \chi(u, v) = (a \cdot \sin(u) \cdot \cos(v), b \cdot \sin(u) \cdot \sin(v), c \cdot \cos(u))$

χ er (tydeligvis) en regulær parametriseret flade

$$\frac{\partial \chi}{\partial u}(u, v) = (a \cdot \cos(u) \cdot \cos(v), b \cdot \cos(u) \cdot \sin(v), -c \cdot \sin(u))$$

, $(u, v) \in U$

$$\frac{\partial \chi}{\partial v}(u, v) = (-a \cdot \sin(u) \cdot \sin(v), b \cdot \sin(u) \cdot \cos(v), 0)$$

$$E(u_0, v_0) = \left\langle \frac{\partial \chi}{\partial u}, \frac{\partial \chi}{\partial u} \right\rangle_p = \cos^2(u_0) (a^2 \cos^2(v_0) + b^2 \sin^2(v_0) + \sin^2(u_0) \cdot c^2) \quad (p = \chi(u_0, v_0), (u_0, v_0) \in U)$$

$$F(u_0, v_0) = \left\langle \frac{\partial \chi}{\partial u}, \frac{\partial \chi}{\partial v} \right\rangle_p = \sin(u_0) \cdot \sin(v_0) \cdot \cos(u_0) \cdot \cos(v_0) (b^2 - a^2) = \frac{b^2 - a^2}{4} \sin(2u_0) \sin(2v_0)$$

$$G(u_0, v_0) = \left\langle \frac{\partial \chi}{\partial v}, \frac{\partial \chi}{\partial v} \right\rangle_p = \sin^2(u_0) (b^2 \cos^2(v_0) + a^2 \sin^2(v_0))$$

Dus, for $w = (u', v') \in T_p(\chi(U))$, $(p \in \chi(U))$:

$$I_p(w) = E(u')^2 + F(u', v') + G(v')^2$$

$$= ((u')^2 \cdot \cos^2(u_0) + (v')^2 \cdot \sin^2(u_0) (a^2 \cos^2(v_0) + b^2 \sin^2(v_0)) + (u')^2 \cdot c^2 \cdot \sin^2(u_0) + u' v' \cdot \sin(u_0) \cdot \cos(u_0) \sin(v_0) \cos(v_0) (b^2 - a^2))$$

b)

$$\chi: \mathbb{R}_+ \times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3, \quad a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\forall (u, v) \in U: \chi(u, v) = (a \cdot u \cdot \cos(v), b \cdot u \cdot \sin(v), u^2)$$

χ er en regulær parametriseret flade.

$$\frac{\partial \chi}{\partial u}(u, v) = (a \cdot \cos(v), b \cdot \sin(v), 2u)$$

$$(u, v) \in U$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial v}(u, v) = (-a \cdot u \cdot \sin(v), b \cdot u \cdot \cos(v), 0)$$

$$p = \chi(u_0, v_0), \quad (u_0, v_0) \in U;$$

$$E(u_0, v_0) = a^2 \cdot \cos^2(v_0) + b^2 \cdot \sin^2(v_0) + 4u_0^2$$

$$F(u_0, v_0) = u_0 \cdot \cos(u_0) \cdot \sin(v_0) (b^2 - a^2) = \frac{u_0}{2} \sin(2v_0) (b^2 - a^2)$$

$$G(u_0, v_0) = u_0^2 (a^2 \cdot \sin^2(v_0) + b^2 \cdot \cos^2(v_0))$$

$$w = (u', v') \in T_p(\chi(U))$$

$$I_p(w) = E(w)^2 + F u' v' + G(v')^2$$

$$= (u')^2 \cdot (a^2 \cdot \cos^2(v_0) + b^2 \cdot \sin^2(v_0) + 4u_0^2)$$

$$+ u' \cdot v' \cdot \frac{u_0}{2} \cdot \sin(2v_0) (b^2 - a^2) + (v')^2 \cdot u_0^2 (a^2 \cdot \sin^2(v_0) + b^2 \cdot \cos^2(v_0))$$

c)

$$\underline{x}: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} =: U \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\forall (u, v) \in U: \underline{x}(u, v) = (a \cdot u \cdot \cosh(v), b \cdot u \cdot \sinh(v), u^2)$$

$\underline{x}$ er en reg. parametrisert fl de

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}(u, v) = (a \cdot \cosh(v), b \cdot \sinh(v), 2u)$$

, $(u, v) \in U$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial v}(u, v) = (a \cdot u \cdot \sinh(v), b \cdot u \cdot \cosh(v), 0)$$

$$p = \underline{x}(u_0, v_0), \quad (u_0, v_0) \in U:$$

$$E(u_0, v_0) = a^2 \cdot \cosh^2(v_0) + b^2 \sinh^2(v_0) + 4 \cdot u_0^2$$

$$F(u_0, v_0) = u_0 \cdot \sinh(v_0) \cdot \cosh(v_0) \cdot (a^2 + b^2) = u_0 \cdot \sinh(2 \cdot v_0) \cdot (a^2 + b^2)$$

$$G(u_0, v_0) = u_0^2 (a^2 \cdot \sinh^2(v_0) + b^2 \cdot \cosh^2(v_0))$$

$$w = (u', v') \in T_p(\underline{x}(U))$$

$$I_p(w) = E(u')^2 + F(u', v') + G(v')^2$$

$$= (u')^2 \cdot (a^2 \cosh^2(v_0) + b^2 \sinh^2(v_0) + 4u_0^2) + u' \cdot v' \cdot u_0 \cdot \sinh(2 \cdot v_0) (a^2 + b^2) \\ + (v')^2 \cdot u_0^2 \cdot (a^2 \sinh^2(v_0) + b^2 \cosh^2(v_0))$$

d)

$$\underline{x} : \mathbb{R}_+ \times]0, 2\pi[=: U \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\forall (u, v) \in U : \underline{x}(u, v) = (a \cdot \sinh(u) \cdot \cos(v), b \cdot \sinh(u) \cdot \sin(v), c \cdot \cosh(u))$$

$\underline{x}$ er en regulær parametriseret kurve

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}(u, v) = (a \cdot \cosh(u) \cdot \cos(v), b \cdot \cosh(u) \cdot \sin(v), c \cdot \sinh(u))$$

, $(u, v) \in U$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial v}(u, v) = (-a \cdot \sinh(u) \cdot \sin(v), b \cdot \sinh(u) \cdot \cos(v), 0)$$

$$p = \underline{x}(u_0, v_0) \quad , \quad (u_0, v_0) \in U$$

$$E(u_0, v_0) = \cosh^2(u_0) (a^2 \cdot \cos^2(v_0) + b^2 \cdot \sin^2(v_0)) + \sinh^2(u_0) \cdot c^2$$

$$F(u_0, v_0) = \sinh(2u_0) \cdot \frac{1}{2} \sin(2v_0) (b^2 - a^2)$$

$$G(u_0, v_0) = \sinh^2(u_0) (a^2 \cdot \sin^2(v_0) + b^2 \cdot \cos^2(v_0))$$

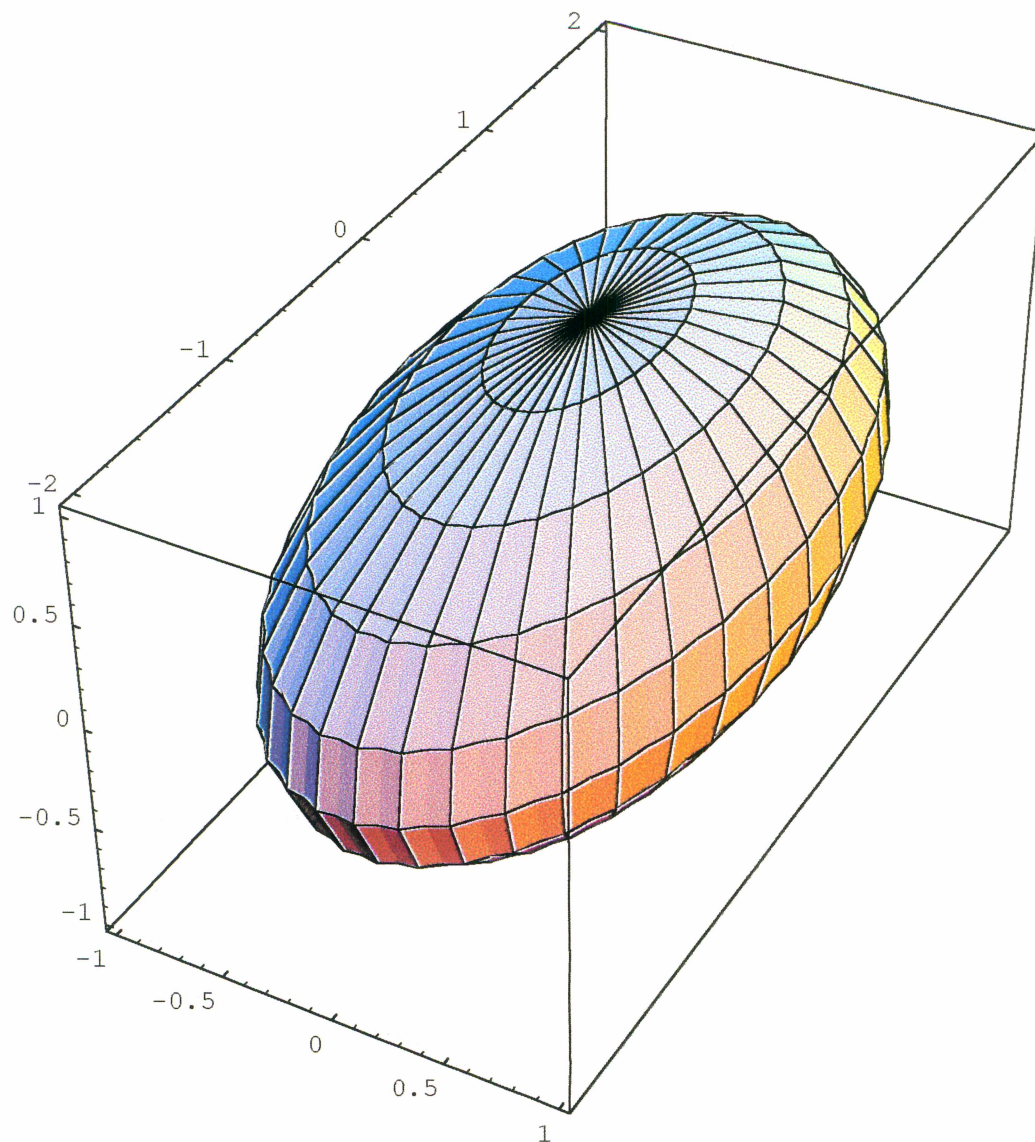
$$w = (u', v') \in T_p(\underline{x}(U))$$

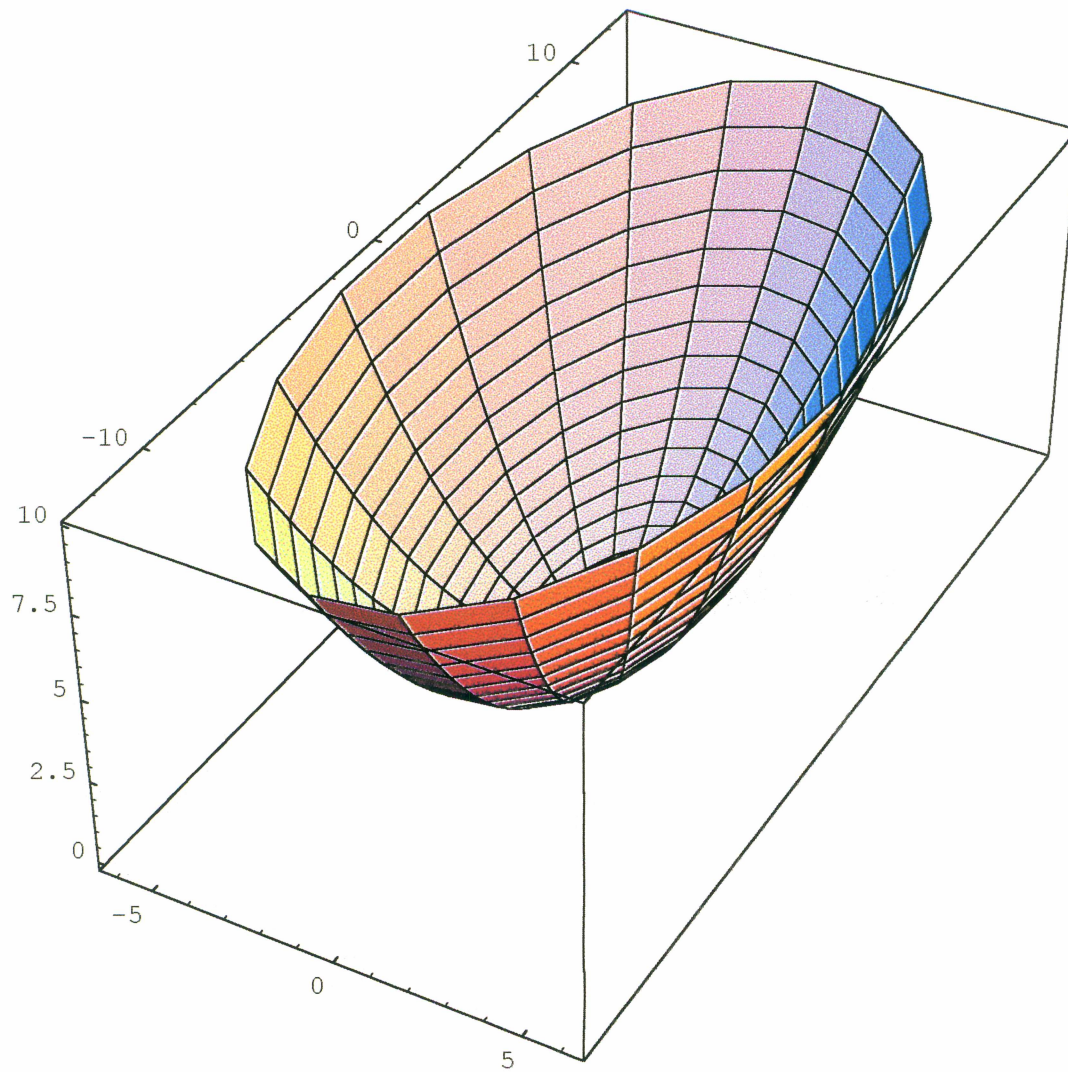
$$I_p(w) = E(u')^2 + F \cdot u' \cdot v' + G(v')^2$$

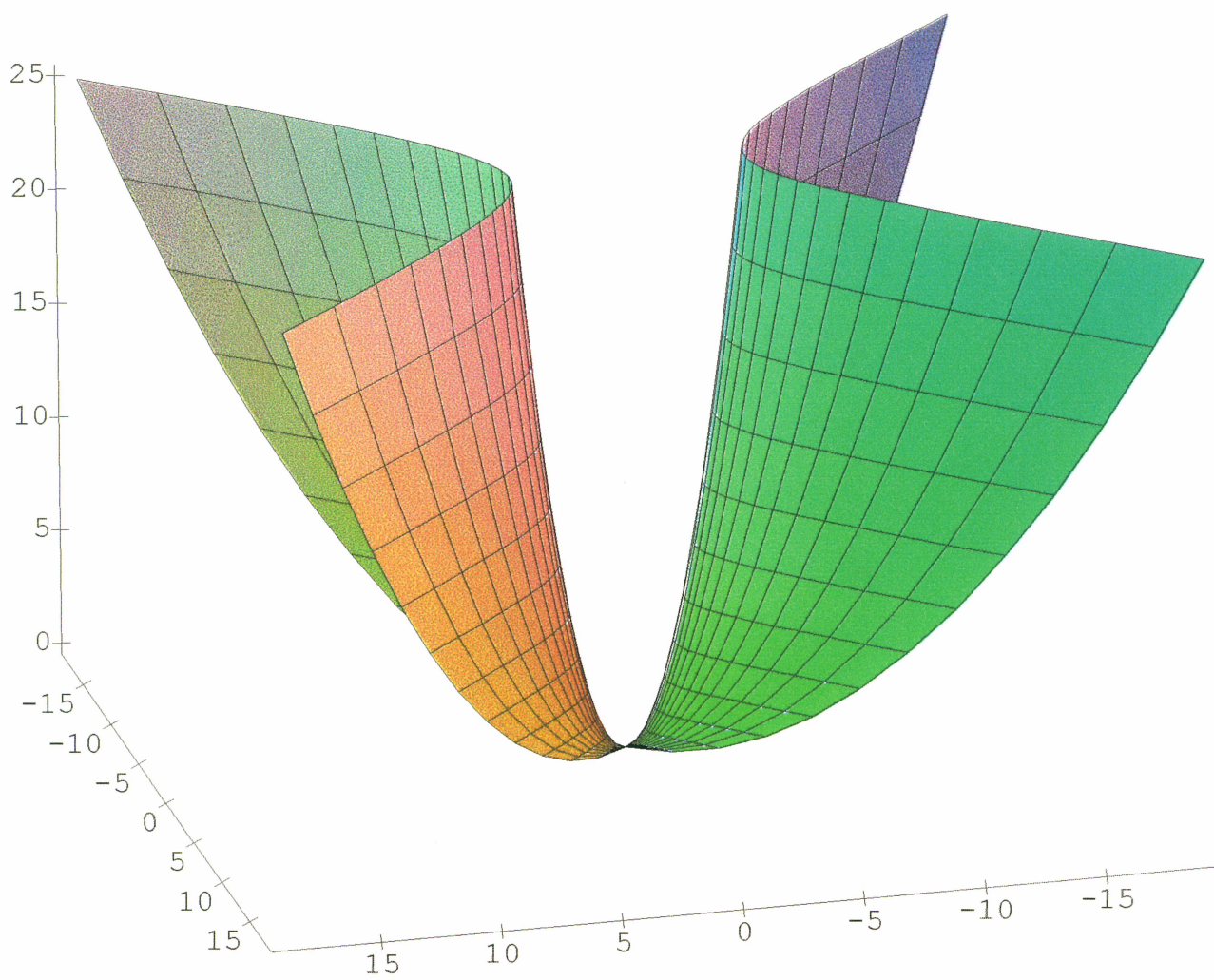
$$= (u')^2 \cdot \cosh^2(u_0) (a^2 \cos^2(v_0) + b^2 \sin^2(v_0)) + (u')^2 \cdot \sinh^2(u_0) \cdot c^2$$

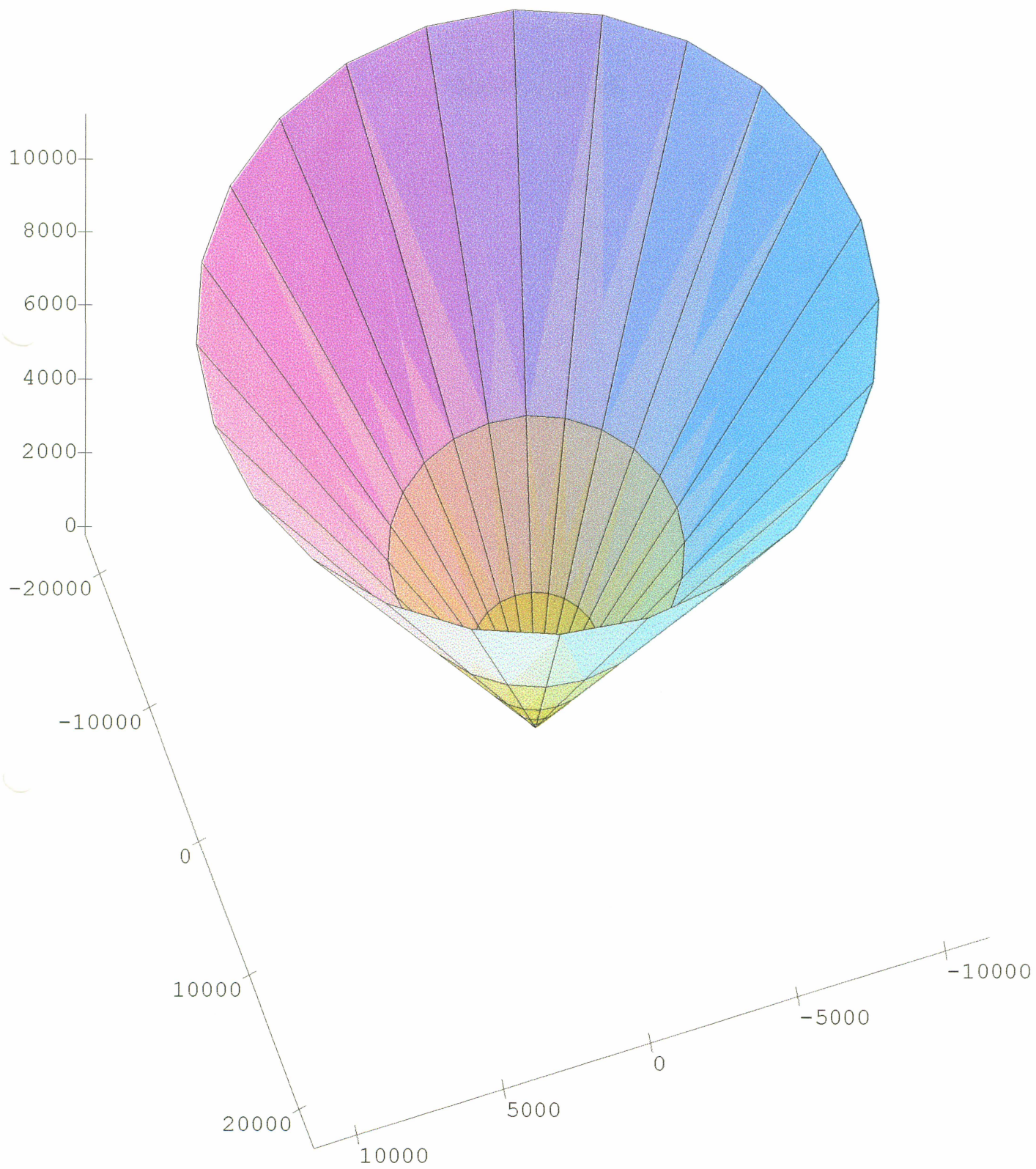
$$+ u' \cdot v' \cdot \sinh(2u_0) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2v_0) (b^2 - a^2)$$

$$+ (v')^2 \cdot \sinh^2(u_0) \cdot (a^2 \cdot \sin^2(v_0) + b^2 \cdot \cos^2(v_0))$$









2.5.5

Lad $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ betegne en $C^\infty(U, \mathbb{R})$ fkt.

Jvf. prop. 1 s. 58 i Do Carmo er $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U, z = f(x, y)\}$ en regulær flade i $\mathbb{R}^3$ med følgende atlas

$$\underline{x}: U \rightarrow \mathbb{R}^3, \forall (x, y) \in U: \underline{x}(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

Lad R betegne en begrænset region af S

$$\text{Sæt } Q = \{(x, y) \in U \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

Påstand:

Areal (se def. 2 s. 98 i DC) af R , A er givet ved...

$$A = \iint_Q \sqrt{1 + f_1^2(x, y) + f_2^2(x, y)} \, dx \, dy$$

Bevis:

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial x}(x, y) = (1, 0, f_1(x, y)), \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial y}(x, y) = (0, 1, f_2(x, y)) \quad (x, y) \in Q$$

$$\text{Dvs. } \forall (x, y) \in Q: E(x, y) = 1 + f_1^2(x, y), F(x, y) = f_1(x, y) \cdot f_2(x, y), G(x, y) = 1 + f_2^2(x, y)$$

Jvf. Do Carmo s. 98 (bl.a. def. 2) har vi

$$\begin{aligned} A &= \iint_Q \sqrt{E \cdot G - F^2} \, dx \, dy = \iint_Q \sqrt{1 + f_2^2(x, y) + f_1^2(x, y) + f_1^2(x, y) \cdot f_2^2(x, y) - f_1^2(x, y) f_2^2(x, y)} \, dx \, dy \\ &= \iint_Q \sqrt{1 + f_1^2(x, y) + f_2^2(x, y)} \, dx \, dy \end{aligned}$$

□

(opg 2.4.1)

$f: U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, f er $C^\infty(U)$

Lad os antage, at 0 er en regulær værdi for f og at $0 \in f(U)$.

Af prop. 2 s. 59 i Do Carmo følger, at $f^{-1}(0)$ er en regulær flade i $\mathbb{R}^3$. (betingelsen $0 \in f(U)$ sikrer, at $f^{-1}(0) \neq \emptyset$)

Påstand:

Lad $p = (x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}(0)$

$T_p(f^{-1}(0))$ er da givet som de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, der opfylder

$$f_x(p)(x-x_0) + f_y(p)(y-y_0) + f_z(p)(z-z_0) = 0$$

hvor $(f_x(p), f_y(p), f_z(p)) = df(p)$.

Bevis:

Lad $p = (x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}(0)$ være givet

Af prop 1 + efterfølgende bm/def. s. 83 i Do Carmo har vi, at $T_p(f^{-1}(0))$ er et plan.

Det restere at vise, at $df(p)$ er en normalvektor for $T_p(f^{-1}(0))$, dvs.

$$\forall w \in T_p(f^{-1}(0)) : \langle df(p), w \rangle = df_p w^T = 0$$

Lad $w \in T_p(f^{-1}(0))$ være givet. Valg $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow f^{-1}(0)$, $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$

(En sådan fkt. eksisterer jvf. prop. 1 s. 83 i Do Carmo)

Da $\alpha((-\epsilon, \epsilon)) \subseteq f^{-1}(0)$ er det klart, at $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon) : f(\alpha(t)) = 0$

$$\text{Kædereglen giver } df(\alpha(0)) \cdot (\alpha'(0))^T = df(p) \cdot w^T = 0$$

□

Gallieist

12/5-78

scit