



16. marts 1998

Geometri 1.

UGESEDDER NR. 7

Forelæsningserne d. 19. og 20. Marts.

Vi gør først afsnit 2 – 4 færdig: Vi definerer *differentialet* for en differentiabel afbildning mellem to regulære flader og beviser inversfunktionsætningen for sådanne afbildninger.

Derefter går vi videre med afsnit 2 – 5. Vi definerer den *første fundamentalform* på en regulær flade. Efter gennemgang af nogle eksempler, vil vi bruge den første fundamentalform til dels at definere *længden* af en vilkårlig differentiable kurve på en regulær flade og dels til at definere *arealet af et område* på en regulær flade.

Afsnit 2 – 6 om *orientering* af regulære flader er det sidste afsnit i kapitel 2 vi gennemgår. Vi vil søge at nå så meget som muligt af dette afsnit i denne uge. Specielt definitionen af orientabilitet, samt proposition 1 i dette afsnit.

Vi gør afsnit 2 – 6 færdig i næste uge og så går vi videre med kapitel 3, afsnit 3 – 2.

Øvelsesopgaver 23. – 27. Marts:

2.3.8, 2.3.14, 2.3.15, 2.4.2, 2.4.3, 2.4.8, 2.4.9

Afleveringsopgaver 23. – 27. Marts:

2.4.1

Jørgen Ellegaard Andersen

Geometry is the meeting point of the fundamental sciences.

2.3.8

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \quad S = (0, 0, -1), \quad N = (0, 0, 1)$$

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

Definer $F: S^2 \setminus \{S, N\} \rightarrow H$ som beskrevet i opgaveformuleringen

Lad $(x, y, z) \in S^2 \setminus \{S, N\}$ være givet

Det er klart udfra def. af F , at $\exists t > 0: F(x, y, z) = (tx, ty, z)$

Vi ønsker at bestemme t ...

Det må gælde, at $(tx, ty, z) \in H$, dvs. $(tx)^2 + (ty)^2 - z^2 = 1$

$$\Rightarrow t^2(x^2 + y^2) = 1 + z^2 \xRightarrow{t > 0} t = \frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{\frac{1+z^2}{x^2+y^2}}$$

Vi ser, at $\forall (x, y, z) \in S^2 \setminus \{S, N\}: F(x, y, z) = \left(\sqrt{\frac{1+z^2}{x^2+y^2}} \cdot x, \sqrt{\frac{1+z^2}{x^2+y^2}} \cdot y, z\right)$

Def. $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0, y=0\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0, y=0\}$

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0, y=0\}: \bar{F}(x, y, z) = \left(\sqrt{\frac{1+z^2}{x^2+y^2}} \cdot x, \sqrt{\frac{1+z^2}{x^2+y^2}} \cdot y, z\right)$$

Det er klart, at $\bar{F}$ er $C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0, y=0\})$

Af Ex. 1 s. 72: Do Carmo følger, da $F = \bar{F}|_{S^2}$, at

F er $C^\infty(S^2, H)$

2.3.14

S betegner en regulær flade

$$A \subseteq S$$

Påstand: A reg. flade $\Leftrightarrow A$ er åben i S

Bevis:

' $\Rightarrow$ ':

Lad J betegne en indeksmgd. således at

$\forall j \in J : x_j : U_j \rightarrow A_j$ betegner kort på delmgd. A_j åben i A og $\bigcup_{j \in J} A_j = A$. Sådanne kort og mængder eksisterer jvf. def. på, at A er en regulær flade (2.12. N2)

Hvis x_j er et kort på S for alle $j \in J$ følger af øvelse 2.5 N2, at A_j åben i S for alle $j \in J$, og dermed har vi jvf. øvelse 2.2 NR, at $\bigcup_{j \in J} A_j = A$ er åben i S .

Lad $x_j : U_j \rightarrow A_j$, $j \in J$ være givet,

Da $A_j \subseteq A \subseteq S$ og idet x_j er injektiv, dx_j er injektiv,

x_j er $C^\infty(U_j, A_j)$ følger af prop. 4 s. 64 i Do Carmo, at

x_j er en homeomorfi fra U_j åben $\subseteq \mathbb{R}^2$ ind i A_j åben i S .

Dvs. at x_j opfylder def 2.12. N2 som fkt fra en åben delmgd.

af $\mathbb{R}^2$ ind i en mgd. A_j , som er åben i A_j . x_j er et kort på S .

' $\Leftarrow$ '

Da $A \subseteq S$ findes der en indeksmgd. J og kort

$x_j: U_j \text{ \textit{\"{o}ben} } \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow A_j$, A_j \textit{\"{o}ben} i S , $j \in J$ (pr. def. 2.12.N2)

s\u00e5ledes, at $A \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$

Def. $\forall j \in J$ $B_j := A_j \cap A$, $V_j := x_j^{-1}(B_j)$

If\u00f8lge \u00f8velse 2.2 N2 er B_j \textit{\"{o}ben} i S da A_j, A er \textit{\"{o}bne} i S

Og if\u00f8lge prop. 2.13 er V_j en \textit{\"{o}ben} delmgd. af $\mathbb{R}^2$.

Af def. 2.12.N2 er det derfor klart, at $x_j: V_j \rightarrow B_j$, $j \in J$ er kort p\u00e5 S .

At B_j er \textit{\"{o}ben} i S vil sige, at der findes en \textit{\"{o}ben} delmgd.

i $\mathbb{R}^3$ indeholdende B_j , denne ben\u00f8vner vi O_j , s\u00e5ledes at

$O_j \cap S = B_j$. Da $B_j \subseteq A$ ser vi, at $O_j \cap A = B_j$, dvs.

B_j er \textit{\"{o}ben} i A .

Af def 2.12.N2 f\u00f8lger, at x_j , $j \in J$ er et kort p\u00e5 A .

Da $\bigcup_{j \in J} B_j = A$ har vi derfor, at $\{x_j | j \in J\}$ udg\u00f8r et atlas p\u00e5 A .

A er derfor en regul\u00e6r flade.

□

2.3.15

C betegner en regulær kurve

$\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow C$, $\beta: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow C$ betegner to parametriseringer af C i en omegn $W = \alpha(I) \cap \beta(J)$ af $p \in C$.

Da α, β er homeomorfier ser vi, at $h = \alpha^{-1} \circ \beta: \beta^{-1}(W) \rightarrow \alpha^{-1}(W)$ er veldefineret.

Påstand: h er en diffeomorfi

Bevis:

Da sammensætn. af homeomorfier er en homeomorfi og $h = \alpha^{-1} \circ \beta$ er det klart, at h er en homeomorfi.

Lad $r \in \beta^{-1}(W)$ være givet. Sæt $q = h(r)$

Skriv α på formen $\alpha(u) = (x(u), y(u), z(u))$, $u \in \alpha^{-1}(W)$

Da α er en parametrisering af C gælder jvf. def. s. 75 i Do Carmo, at $(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}) \neq 0$ (med misbrug af not. for partielt afl.)

Antag at $\frac{\partial x}{\partial u} \neq 0$ (følgende arg. kan også anvendes i de andre situat.)

Definer $F: \alpha^{-1}(W) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\forall (u, s, t) \in \alpha^{-1}(W) \times \mathbb{R}^2$: $F(u, s, t) = (x(u), y(u) + s, z(u) + t)$

Bm. $F|_{\alpha^{-1}(W) \times \{0\} \times \{0\}} = \alpha$.

Vi har

$$dF_q = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & 0 & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & 1 & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}(q) \neq 0$$

Af inversfkt.sæt. følger, at der eksisterer en åben omegn i $\mathbb{R}^3$, M , (og $M \subseteq F(\alpha^{-1}(W) \times \mathbb{R}^2)$) af $\alpha(q)$ således at

F^{-1} eksisterer og er $C^1(M)$.

Da β er kont. eksisterer der jvf. teorien om kont. fkt. en åben omegn N af r i $\beta^{-1}(W)$ således, at $\beta(N) \subseteq M$

Da $h|_N = F^{-1} \circ \beta|_N$ følger af kædereglen at h er diff. i r .

r var vilk. element i $\beta^{-1}(W)$, dvs. h er diff. i $\beta^{-1}(W)$

Helt tilsvarende vises, at h^{-1} (der er uddif. da h er en homeomorfi) er diff. i $\alpha^{-1}(W)$.

□

Påstand: $\left| \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt \right| = \left| \int_{\tau_0}^{\tau} |\beta'(\tau)| d\tau \right|$, $t = h(\tau)$, $t \in I$, $\tau \in J$

Bevis:

Da h er en diffeomorfi, er det klart, at h er enten strengt voksende eller aftagende, og at h^{-1} er $C^\infty(\alpha^{-1}(W))$

Det er desuden klart at $t \mapsto |\alpha'(t)|$, $\tau \mapsto |\beta'(\tau)|$ er kontinuerte.

Af sætn. 9.2.7 i Lindstrøm følger, at

$$\begin{aligned} \left| \int_{\tau_0}^{\tau} |\beta'(\tau)| d\tau \right| &= \left| \int_{h(\tau_0)}^{h(\tau)} |\beta'(h^{-1}(t))| \frac{d}{dt} h^{-1}(t) dt \right| = \left| \int_{h(\tau_0)}^{h(\tau)} |\alpha'(t)| dt \right| \\ &\quad \uparrow \text{kæderegl.} \\ &= \begin{cases} \left| \int_t^{t_0} |\alpha'(t)| dt \right|, & h \text{ aft.} \\ \left| \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt \right|, & h \text{ vok.} \end{cases} \\ &\stackrel{\text{def. af int.}}{=} \left| \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt \right| \end{aligned}$$

□

2.4.2

Definer $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$

$$df_p = (f_x(p), f_y(p), f_z(p)) = (2x, 2y, -2z), \quad p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Det er klart, at $f_x(p) = f_y(p) = f_z(p) = 0$ hvis $p = \underline{0}$

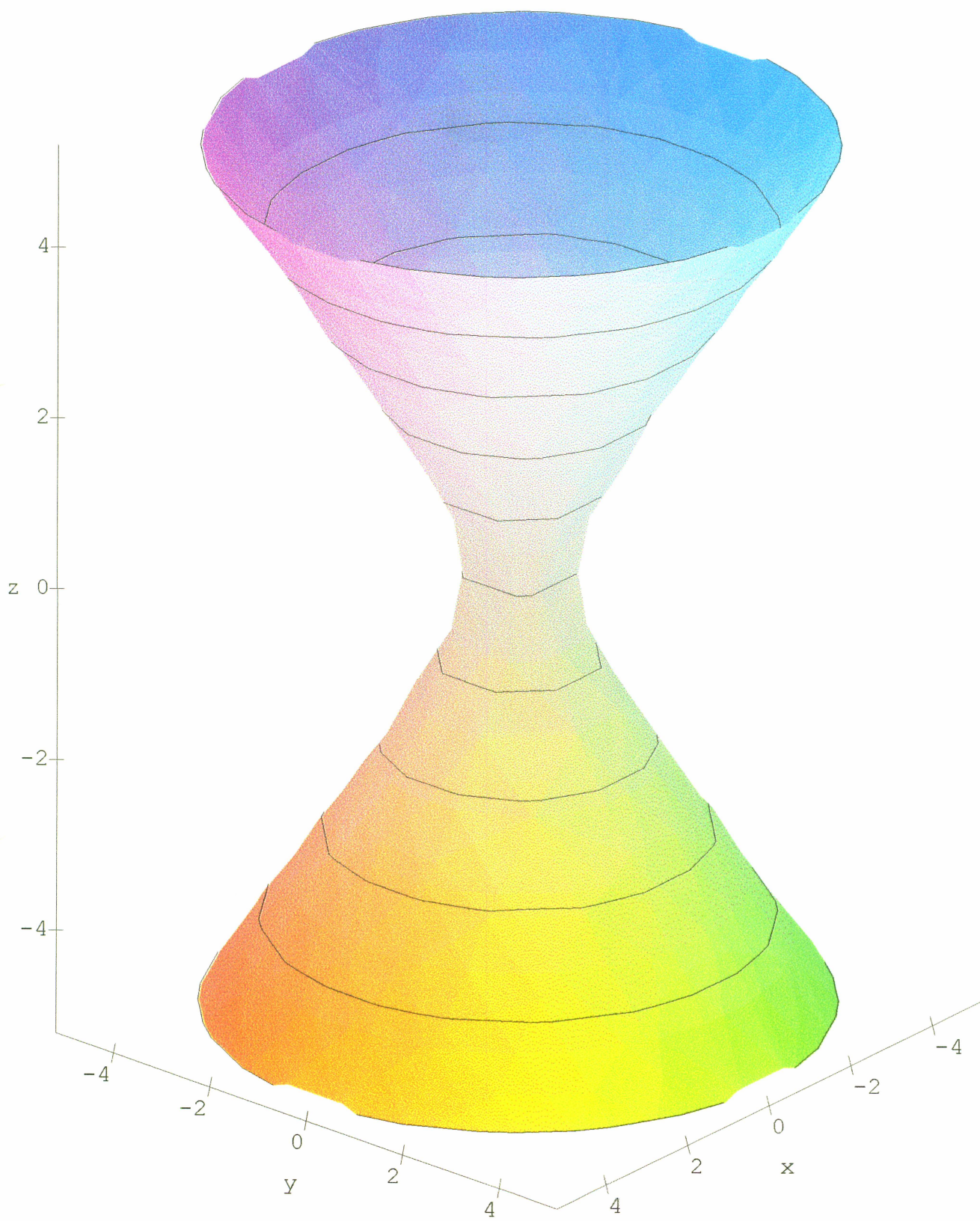
Da $\underline{0} \notin f^{-1}(0)$ følger juf. bm. + prop. 2 s 59 i Do Carmo, at $f^{-1}(0)$ er en regulær flade.

Lad $(x_0, y_0, 0) \in f^{-1}(0)$ af Exc. 2.4.1 følger, at

$$T_{(x_0, y_0, 0)}(f^{-1}(0)) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) = 0\}$$

Vi ser, at en normalvektor for $T_{(x_0, y_0, 0)}(f^{-1}(0))$ er $(x_0, y_0, 0)$, da $\underline{0} \notin f^{-1}(0)$ ser vi, at $(x_0, y_0, 0)$ tilhører x - y planet.

Dermed er $T_{(x_0, y_0, 0)}(f^{-1}(0))$ et plan, som er parallelt med z -aksen.



2.4.3

$f: U \text{ åben} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

Lad $p_0 = (x_0, y_0) \in U$ være givet; sæt $z_0 = f(x_0, y_0)$

Af prop. 1 s. 58 i Do Carmo følger, at $P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U, z = f(x, y)\}$ er en reguler flade, og at $\chi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\forall (x, y) \in U: \chi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ er et atlas for P .

$$\frac{\partial \chi}{\partial x}(p_0) = (1, 0, f_x(x_0, y_0)), \quad \frac{\partial \chi}{\partial y}(p_0) = (0, 1, f_y(x_0, y_0)), \quad \frac{\partial \chi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \chi}{\partial y}(p_0) = (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1) \quad (*)$$

Af bm. s. 84 i Do Carmo følger, at $\frac{\partial \chi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \chi}{\partial y}(p_0)$ er en normalvektor for $T_{p_0}(P)$

Da tangentplanet for grafen for f i $f(p_0)$ er $T_{p_0}(P) + f(p_0)$, ser vi dermed at dette tangentplan har lign.

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0) = z$$

Ifølge Do Carmo's def. på differential af en fkt. i app. 2 har vi.

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2: df_{p_0}(x, y) &= (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) (x, y)^T \\ &= f_x(x_0, y_0) \cdot x + f_y(x_0, y_0) \cdot y \end{aligned}$$

Grafen for df_{p_0} er afb. $F: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow (x, y, f_x(x_0, y_0) \cdot x + f_y(x_0, y_0) \cdot y)$

Vi ser, at $F(x, y) = (x, y, f_x(x_0, y_0) \cdot x) + (x, y, f_y(x_0, y_0) \cdot y)$.

Dvs. $F(\mathbb{R}^2) = \text{sp}\{(1, 0, f_x(x_0, y_0)), (0, 1, f_y(x_0, y_0))\}$

Jvf. bm. s. 84 i Do Carmo og (*) fås: $F(\mathbb{R}^2) = T_{p_0}(P)$

2.4.8

Lad $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ betegne en lineær afb. og $S \subseteq \mathbb{R}^3$ betegne en reg. flade således, at $L(S) \subseteq S$ (dvs. S er invariant under L)

Påstand: $L|_S$ er en differentiable afb. (se s. 73 i Do Carmo)

$$\forall p \in S, w \in T_p(S): dL_p(w) = L(w)$$

Bevis:

Lad $p \in S$ være givet.

Lad $x_1: U_1 \text{ åben} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V_1 \subseteq S$

$x_2: U_2 \text{ åben} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V_2 \subseteq S$

betegne kort på S således at $p \in V_1$, $L(p) \in V_2$ (husk $L(S) \subseteq S$)

Jvf. Do Carmo skal vise, at $x_2^{-1} \circ L \circ x_1: U_1 \rightarrow U_2$ er diff i $x_1^{-1}(p)$.

Da L er lineær og dermed diff. på hele $\mathbb{R}^3$ og da x_1, x_2^{-1} er diff. følger det enskede af kæderegen. (se ex. 3 s. 74 i Do Carmo)

Lad $w \in T_p(S)$ være givet. Jvf. prop. 1 s. 83 i Do Carmo kan vi vælge $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$, $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$.

Jvf. prop. 2 s. 84 i Do Carmo skal vi vise, at $\frac{d}{dt} L(\alpha(t)) \Big|_{t=0} = L(w)$

$$\frac{d}{dt} L(\alpha(t)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \alpha(t) \right) \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \alpha'(t) = L(w)$$

□

$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ betegner matrixrepresentationen for L (alle indg. størrelser er reelle konst)

2.4.9

Definer $\underline{x}:]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \setminus \{0\} =: U \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$a \in \mathbb{R}, a \neq 0: \forall (u, v) \in U \quad \underline{x}(u, v) = (v \cdot \cos(u), v \sin(u), a \cdot u)$$

Det er klart, at $\underline{x}$ er $C^\infty(U)$

Lad $(x, y, z) \in \underline{x}(U)$ være givet.

$$\text{Sæt } u = \frac{z}{a} \text{ (husk } a \neq 0) \text{ og } v = \begin{cases} y/\sin(u), & u \neq \pi \\ -x, & u = \pi \end{cases} \quad (|v| = \sqrt{x^2 + y^2})$$

Vi ser, at $\underline{x}(u, v) = (x, y, z)$, dvs. $\underline{x}$ er bijektiv.

$$\text{Lad } q = (u, v) \in U. \quad d\underline{x}_q = \begin{pmatrix} -v \cdot \sin(u) & \cos(u) \\ v \cdot \cos(u) & \sin(u) \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

$$-a \cdot \sin(u) \neq 0, u \neq \pi; -v \neq 0, u = \pi \quad (\text{da } (\pi, 0) \notin U)$$

Dvs. at $d\underline{x}_q$ er injektiv.

Af prop. 4 s. 64: De Carrio + def. 2.12 NZ følger, at $\underline{x}(U)$ er en regulær flade.

Lad $(u_0, v_0) \in U$

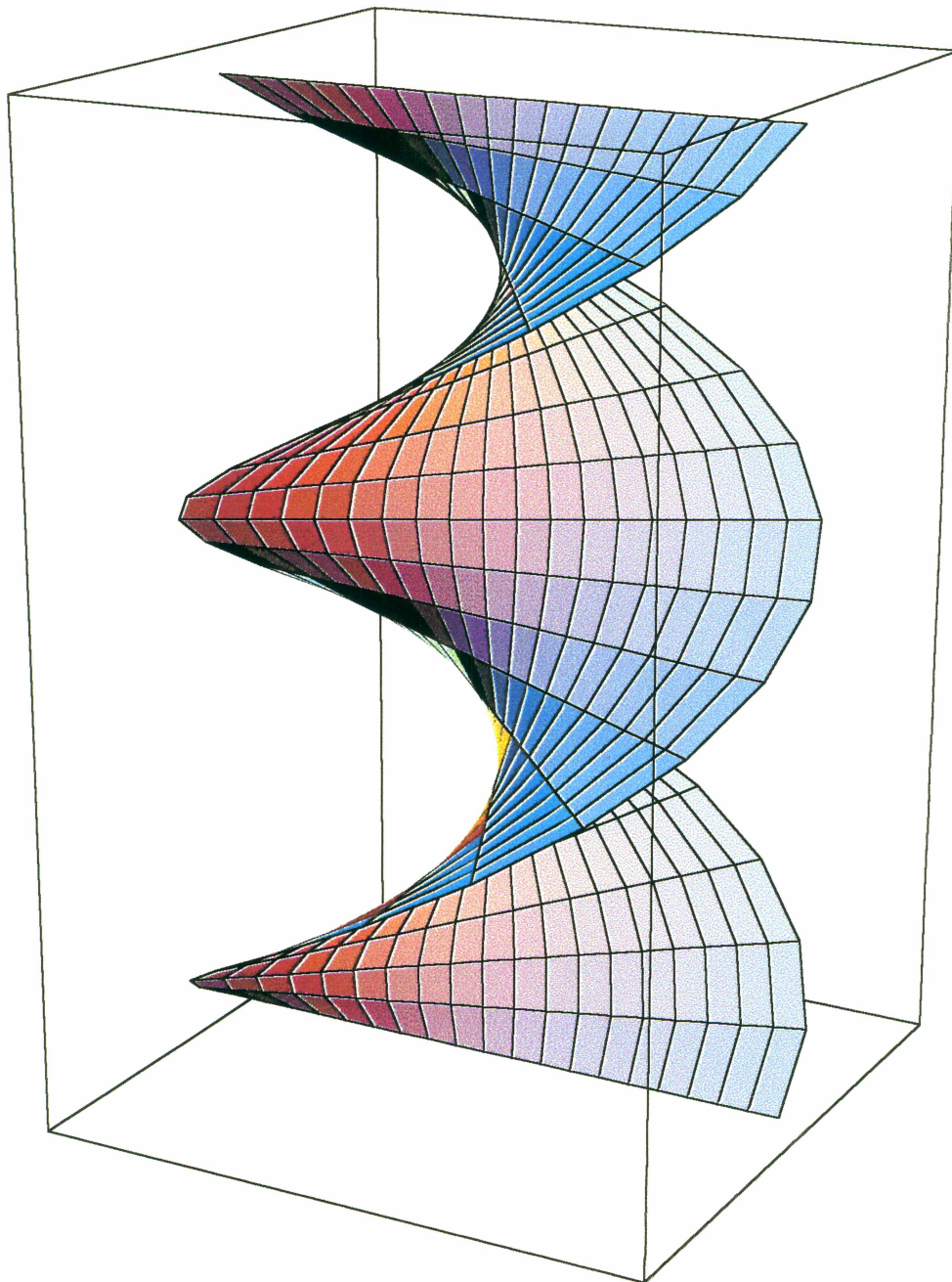
$$N(u_0, v_0) := \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} (u_0, v_0) \right|^{-1} \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} (u_0, v_0) \right)$$

↑
se s. 87 i DC

$$= \left| \begin{pmatrix} -v_0 \cdot \sin(u_0) \\ v_0 \cdot \cos(u_0) \\ a \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos(u_0) \\ \sin(u_0) \\ 0 \end{pmatrix} \right|^{-1} \left(\begin{pmatrix} -v_0 \cdot \sin(u_0) \\ v_0 \cdot \cos(u_0) \\ a \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos(u_0) \\ \sin(u_0) \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left| \begin{pmatrix} -a \cdot \sin(u_0) \\ a \cdot \cos(u_0) \\ -v_0 \end{pmatrix} \right|^{-1} \begin{pmatrix} -a \cdot \sin(u_0) \\ a \cdot \cos(u_0) \\ -v_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + v_0^2}} \begin{pmatrix} -a \cdot \sin(u_0) \\ a \cdot \cos(u_0) \\ -v_0 \end{pmatrix}$$


```
ParametricPlot3D[{v*Cos[u],v*Sin[u], u}, {v, -2,2},  
{u, 0, 2*Pi}, Axes -> False,  
ViewPoint->{1.540,-2.843,0.997}]
```



(opg. 2.2.16)

Jeg benytter mig af symbolerne/def. introduceret i opg. teksten. ✓

a)

Vi skal finde skæringspunktet mellem $S^2 \sim \{N\}$ og linien, l med retn.vektor $(-u, -v, 2)$ og 'begyndelsespkt.' $(u, v, 0)$.

Dvs. der eksisterer et $t \in \mathbb{R}$ således at skæringspkt.'et, (x, y, z)

opfylder $x = u - tu, y = v - tv, z = 2t$ (*)

og $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ (†)

Regne, regne, regne...

$$x^2 = (u - tu)^2 = (1-t)^2 u^2, y^2 = (1-t)^2 v^2$$

Der indsat i (†) giver $(1-t)^2(u^2 + v^2) + (2t-1)^2 = 1$

⇓ (løsn. $t=1$ forkastes idet denne værdi svarer til $(x, y, z) = N$)

$$\frac{(1-t)^2(u^2 + v^2) + (2t-1)^2 - 1}{(1-t)} = 0$$

⇓

$$(1-t)(u^2 + v^2) - 4t = 0$$

$$((2t-1)^2 - 1 = 4t(t-1))$$

⇓

$$-t(u^2 + v^2 + 4) = -u^2 - v^2$$

⇓

$$t = \frac{u^2 + v^2}{u^2 + v^2 + 4}, \text{ svarende til (jvf. *)} \quad \checkmark$$

$$x = (1-t)u = \left(\frac{4}{u^2 + v^2 + 4}\right)u = \frac{4u}{u^2 + v^2 + 4} \quad \checkmark$$

$$y = (1-t)v = \frac{4v}{u^2 + v^2 + 4} \quad \checkmark \quad \text{sammt} \quad z = 2t = \frac{2(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 4} \quad \checkmark$$

b)

$$\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = \frac{(-4)(u^2 - v^2 - 4)16v - 16u(-8)uv}{(u^2 + v^2 + 4)^4} = 64 \frac{4u^2 - (u^2 - v^2 - 4)}{(u^2 + v^2 + 4)^4} \cdot v$$

$$\text{Vi ser, at } \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = 0 \iff v = 0 \quad \checkmark \quad (\text{idet } u^2 \neq -\frac{(v^2 + 4)}{3})$$

$$\text{Tilsvarende f\u00e5s at } \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = 0 \iff u = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \frac{(-4)(u^2 - v^2 - 4)(-4)(v^2 - u^2 - 4) - (-8)uv(-8)uv}{(u^2 + v^2 + 4)^4} \\ &= \frac{16(u^2 - v^2 - 4)(v^2 - u^2 - 4) - 64u^2v^2}{(u^2 + v^2 + 4)^4} \end{aligned}$$

$$\text{Da } \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(0, 0) = \frac{16 \cdot 16}{4^4} \neq 0 \quad \text{ses at}$$

$$\nexists (u, v) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = 0$$

Af betragtningerne s. 54 i Do Carmo har vi, at differentiallet af π^{-1} er injektivt p\u00e5 $\mathbb{R}^2$. ✓ Godt!

Dvs. π^{-1} opfylder betingelse 3 i def. 2.12 (NZ)

Af konstruktionen af π^{-1} og udreg. i a) f\u00f8lger at π^{-1} er p\u00e5 og 1-1, dvs. bijektiv. OK

π^{-1} er glat og dermed specielt kontinuert p\u00e5 $\mathbb{R}^2$. ✓

π er pr. konstruktion kont. (E.s.-arg. gives nemt)

Vi kan j\u00f8f. def. 2.9. konkludere, at π^{-1} er en homeomorfi 2/3

$$\pi^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 - \{N\}$$

Dos, π^{-1} opfylder betingelse 2 i def. 2.12 (N2);
endvidere er det klart at $\pi^{-1} \in \overset{\text{er differentiable eller } C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)}{\cancel{C^\infty(\mathbb{R}^2)}}$ og at
 π^{-1} dermed opfylder betingelse 1 i def. 2.12 (N2).

Vi kan konkludere, at π^{-1} er et kort på S^2 . ✓

Af symmetribetrægtninger omkring planet gennem
 $(0,0,1)$ med normalvektor $(0,0,1)$ ses, at vi tilsvarende
kan definere et kort σ på S^2 , der dækker $S^2 \setminus \{(0,0,0)\}$. ✓

Der er klart at π^{-1}, σ tilsammen dækker S^2 ,
af def. 2.12 (N2) kan vi derfor konkludere, at
 S^2 er en regulær flade. ✓

Genkendt $25/3 - 92$ 54H



9. marts 1998

Geometri 1.

UGESEDDER NR. 6

Forelæsningerne d. 12. og 13. Marts.

Vi blev færdig med N2 og afsnit 2 – 2 i sidste uge og går nu videre med afsnit 2 – 3 i do Carmo. Igen på basis af N2 er do Carmos bevis helt ok. Vi beviser første proposition 1 om differentiabilitet af skift af koordinater. Denne proposition danner basis for definitionerne i afsnit 2 – 3 om differentiabilitet af afbildninger defineret på en regulær flade.

I dette afsnit indføres også begrebet en *regulær kurve*, som en delmængde af det 3-dimensionale euclidiske rum som lokalt er en parametriseret regulær kurve. I analogi hermed definere vi en *parametriseret regulær flade* og viser at den lokalt i parameterområdet definere en regulær flade (se definition 2 og proposition 2 i afsnit 2 – 3).

I afsnit 2 – 4 skal vi definere *tangentplanet* til en regulær flade i et vilkårligt punkt på fladen. Tangentplanet giver os mulighed for at definere *differentialet* af en differentiabel afbildning defineret på en flade.

I næste uge gøre vi afsnit 2 – 4 færdig og fortsætter med afsnit 2 – 5.

Øvelsesopgaver 16. – 20. Marts:

Øvelse 2.4 og 2.5 fra N2, 2.2.10, 2.2.13, 2.2.15, 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3

Der er en ny version af noten N2 på kursets hjemmesiden, hvor øvelse 2.4 og 2.5 er påført. Endvidere er Øvelse 2.4 og 2.5 fra N2 gengivet på bagsiden af denne ugeseddel.

Afleveringsopgaver 16. – 20. Marts:

2.2.16

Jørgen Ellegaard Andersen

The election is on. The right choice is however obvious: Math!

Øvelse 2.4

Ø6

Lad X være en vilkårlig delmængde af $\mathbb{R}^n$ og Y en vilkårlig delmængde af $\mathbb{R}^m$ og lad $f : X \rightarrow Y$ være en kontinuert afbildning. Bevis at hvis U er en åben delmængde i Y , så er $f^{-1}(U)$ en åben delmængde i X .

Øvelse 2.5

Ø6

Lad S være en regulær flade og lad $x : U \rightarrow S$ være et kort på S . Lad $U' \subset U$ være åben. Vis at da er $x(U') \subset S$ åben i S .

Geometri 1, TØ nr. 6

øvelse 2.4, N2

$X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: X \rightarrow Y$, f er kont.

Påstand:

$$U \text{ åben i } Y \implies f^{-1}(U) \text{ er åben i } X$$

Bevis:

Antag at U er åben i Y

Lad $q \in f^{-1}(U)$, $p = f(q)$

Da U er åben i Y $\exists \varepsilon > 0 : b(p, \varepsilon) \cap Y \subseteq U$ (jf def. 2.11 N2)

f er kont., dvs. $\exists \delta > 0 : f(b(q, \delta) \cap X) \subseteq b(p, \varepsilon) \cap Y \subseteq U$ (husk $f: X \rightarrow Y$)

Dvs. $b(q, \delta) \cap X \subseteq f^{-1}(U)$

q var vilk. dvs. $\forall q \in f^{-1}(U) \exists \delta_q > 0 : b(q, \delta_q) \cap X \subseteq f^{-1}(U)$

Af def. 2.11. følger, at $f^{-1}(U)$ er åben i X $\square$

øvelse 2.5, N2

S betegner en reg. flade

Lad $\underline{x}: U \text{ åben} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ betegne et kort på S

Påstand: $\forall U' \subseteq U, U' \text{ åben i } \mathbb{R}^2: \underline{x}(U') \subseteq S$ er åben i S

Bevis:

Sæt $W = \underline{x}(U')$, Bm $\underline{x}^{-1}(W) = \underline{x}^{-1}(\underline{x}(U')) = U'$ ($\underline{x}$ bijektiv jvf. def. 2.11 N2)

Lad $y: V \rightarrow S$ betegne et vilk. andet kort på S som rammer W .

Ifølge Prop. 1 s. 70 i Do Carmo er $y^{-1}(W), U'$ diffeomorfe

Af def. på diffeomorfi og jvf. egenskaberne ved kont. fkt.

ser vi, at $y^{-1}(W)$ er en åben delmængde af $\mathbb{R}^2$, da U' er åben.

Det gælder altså, at for vilk. kort på S som rammer W , y at $y^{-1}(W)$ er åben delmængde af $\mathbb{R}^2$. Det ønskede følger af proposition 2.13 N2.

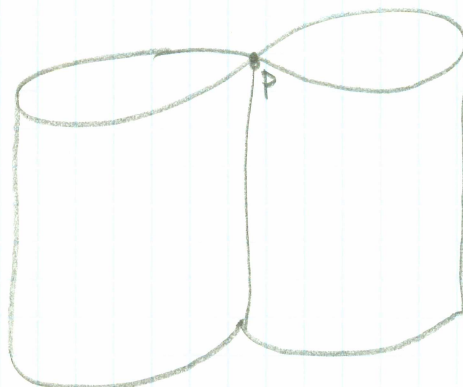
□

2.2.10

S (def. i opgaveformuleringen) er ikke en reg. flade...

Antag, at S er en reg. flade

Lad p være som anført
på tegn. Ifølge prop. 3 s. 63
i Do Carmo eksisterer der
en åben omegn af p i S ,
som vi vil kalde V ,



således, at V er grafen for en differentiabel funktion defineret
på projektionen af V på enten x - y , x - z el y - z planet.

Men ingen af disse tre projektioner er injektive (klart ud fra
def. af S) og f kan således ikke være veldefineret $\underline{\underline{u}}_{\Sigma}$

2.2.13

Et atlas for $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = 1 + x^2 + y^2\}$ består af kortene

$$\underline{x}_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow H \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2: \quad \underline{x}_1(x, y) = (x, y, \sqrt{1+x^2+y^2})$$

$$\underline{x}_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow H \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2: \quad \underline{x}_2(x, y) = (x, y, -\sqrt{1+x^2+y^2})$$

(Dette følger af beviset for prop. 1 s. 58 i Do Carmo)

Da Carmo foreslår følgende korttype... $x(u, v) = (\sinh u \cdot \cos v, \sinh u \cdot \sin v, \cosh v)$

2.2.15

Påstand:

Lad $a \neq 0 \in \mathbb{R}$ være givet

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y(x-a) + zx = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = u \cdot a + a, y = ut + t, z = -u \cdot t, u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+\} =: B$$

Bevis:

' $\supseteq$ '

Lad $(x, y, z) \in B$ være givet

$$\begin{aligned} y(x-a) + z \cdot x &= (ut+t)(u \cdot a + a - a) - u \cdot t(u \cdot a + a) \\ &= t(u+1)u \cdot a - u \cdot t(u+1) \cdot a = 0 \end{aligned}$$

' $\subseteq$ '

Lad $(x, y, z) \in A$ være givet, dvs. $y(x-a) + zx = 0$ (*)

Vi skal vise, at $\exists u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+ : x = u \cdot a + a, y = ut + t, z = -u \cdot t$

$$\text{Sæt } u = \frac{x}{a} - 1, t = -\frac{z}{u}, u \neq 0, t = y, u = 0$$

Det er klart, at med disse valg er $x = u \cdot a + a$

$$(*) \Rightarrow y(u \cdot a) + z(u \cdot a + a) = u \cdot a \cdot (y + z) + a \cdot z = 0$$

Vi ser, at hvis $u = 0$ er $z = 0$ (indtreffer for $x = a$, husk $a \neq 0$)

Dvs., at $z = -u \cdot t$

$$(*) \Rightarrow y(u \cdot a) - u \cdot t(u \cdot a + a) = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{u \cdot t \cdot a(u+1)}{u \cdot a} = ut + t, u \neq 0, \text{ da } t = y, u = 0 \text{ f\u00f8s}$$

$$y = ut + t$$

□

2.3.1

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$$A: S^2 \rightarrow S^2 \quad \forall (x, y, z) \in S^2: A(x, y, z) = (-x, -y, -z)$$

Påstand: A er en diffeomorphi

Bewis:

Jvf. Do Carmo s. 74 skal vi vise, at A er differentiabel og A^{-1} er differentiabel.

$$\text{Definer } \tilde{A}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3: \tilde{A}(x, y, z) = (-x, -y, -z)$$

Det er klart, at $\tilde{A} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ og at $\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}$, dvs. at $\tilde{A}^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Af Ex. 3 s. 74 i Do Carmo følger, da $A = \tilde{A}|_{S^2}$, at $A \in C^\infty(S^2, S^2)$.

Bm. at $A^{-1} = A$ helt analogt med ovenstående har vi derfor (da $A^{-1} = \tilde{A}^{-1}|_{S^2}$) at $A^{-1} \in C^\infty(S^2, S^2)$.

□

2.3.2

$S \subseteq \mathbb{R}^3$ betegner en regulær flade

Definer $\pi: S \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \forall p = (p_1, p_2, p_3) \in S: \pi(p) = (p_1, p_2, 0)$

$$\tilde{\pi}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3: \tilde{\pi}(x, y, z) := (x, y, 0)$$

Det er klart, at $\tilde{\pi} \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, da $\pi = \tilde{\pi}|_S$ følger af

Ex. 1 s. 72 i Do Carmo, at π er $C^\infty(S, \mathbb{R}^3)$

2.3.3

Påstand:

$P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$ er diffeomorf med $R^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$

Bevis:

Det er klart, at P og R^2 er regulære flader.

Definer $\tilde{\pi}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^3: \tilde{\pi}(x, y, t) = (x, y, x^2 + y^2 + t)$

Vi ser, at $\tilde{\pi}$ er $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, samt at $\tilde{\pi}^{-1}$ eksisterer og er givet ved følgende udtryk $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3: \tilde{\pi}^{-1}(x, y, z) = (x, y, z - x^2 - y^2)$.

Det er klart, at $\tilde{\pi}^{-1}$ er $C^\infty(\mathbb{R}^3)$

Bm. at $\tilde{\pi}(R^2) = P$, $\tilde{\pi}^{-1}(P) = R^2$ (samt at $\tilde{\pi}|_{R^2}$ er bijektiv)

Af Ex. 1 s. 72 i Do Carmo følger, at $\tilde{\pi}|_{R^2}$ er $C^\infty(R^2, P)$ samt at $\tilde{\pi}^{-1}|_P$ er $C^\infty(P, R^2)$.

Dos. $\pi := \tilde{\pi}|_{R^2}: R^2 \rightarrow P$ er en diffeomorfi mellem R^2 og P

□

(opg. 2.2.7)

1)

Definer $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ $f(x, y, z) := (x + y + z - 1)^2$

Vi ser, at $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ ✓

a)

$$f_1(x, y, z) = f_2(x, y, z) = f_3(x, y, z) = 2(x + y + z - 1)^2$$

Vi ser, at $f_1(x, y, z) = f_2(x, y, z) = f_3(x, y, z) = 0$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) \in P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$$

(P er planet gennem (0, 0, 1) med normalvektor (1, 1, 1)) ✓

Juf. overvejelserne s. 59 i Do Carmo og def. 2 s. 58 i Do Carmo
er P mængden af kritiske punkter for f.

Tillige ser vi, at f har en kritisk værdi nemlig $f(P) = 0$. ✓

b) Af ovenstående og proposition 2 s. 59 i Do Carmo

følger, at $f(x, y, z) = c$ er en regulær flade

for $c \in]0, \infty[$ (da $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$)

formelt for

$c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

men $f^{-1}(c) \neq \emptyset$

$\forall c > 0$

Endvidere ser vi, at $f(x, y, z) = 0$ er planet
 $x + y + z = 1$, der juf. proposition 1 er en regulær flade
(betragt $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $z = f(x, y) = 1 - x - y$) ✓ Guld

Dvs. $f(x, y, z) = c$ er en regulær flade for $c \in]0, \infty[$. ✓

(Egentlig

2)

Definer: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$: $f(x, y, z) := xyz^2$

Vi ser, at $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ ✓

a)

$$f_1(x, y, z) = yz^2, \quad f_2(x, y, z) = xz^2, \quad f_3(x, y, z) = 2xyz$$

Vi ser, at $f_1(x, y, z) = f_2(x, y, z) = f_3(x, y, z) = 0$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) \in Q := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \vee (x = 0 \wedge y = 0)\}$$

Jf. overvejelserne s. 59 i Do Carmo og def 2 s. 58 i Do Carmo er Q mængden af kritiske punkter for f , og f har en kritisk værdi nemlig $f(Q) = 0$. ✓

b)

Af ovenstående (bl.a. at $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$) og prop. 2 s. 59 i Do Carmo følger at $f(x, y, z) = c$ er en regulær flade for $c \in]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$ ✓

Bemærk $f^{-1}(0)$ er i dette tilfælde ikke en regulær flade. (F.eks. følger dette af prop. 3 s. 63)

Godt nok $\frac{18}{3} = 6$ skt



2. marts 1998

Geometri 1.

UGESEDDER NR. 5

Forelæsningerne d. 5. og 6. Marts.

Vi gennemgår resten af noten N2 og begynder så med do Carmo Kapitel 2.

Vi vil gennemgå definitionen af en regulær flade (som i N2.) igen og se et par eksempler på regulære flader. Dernæst gennemgår vi så proposition 1., definition 2. og proposition 2., 3. og 4. som i do Carmo afsnit 2 – 2, med do Carmo's beviser. På baggrund af N2 er det faktisk muligt at forstå do Carmo's bevis for alle propositionerne også beviset for proposition 4!

Derefter går vi videre med afsnit 2 – 3 i do Carmo og beviser proposition 1 om differentiable skift af koordinater. Igen på basis af N2. er do Carmo's bevis helt ok. Denne sætning danner basis for definitionerne i afsnit 2 – 3 om differentierbarhed af afbildninger defineret på en regulær flade. I næste uge forsætter vi gennemgangen af afsnit 2 – 3 og går videre med afsnit 2 – 4.

Øvelsesopgaver 9. – 13. Marts:

Ikke gennemgåede øvelser fra forrige ugesedler samt Øvelse 2.2 og 2.3 fra N2 og 2.2.5., 2.2.8., 2.2.11.

Afleveringsopgaver 9. – 13. Marts:

2.2.7.

Jørgen Ellegaard Andersen

Geometry is smooth!

Geometri 1, TØ nr. 5

øvelse 2.2, N2

Påstand:

$$\forall X \subseteq \mathbb{R}^n:$$

1) $\emptyset$ og X er åbne i X

2) $\forall U_1, \dots, U_n$ åbne i X : $\bigcap_{i=1}^n U_i$ er åben i X

3) $\forall U_1, U_2, \dots$ åbne i X : $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ er åben i X

Beweis:

1)

$$X \cup \emptyset = X, \text{ dvs. } \emptyset \subseteq X$$

Da, $\forall p \in \emptyset \exists V \subseteq \mathbb{R}^n$, V åben omegn af p : $V \cap \emptyset = \emptyset \subseteq X$ trivielt er opfyldt, følger af def. 2.11 N2, at $\emptyset$ er åben i X .

Lad $p \in X$, da $b(p, r > 0)$ er en åben omegn af p i $\mathbb{R}^n$ og da $b(p, r > 0) \cap X \subseteq X$, samt at $X \subseteq X$ (trivielt) følger af def 2.11 N2, at X er åben i X .

2)

Lad $U_1, \dots, U_n$ åbne i X være givet.

$$U_1, \dots, U_n \text{ åbne i } X \xRightarrow{\text{def. 2.11 N2}} \forall i \in \{1, \dots, n\}: U_i \subseteq X \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \subseteq X$$

Lad $p \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ være givet. Da $U_1, \dots, U_n$ åbne i X gælder (def. 2.11. N2), at der eksisterer åben omegne af p i $\mathbb{R}^n$, $V_1, \dots, V_n$ således at

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: V_i \cap X \subseteq U_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n V_i \cap X \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i$$

Da en endelig foreningsmængdedannelse af åbne mæng. er åben, ser vi, at $\bigcap_{i=1}^n U_i$ er en åben omegn af p .

Konklusion: Vi ser, at def. 2.11. N2 er opfyldt for $W = \bigcap_{i=1}^n U_i$.

3)

Lad $U_1, U_2, \dots$ åbne i $\mathbb{R}^n$ være givet

$$U_1, U_2, \dots \text{ åbne i } \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{def. 2.11.12}} \forall n \in \mathbb{N} : U_n \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \subseteq \mathbb{R}^n$$

Lad $p \in \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ være givet.

Dvs. $\exists i \in \mathbb{N} : p \in U_i$

Jvf. def. 2.11.12 eksisterer der en åben omegn af p i $\mathbb{R}^n$, V således at

$V \cap \mathbb{R}^n \subseteq U_i$. Men $U_i \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ og vi ser, at 2.11.12 er opfyldt

for $W = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$

□

Øvelse 23

Påstand:

$$\forall \mathcal{X} \text{ åben} \subseteq \mathbb{R}^n, W \subseteq \mathcal{X} : W \text{ åben i } \mathcal{X} \iff W \text{ åben}$$

Beweis:

' $\implies$ ':

Lad $\mathcal{X}$ åben $\subseteq \mathbb{R}^n$, $W \subseteq \mathcal{X}$ åben i $\mathcal{X}$ være givet

Lad $p \in W$ være givet.

Da W er åben i $\mathcal{X}$ eksisterer der jvf. def. 2.11 NZ en åben omegn af p i $\mathbb{R}^n$, V således, at $V \cap \mathcal{X} \subseteq W$.

Da $V, \mathcal{X}$ er åbne delmængder af $\mathbb{R}^n$ er $V \cap \mathcal{X}$ en åben delmængde af $\mathbb{R}^n$

Da $p \in V \cap \mathcal{X} \subseteq W \exists r > 0 : b(p, r) \subseteq V \cap \mathcal{X} \subseteq W$, men det vil jo netop sige, at W er åben.

' $\impliedby$ ':

Lad $\mathcal{X}, W$ være åbne delmængder af $\mathbb{R}^n$ således, at $W \subseteq \mathcal{X}$.

Lad $p \in W$ være givet.

Da W er en åben delmængde af $\mathbb{R}^n \exists r > 0 : b(p, r) \subseteq W$

$b(p, r)$ er specielt en åben omegn af p i $\mathbb{R}^n$.

$$b(p, r) \cap \mathcal{X} = b(p, r) \subseteq W \quad (\text{da } b(p, r) \subseteq W \subseteq \mathcal{X})$$

Dvs. W opfylder def. 2.11. NZ

□

2.2.5

$$P := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \}, \quad U := \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > v \}$$

$$\underline{x}: U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \forall (u, v) \in U := (u+v, u+v, u \cdot v)$$

Påstand: $\underline{x}$ er et kort på P

Bevis:

Vi har tidl. bm. at ethvert plan er en reg. flade, dvs. P er en reg. flade.

Ved at betragte $(u, v) \mapsto u+v$, $(u, v) \mapsto u \cdot v$ overbevises man om, at

$\underline{x}(U) \subseteq P$ er åben i P . Det er klart, at $\underline{x}$ er af klasse C^∞ .

At $\underline{x}$ er injektiv følger af dette argument...

Lad $(x, y, z) \in \underline{x}(U)$ være givet,

Dvs. $\exists (u, v) \in U : \underline{x}(u, v) = (x, y, z)$:

$$x = u+v, \quad z = u \cdot v \implies x = \frac{z}{u} + v \wedge x = \frac{z}{v} + u$$

$$\implies v^2 - xv + z = 0 \wedge u^2 - xu + z = 0$$

Da $u > v \implies (u-v)^2 > 0 \implies (x^2 - 4z) > 0$ har disse to (identiske)

lign. to løsn. Krævet om at $u > v$ giver dermed

$$u = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4z}}{2} \quad \text{og} \quad v = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4z}}{2}$$

$\forall p = (u, v) \in U : d\underline{x}_p$ er injektiv, dette følger af dette argument...

Lad $p = (u, v) \in U$ være givet

$$d\underline{x}_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ v & u \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ v & u \end{vmatrix} = u - v > 0 \text{ det ønskede følger jvf. bm s. 54}$$

Af prop. 4 s. 64 i Do Carmo samt def. 2.12 NZ følger, at

$\underline{x}$ er et kort på P

□

2.2.8

Påstand:

Lad $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ betegne et kort på en reg. flade

$\forall q = (u, v) \in U: dx_q$ er injektivt $\iff \frac{\partial x}{\partial u} \wedge \frac{\partial x}{\partial v} \neq 0$

Bevis:

Dette følger direkte af prop. 3 s.13 i Do Carmo samt de relevante definitioner. $\square$

22.11

Påstand: $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2\}$ er en regulær flade

Bevis:

Definer $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2: f(x,y) := x^2 - y^2$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

Da grafen for f er S , følger det ønskede af proposition 1, s. 58 i Do Carmo. $\square$

Påstand:

$$x_1(u,v) := (u+v, u-v, 4uv), (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

$$x_2(u,v) := (u \cdot \cosh v, u \cdot \sinh v, u^2), (u,v) \in \mathbb{R}^2, u \neq 0$$

x_1, x_2 er kort på S .

Bevis:

Da $(u+v)^2 - (u-v)^2 = 4uv$ ser vi, at $x_1(\mathbb{R}^2) \subseteq S$

Det er klart, at $x_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

x_1 er injektiv, da $\forall (x,y,z) \in x_1(\mathbb{R}^2)$:

$$u = \frac{x+y}{2}, \quad v = \frac{z}{2(x+y)}$$

$$\forall p = (u,v) \in \mathbb{R}^2: dx_{1p} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4v & 4u \end{pmatrix}, \text{ da } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ ser vi,}$$

jvf. bm. s. 54 i Do Carmo, at dx_{1p} er injektiv.

Da $x_1(\mathbb{R}^2)$ yderligere er åben i S fås af prop. 4 s. 64 i Do Carmo, at x_1 er et kort på S .

$$\text{Da } u^2 \cdot \cosh^2 v - u^2 \cdot \sinh^2 v = u^2 (\cosh^2 v - \sinh^2 v) = u^2$$

ser vi, at $\chi_2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \subseteq S$, $\chi_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u=0\})$

χ_2 er injektiv, da $\forall (x,y,z) \in \chi_2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u=0\})$

$$v = \operatorname{arctanh}\left(\frac{y}{x}\right), u = \frac{x}{\cosh v}$$

$$\forall p=(u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : d\chi_p = \begin{pmatrix} \cosh v & u \cdot \sinh v \\ \sinh v & u \cdot \cosh v \\ 2u & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Da } \begin{vmatrix} \sinh v & u \cdot \cosh v \\ 2u & 0 \end{vmatrix} = 2u^2 \cdot \cosh v > 0 \quad (u \neq 0, \cosh > 0)$$

følger af bm. s. 54 i Do Carmo, at $d\chi_p$ er injektiv.

Yderligere har vi, at $\chi_2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \neq 0\})$.

Af prop. 4 s. 64 i Do Carmo følger, at χ_2 er et kort på S

□

χ_1 dækker $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2, x+y \neq x-y\}$

χ_2 dækker $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2, x \neq 0, z > 0\}$

(opg. 2.2.2)

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

Påstand: C er en regulær flade

Bevis:

Metode 1:

$$f(x, y, z) := x^2 + y^2 - 1, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad (f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R})$$

$$f_1(x, y, z) = 2x, \quad f_2(x, y, z) = 2y, \quad f_3(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$f_1(x, y, z) = f_2(x, y, z) = f_3(x, y, z) = 0 \iff x = y = 0 \quad (z \text{ vilkårlig})$$

Af def. 2 s. 58 + 'overvejelserne' s. 58-59 i Do Carmo følger, at $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}$ er mængden af kritiske punkter for f samt at f har en kritisk værdi, nemlig -1 .
Af def 2 følger heraf, at 0 er en regulær værdi af f .

Da $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ og 0 er en regulær værdi af f følger af proposition 2 s. 59 i Do Carmo, at $f^{-1}(0)$ er en regulær flade i $\mathbb{R}^3$.

$$f^{-1}(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} = C \quad \square$$

Færdig!

Metode 2 (der tillige giver et sæt af kort, som dækker C)

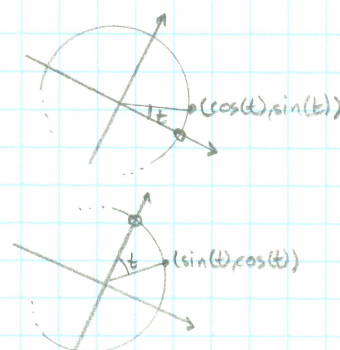
Definer

$$X_1, X_2:]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(t, z) \in]0, 2\pi[\times \mathbb{R}: \quad (\text{bm } \mathbb{R} \text{ åben})$$

$$X_1(t, z) := (\cos(t), \sin(t), z)$$

$$X_2(t, z) := (\sin(t), \cos(t), z)$$



$$\frac{\partial(\cos(t), \sin(t))}{\partial(t, z)} = \begin{vmatrix} -\sin(t) & 0 \\ \cos(t) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial(\sin(t), z)}{\partial(t, z)} = \begin{vmatrix} \cos(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos(t)$$

$$\frac{\partial(\cos(t), z)}{\partial(t, z)} = \begin{vmatrix} -\sin(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\sin(t)$$

$$\text{Bm. } \forall t \in \mathbb{R}: \cos(t) = \sin(t) = 0$$

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}: \frac{\partial(\sin(t), z)}{\partial(t, z)} = \frac{\partial(\cos(t), z)}{\partial(t, z)} = \frac{\partial(\cos(t), \sin(t))}{\partial(t, z)} = 0$$

Juf. 'observationerne' s. 54 i Do Carmo gælder dermed $\forall (t, z) \in]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$:
 $dx_1(t, z)$ er injektiv, dvs. X_1 opfylder betingelse 3 i def 2.12

$$\text{Idet } \frac{\partial(\sin(t), \cos(t))}{\partial(t, z)} = \frac{\partial(\cos(t), \sin(t))}{\partial(t, z)} = 0 \text{ følger, med}$$

en argumentation identisk med ovenstående, at X_2
opfylder betingelse 3 i def. 2.12 (N2)

Gælt!

Definer $U :=]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$

Lad $(x, y, z) \in X_1(U)$,

$$\text{Da er } x_1^{-1}(x, y, z) = \begin{cases} (\arccot(\frac{x}{y}), z), & \text{sign}(y) > 0 \\ (\pi, z), & x = -1, y = 0 \\ (\arccot(-\frac{x}{y}) + \pi, z), & \text{sign}(y) < 0 \end{cases}$$

Bm. $x_1^{-1} \in C^0(X_1(U))$

Lad $(x, y, z) \in X_2(U)$

$$\text{Da er } x_2^{-1}(x, y, z) = \begin{cases} (\arccot(\frac{x}{y}), z), & \text{sign}(y) > 0 \\ (\pi, z), & x = -1, y = 0 \\ (\arccot(-\frac{x}{y}) + \pi, z), & \text{sign}(y) < 0 \end{cases}$$

Benyt ellers
prop 4. do C 5.64
til at slutte
at x_1^{-1} og
 $x_2^{-1}: X_i(U) \rightarrow U$
er kontinuerte
af. de allerede
ved at C er
regulær flade

Vi ser, at $x_1^{-1} \in C^0(X_1(U))$ og $x_2^{-1} \in C^0(X_2(U))$ er kontinuerte
Normalt skriver man kun
 $C^k(U)$ for funktioner af klasse k fra U over i $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}$.
Da $x_1, x_2 \in C^0(U)$ og idet x_1, x_2 klart er bijektive afb.*
følger af ovenstående at x_1, x_2 opfylder def. 2.9 (N2) og
dermed er homeomorfier. ✓

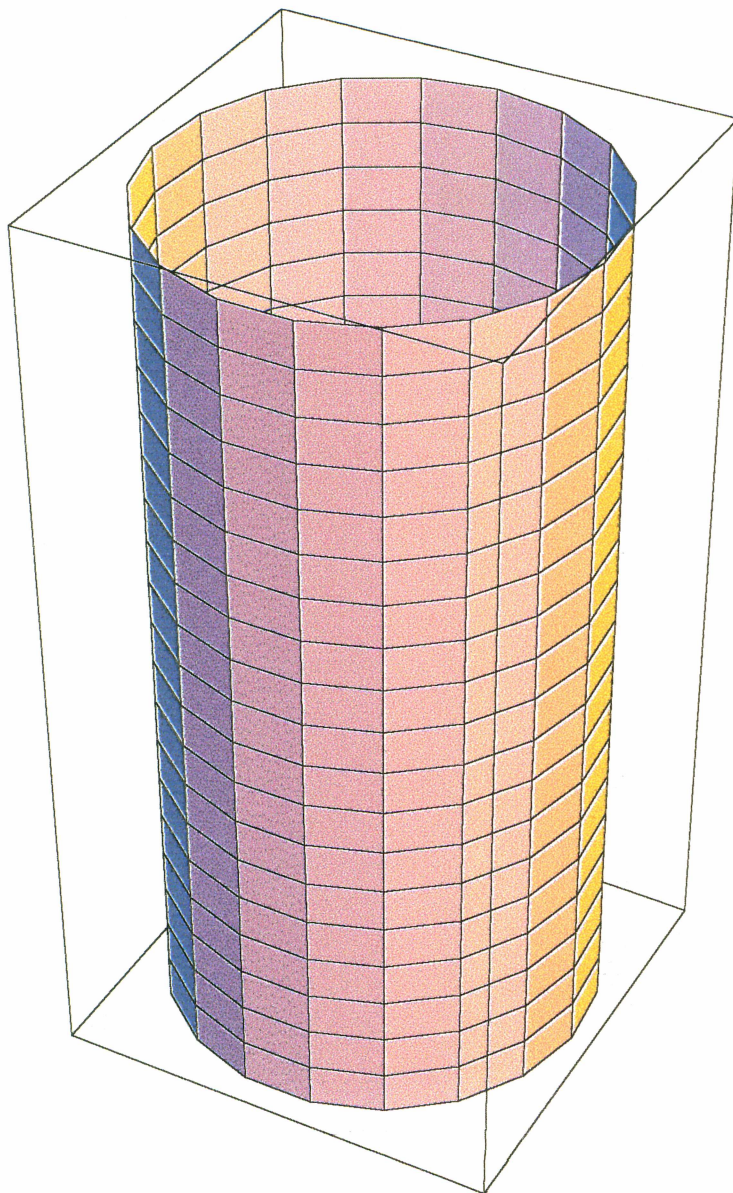
Dermed opfylder x_1, x_2 betingelse nr. 2 i def. 2.12 (N2);
endvidere er det klart, at $x_1, x_2 \in C^\infty(U)$ dermed
opfylder x_1, x_2 tillige betingelse nr. 1 i def. 2.12 (N2).

Da x_1, x_2 'dækker' C og U er åben får vi juf.
def. 2.12 (N2), at x_1, x_2 er kort der dækker C,
og at C dermed er en regulær flade. □

Fort! Gælder det 18/3 - 98 sket ✓

* Juf. egenskaber/definitioner for $x_1, x_2, x_1^{-1}, x_2^{-1}$


```
ParametricPlot3D[{Sin[t], Cos[t], z}, {t, 0, 2Pi},  
{z, -2, 2}, Axes -> False]
```





24. februar 1998

Geometri 1.

UGESEDDER NR. 4

Forelæsningerne d. 26. og 27. Februar.

Først vil jeg lige afslutte vores studie af kurver med en lille kort kommentar om knude-teori.

Derefter går vi videre med do Carmo Kapitel 2. Som indledning til det vil jeg dog først gennemgå et bevis for inversfunktionssætningen. Den bruges om og om igen i studiet af flader, så den er aldeles vigtig. Noterne N2 (beskrevet nedenfor) indeholder et bevis for denne sætning.

Definitionen af en regulær flade i afsnit 2 – 2 i do Carmo er på et bestemt punkt noget klodset. Vi vil derfor operere med en definition af en regulær flade som er identisk med do Carmo's på nær et lille punkt, nemlig betydningen af kontinuiteten af x^{-1} . Se bag på denne ugeseddel og sammenlign med definition 1 side 52 i do Carmo.

Efter vi har gennemgået definitionen af en regulær flade og set et par eksempler, gennemgår vi så proposition 1., definition 2. og proposition 2. og 3. som i do Carmo afsnit 2 – 2, med do Carmo's beviser. Derefter gennemgår vi beviset for proposition 4 i afsnit 2 – 2 med beviset fra noterne N2, idet beviset for proposition 4 i do Carmo ikke duer.

Det er nok tvivlsomt om vi når gennem hele afsnit 2 – 2 i denne uge. Ellers vil vi gøre det færdigt i næste uge og dernæst fortsætte med afsnit 2 – 3.

Supplerende noter om differentiable flader, N2.

Der vil snarest udkomme supplerende noter til do Carmo 2 – 2 i elektronisk form på hjemmesiden og i trykt form samme sted som ugesedlen foran Aud. D1.

Øvelsesopgaver 2. – 6. Marts:

1.5.7., 1.5.8., øvelse 1.4 og 1.5 fra N1., 2.2.2., 2.2.3., 2.2.4.

I øvelse 1.5 fra N1. forventes det ikke man kan besvare det afsluttende spørgsmål. Svaret på spørgsmålet vil heller ikke blive gennemgået medmindre nogen har fundet et smart argument!

Afleveringsopgaver 2. – 6. Marts:

2.2.1

Definition

Lad X være en vilkårlig delmængde af $\mathbb{R}^n$. Vi siger at en funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ er kontinuert i $x_0 \in X$, hvis og kun hvis

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta, x \in X \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Vi siger at f er kontinuert, hvis den er kontinuert i alle $x_0 \in X$.

Bemærkning

Lad U være en åben delmængde af $\mathbb{R}^n$. Hvis $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ er en kontinuert funktion og X er en vilkårlig delmængde af $\mathbb{R}^m$, da er det klart at $F|_{X \cap U} : X \cap U \rightarrow \mathbb{R}^m$ er kontinuert ifølge denne definition.

Vi vil bruge følgende definition for en *regulær flade*.

Definition

En delmængde $S \subset \mathbb{R}^3$ er en regulær flade hvis der for alle $p \in S$, findes en omegn V i $\mathbb{R}^3$ af p og en bijektiv afbildning $x : U \rightarrow V \cap S$, hvor $U \subset \mathbb{R}^2$ er åben, således at

- (1) Afbildningen x er differentiabel.
- (2) Afbildningen x er en homeomorfi. D.v.s. x og x^{-1} er kontinuerte.
- (3) (Regularitets betingelsen.) For alle $q \in U$ er differentiallet $dx_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ injektivt.

Bemærkning

Når man sammenligner denne definition med definitionen på en regulær flade i do Carmo definition 1, side 52, ses at de to definitioner er identiske på nær definitionen af kontinuiteten af x^{-1} . Det er klart at do Carmo's definition medfører denne definition. Vi skal ikke bekymre os om ækvivalensen af de to definitioner, men blot anvende den ovenforstående definition af en regulær flade gennem hele kurset. Jeg foreslår i retter definitionen i do Carmo til efter denne definition.

Jørgen Ellegaard Andersen

Math is the way to go!

EN LILLE NOTE OM KNUDER

af

JØRGEN ELLEGAARD ANDERSEN

1 Matematisk representation af knuder

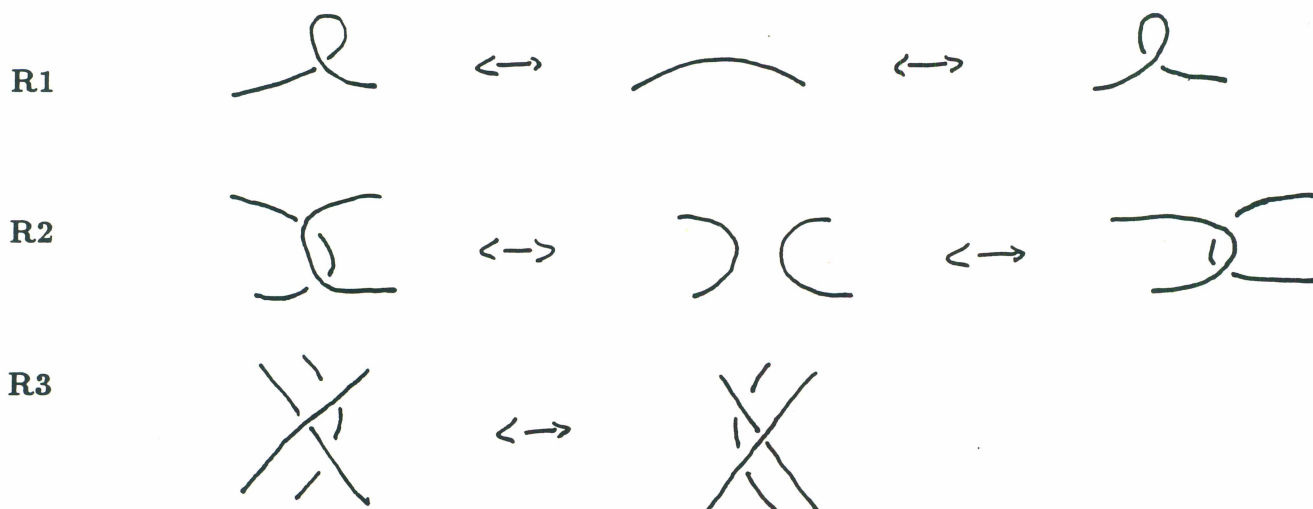
Det fysiske objekt vi ønsker at formaliserer, er en *knude* på en lukket snor, d.v.s. en knude bundet på et stykke snor, hvorefter enderne af snoren er blevet splejset sammen.

Den matematisk model vi vil benytte for dette fysiske objekt, en knude, er en plan projektion af knuden. hvorpå over- og under-krydsninger er indikeret, som i disse eksempler:

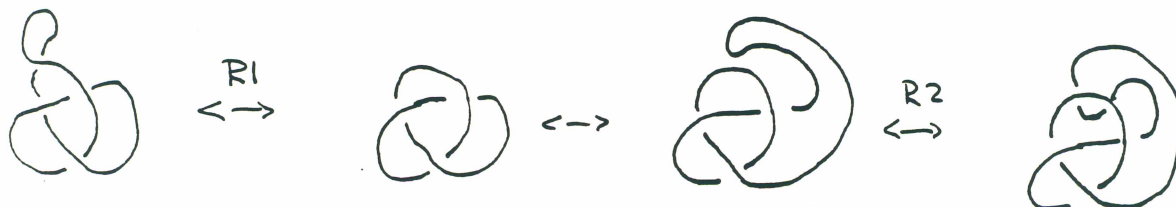


Disse plane projektioner af knuder kaldes *knudediagrammer*. Vi tillader også knuder bundet af mere end en snor, d.v.s. vi tillader også knudediagrammer, med mere end en *streng*, som indikeret ovenfor i eksemplerne. Endvidere kræve vi at der for hver enkelt streng i knudediagrammet er valgt en omløbsretning. Lad $\mathcal{K}$ betegne mængden af alle knudediagrammer.

- Hvis vi *deformerer* et knudediagram, ved at deformere de kurver som udgør knudediagrammet, uden at fjerne eller indføre nye over- eller under-krydsninger, så ændrer vi ikke på hvilken knude, diagrammet repræsenterer.
- Det er ligeledes klart, at hvis vi lokalt på et knudediagram foretager en af de *modifikationer*, som er tegnet nedenfor under R1, R2 og R3, så ændrer vi ikke på hvilken knude diagrammet repræsenterer.



Følgende er et eksempel på en sekvens af deformationer og modifikationer af typen R1, R2 og R3, som transformerer knudediagrammet til venstre over i knudediagrammet til højre. Alle disse diagrammer repræsenterer tydeligvis alle den samme knude.



Man kan bevise, at to knudediagrammer K_1 og K_2 repræsenterer den samme knude, hvis og kun hvis der findes en sekvens af *deformationer* og *modifikationer* af typen R1, R2 eller R3 hvorved K_1 transformeres over i K_2 . Dette resultat er en klassisk sætning, som blev bevist af Reidemeister i 1932.

2 Jones invarianten af knuder

Ved en *invariant* af knuder, forstås en funktion fra mængden af alle knudediagrammer $\mathcal{K}$ til mængden af polynomier, som opfylder:

Hvis K_1 er et knudediagram som kan transformeres over i et andet knudediagram K_2 ved en sekvens af deformationer og modifikationer af typen R1, R2 eller R3, så knytter invarianten det samme polynomium til K_1 som det knytter til K_2 .

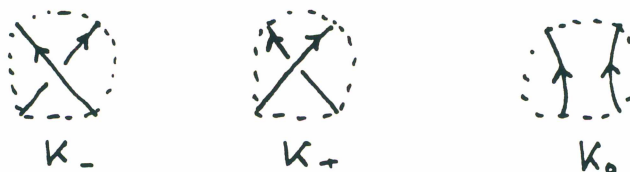
Det er derfor, vi siger, at en invariant er karakteristisk for en knudes topologi, idet den ikke afhænger af hvilket knudediagram vi vælger til at repræsentere knuden ved, når vi udregner invarianten.

Sætning [V. Jones 1984].

Der findes en entydig bestemt *invariant* V af knuder, som til ethvert knudediagram K knytter et polynomium $V_K(t)$, med følgende egenskaber¹

1. Antag at K_+ , K_- og K_0 er tre knudediagrammer der opfylder:

- Knudediagrammerne K_+ , K_- og K_0 er identiske udenfor et lille område i hver af de tre diagrammer. (Det udenfor de tre små områder er ikke medtegnet i figuren nedenfor.)
- Indenfor de tre små områder ser de tre knudediagrammer således ud:



Da gælder at

$$t^{-2}V_{K_-}(t) - t^2V_{K_+}(t) = (t - t^{-1})V_{K_0}(t).$$

2. Der gælder for den trivielle knude U , som er tegnet her til højre, at

$$V_U(t) = 1.$$



¹I kraft af det er postuleret, at V er en invariant, har V jo nødvendigvis også den egenskab, at $V_{K_1}(t) = V_{K_2}(t)$, hvis K_1 kan transformeres over i K_2 ved en sekvens af deformationer og modifikationer af typen R1, R2, eller R3.

Vaughan Jones's invariant af en knude kaldes V-polynomiet for knuden. Som simple eksempler kan man udregne V-polynomiet for følgende knuder, ved brug af egenskaberne 1. og 2. fra Sætningen, samt det faktum at V-polynomiet er en invariant:

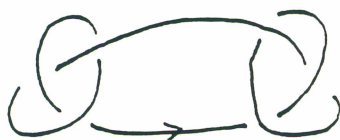


$$V_H(t) = -t^{-5} - t^{-1}$$



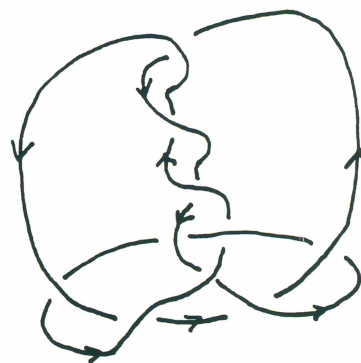
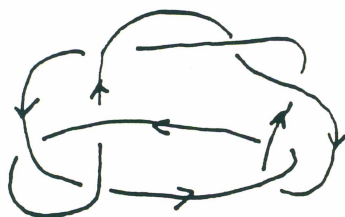
$$V_T(t) = t^2 + t^6 - t^8$$

Flere eksempler er beskrevet i øvelserne nedenfor. Specielt, kan man ved at gennemregne øvelse 3. og 4. udregne V-polynomiet for disse to knuder:



Man vil finde at V-polynomiet for disse to knuder ikke er ens. Dette beviser (under antagelse af Jones's Sætning) at der ikke kan findes en sekvens af deformationer og modifikationer af typen R1, R2 og R3, som transformerer knuden til højre over i knuden til venstre. Altså er de to knuder forskellige.

Ved lidt længere regninger, vil man på samme måde kunne se at følgende to knude har samme V-polynomium:

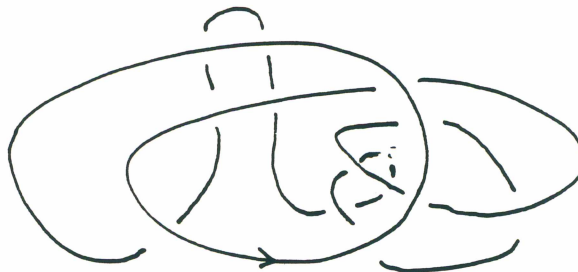


Man kan med andre invarianter bevise at man ikke kan transformere knuden til højre over i knuden til venstre. Dette eksempel viser at Jones's V-polynomium ikke klassificerer knuder. Det er dog ikke så lige til at finde forskellige knuder med det samme V-polynomium. Der findes to forskellige knuder med 8 krydsninger, som har samme V-polynomium. Kan du finde dem?

Øvelse 5 nedenfor er et spørgsmål om Jones's V-polynomium, som vi endnu ikke kender svaret på.

3 Øvelser

1. Find en sekvens af deformationer og modifikationer af typen R1, R2 eller R3 hvorved knudediagrammet



transformeres over i det trivielle knudediagram:



2. Udregn V-polynomiet for knuden



3. Hvis vi har et knudediagram K_1 og et andet knudediagram K_2 ved siden af hinanden, så er foreningen af disse to knudediagrammer igen et knudediagram, som vi betegner $K_1 \cup K_2$.

Hvis K er et knudediagram, så kan vi tilføje et lille trivielt knudediagram som en lille ring omkring en streng i knudediagrammet K på to måder, som vist i dette eksempel:



Vi betegner de resulterende knudediagrammer henholdsvis $K * U$ og $K \bar{*} U$. Det som er forskellen på disse to knudediagrammer, er blot om den lille ring sættes på med positiv eller negativ omløbsretning relativt til omløbsretningen for K .

A) Udnyt at V -polynomiet per definition ikke ændrer sig, når der foretages en modifikation af type R1 på et knudediagram til at bevise formelen:

$$V_{K \cup U}(t) = -(t + t^{-1})V_K(t).$$

B) Udnyt at V -polynomiet per definition ikke ændrer sig, når der foretages en modificering af type R1 eller R2 på et knudediagram til at bevise formelen:

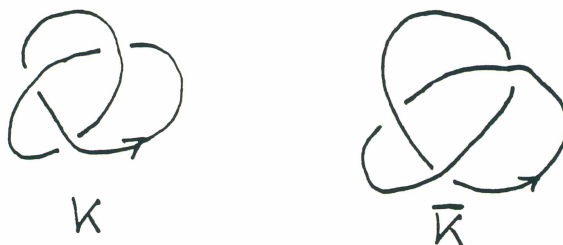
$$V_{K \# U}(t) = -(t^{-5} + t^{-1})V_K(t)$$

og

$$V_{K \star U}(t) = -(t^5 + t^1)V_K(t).$$

I både A) og B) er K et knudediagram og U det trivielle knudediagram.

4. Hvis K er et knudediagram, så får man et knudediagram $\bar{K}$ af spejlbilledet af knuden ved at ændre alle over- henholdsvis under-krydsninger til under- henholdsvis over-krydsninger, som i dette eksempel



A) Vis formelen:

$$V_{\bar{K}}(t) = V_K(t^{-1}).$$

B) Brug resultaterne i 3A) og B) samt 4A) til at udregne V -polynomiet for knuderne:



5. Findes der et ikke trivielt knudediagram K med en streng (altså et knudediagram K med en streng, som ikke kan transformeres til det trivielle knudediagram ved en vilkårlig sekvens af deformationer og modifikationer af typen R1, R2 og R3), således at

$$V_K(t) = 1?$$

Dette er til dato et uløst, men meget interessant problem!

Geometri 1, TD nr. 4

1.5.7

$I \subseteq \mathbb{R}$ (I åbent interval)

Lad $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ betegne en regulær parametriseret glat plan kurve.

Definer:

$$n: I \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \forall r \in I: n(r) \perp \alpha'(r) \wedge \text{sign}(t(r), n(r)) > 0$$

$$k: I \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall r \in I: k(r)n(r) = \alpha''(r) = \frac{d}{dr} t(r)$$

Antag $\forall r \in I: k(r) \neq 0$

Definer:

$$\text{Evolutionen af } \alpha \text{ for } r \in I: \beta(r) := \alpha(r) + \frac{n(r)}{k(r)}$$

a)

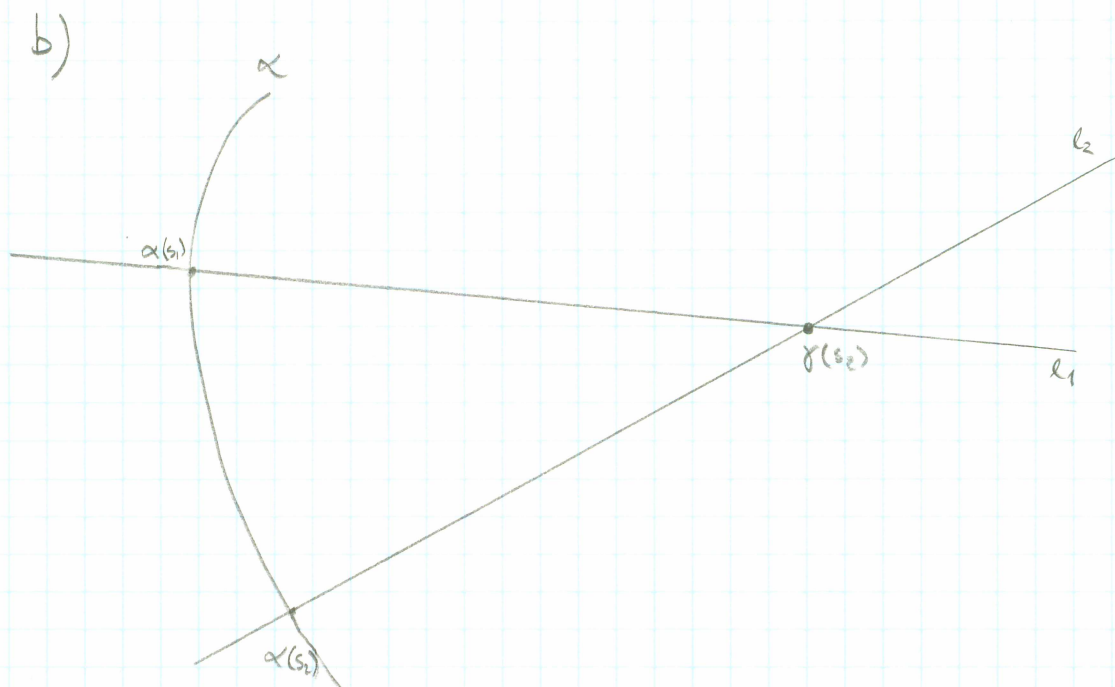
Påstand: $r \in I: \beta'(r) \parallel n(r)$

Bevis:

Juf. Do Carmo s. 22 kan vi reparametrisere β med bukelængden af β som ny parameter. Lad s betegne bukelængden, da gælder, at s kan opfattes som en bijektiv glat fkt af parameteren r

$$\begin{aligned} \beta'(r) &\stackrel{*}{=} \beta'(s) \frac{ds}{dr} = \alpha'(s) \frac{ds}{dr} - \frac{1}{(k(s))^2} k'(s) \frac{ds}{dr} n(s) + \frac{1}{k(s)} (-k'(s)t(s) - t(s)n(s)) \frac{ds}{dr} \\ &= t(s) \frac{ds}{dr} - \frac{1}{(k(s))^2} k'(s) \frac{ds}{dr} n(s) - t(s) \frac{ds}{dr} - \frac{t'(s)}{k(s)} n(s) \frac{ds}{dr} \\ &\stackrel{s=s(r)}{=} - \left(\frac{k'(s) + k(s)t'(s)}{(k(s))^2} \right) n(r) \frac{ds}{dr} \xrightarrow{\frac{ds}{dr} \neq 0} \beta'(r) \parallel n(r) \quad \square \end{aligned}$$

* Frenet lign.



Påstand: $\exists r \in I : \lim_{s_2 \rightarrow s_1} \gamma(s_2) = \beta(r)$

Bevis:

Jvf. bm. i Do Carmo s. 22 kan vi antage, at α er parametriseret ved bue længde.

Med brug af notationen fra ovenstående figur, ser vi for

$$l_1(t) = \alpha(s_1) + t \cdot n(s_1), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$l_2(t') = \alpha(s_2) + t' \cdot n(s_2), \quad t' \in \mathbb{R}$$

at $t, t' \in \mathbb{R} : l_1(t) = l_2(t') = \gamma(s_2)$ opfylder

$$\alpha(s_1) + t \cdot n(s_1) = \alpha(s_2) + t' \cdot n(s_2)$$

$\Downarrow$

$$-(t' \cdot n(s_2) - t \cdot n(s_1)) = \alpha(s_2) - \alpha(s_1)$$

$\Downarrow$

$$-\frac{(t' \cdot n(s_2) - t \cdot n(s_1))}{s_2 - s_1} = \frac{\alpha(s_2) - \alpha(s_1)}{s_2 - s_1} \quad (*)$$

Af antagelse/def. ser vi, at $\lim_{s_2 \rightarrow s_1} t = \lim_{s_2 \rightarrow s_1} t' =: \tau$

Lad $s_2 \rightarrow s_1$ i $(*)$, da får vi, ($\ell_1(\tau) = \gamma(s_1)$)

$$-\tau n'(s_1) = \alpha'(s_1)$$

Da α er parametriseret ved buelængde for (idet $|\alpha'(s)| \equiv 1$)

$$-\tau \langle n'(s_1), \alpha'(s_1) \rangle = 1$$

Fremet ligh.: $n'(s_1) = -k(s_1)t(s_1) - \tau(s_1)b(s_1)$ giver ($t = \alpha'$, $t \perp b$):

$$\langle n'(s_1), \alpha'(s_1) \rangle = -k(s_1) \underbrace{\langle \alpha'(s_1), \alpha'(s_1) \rangle}_{|\alpha'|=1} = -k(s_1)$$

$$\text{Vi ser, at } \tau = \frac{1}{k(s_1)} \quad (\text{husk } \alpha \text{ regular})$$

$$\text{Ved indsættelse fås } \gamma(s_1) = \ell_1(\tau) = \alpha(s_1) + \frac{1}{k(s_1)} n(s_1) = \beta(s_1)$$

□

1.5.8

Definer $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}: \alpha(t) := (t, \cosh(t))$

$$\alpha'(t) = (1, \sinh(t)), \quad \alpha''(t) = (0, \cosh(t))$$

Det er klart, at $\alpha'(t) \neq 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$, dvs. α er en reguler plan kurve.

Vi benytter def af kurvation præsenteret i bkm. 1 s. 21 i Do Carmo.

a)

Påstand: $k(t) = \frac{1}{\cosh^2 t}$, $t \in \mathbb{R}$

Beweis:

Ifølge 1.5.12 d har vi, at $k(t) = \frac{\cosh t}{(1 + \sinh^2 t)^{3/2}} = \frac{\cosh t}{(\cosh^2 t)^{3/2}} = \frac{1}{\cosh^2 t} \quad \square$

b)

Påstand: $\beta(t) = (t - \sinh(t) \cdot \cosh(t), 2 \cdot \cosh(t))$, $t \in \mathbb{R}$

Beweis:

Det kan nemt vises - ved nogenlunde samme fremgangsmetode som i 1.5.12 - at $n(t) = \frac{1}{k(t)} \cdot \left(\frac{\alpha''(t)}{|\alpha'(t)|^2} - \frac{\alpha'(t) \cdot \langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle}{|\alpha'(t)|^4} \right)$.

Dvs. $\beta(t) = \alpha(t) + \frac{((x')^2 + (y')^2)^2}{(x'y'' - x''y')^2} \left(\alpha''(t) - \alpha'(t) \cdot \frac{\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle}{|\alpha'(t)|^2} \right)$

I dette tilfælde får:

$$\begin{aligned} \beta(t) &= (t, \cosh(t)) + \frac{(1 + \sinh^2(t))^2}{\cosh^2(t)} \left((0, \cosh(t)) - (1, \sinh(t)) \frac{\sinh(t) \cdot \cosh(t)}{(1 + \sinh^2(t))} \right) \\ &= (t, \cosh(t)) + (0, \cosh^2(t)) - (\sinh(t) \cdot \cosh(t), \sinh^2(t) \cdot \cosh(t)) \\ &= (t - \sinh(t) \cdot \cosh(t), \cosh(t)(\cosh^2(t) + \sinh^2(t)) + \cosh(t)) \\ &= (t - \sinh(t) \cdot \cosh(t), 2 \cdot \cosh(t)) \end{aligned}$$

$\square$

Øvelse 1.4. N1

g betegner en generisk lukket plan kurve

Vælg $t_0 \in I$ således, at $g(t_0)$ er et ydre punkt.

Definer

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(t) := \begin{cases} g(t+t_0), & t \in [0, 1-t_0] \\ g(t+t_0-1), & t \in [1-t_0, 1] \end{cases}$$

Påstand: f er en generisk lukket plan kurve, med samme antal dobbeltpkter som g . og $g \sim f$

Beweis:

$$\text{Vi ser, at } \forall k \in \mathbb{N}_0, t \in I: f^k(t) = \begin{cases} g^k(t+t_0), & t \in [0, 1-t_0] \\ g^k(t+t_0-1), & t \in [1-t_0, 1] \end{cases}$$

$$\text{Specielt har vi } \forall k \in \mathbb{N}_0: f^k(0) = g^k(t_0) = f^k(1)$$

Det er desuden klart, at f er differentiabel, dvs. f er en lukket plan kurve.

At f har samme antal dobbeltpunkter som g følger trivielt.

$$\text{Definer } F(t,s): I \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (t,s) \in I \times I: F(t,s) := \begin{cases} g(t+t_0 \cdot s), & t \in [0, 1-t_0 \cdot s] \\ g(t+t_0 \cdot s-1), & t \in [1-t_0 \cdot s, 1] \end{cases}$$

$$\text{Bm. at } F(t,0) = g(t), \quad F(t,1) = f(t)$$

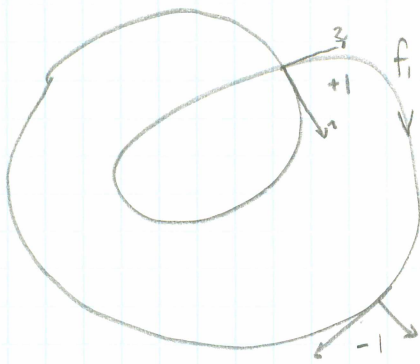
Som ovenfor har vi, at for givet $s \in I$ har vi:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0, t \in I \quad F^k(t,s) = \begin{cases} g^k(t+t_0 \cdot s), & t \in [0, 1-t_0 \cdot s] \\ g^k(t+t_0 \cdot s-1), & t \in [1-t_0 \cdot s, 1] \end{cases}$$

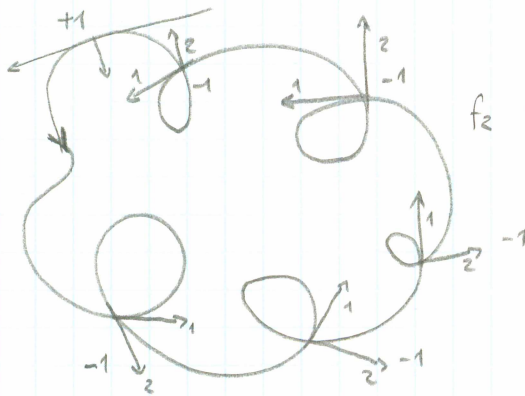
$$\dots \text{ og specielt } \forall k \in \mathbb{N}_0: F^k(0) = g^k(t_0 \cdot s) = F^k(1)$$

Desuden er $F(t,s)$ diff.. Alt i alt er F en isotopi fra g til f $\square$

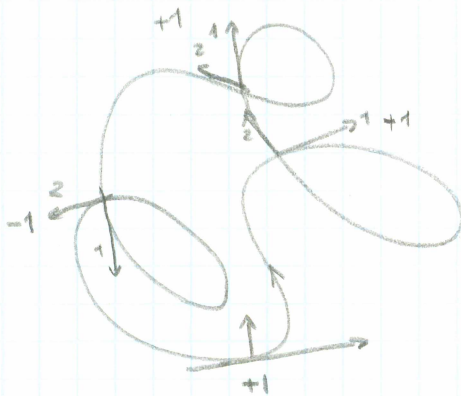
Øvelse 1.5, N1



$$d(f_1) = 0$$



$$d(f_2) = 4$$



f_3

$$d(f_3) = 2$$

Skitse for bevis af Whitney's formel:



$\theta \in]\pi, 2\pi]$, θ betegner 'den store' vinkel mellem den 'indadgående' og den 'udadgående' tangentvektor.

Bm. tangenten drejer sig i alt et helt antal gange.

Tal pos. / neg. omkøb ved at dele op i 'basis' kurløbe + 'det store' omkøb

2.2.2

Påstand: $\bar{D} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=0, x^2+y^2 \leq 1\}$ er ikke en reg. flade.

Beweis:

Antag at $\bar{D}$ er en reg. flade. Af prop. 3 s. 63 i Do Carmo følger, at for et vilk. randpkt. $p \in \bar{D}$ eksisterer der en åben smøgn af p i $\bar{D}$, V således at V er grafen af en diff. fkt. $z=f(x,y)$ [en fkt. på V kan pga. flertydighed ikke def. på x - z el. y - z planet].

Definer $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3: \pi(x,y,z) = (x,y)$

Det er klart, at $f: \pi(V) \rightarrow V$

specielt er f diff. i $\pi(p) \in \pi(V)$

Men $\pi(p)$ er ikke et indre pkt. af $\pi(V)$ og dermed kan f ikke være diff. i $\pi(p)$. ∇

□

Påstand: $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=0, x^2+y^2 < 1\}$ er en reg. flade.

Beweis:

Definer $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3: \pi(x,y,z) = (x,y)$

$\chi: \pi(D) \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \forall (x,y) \in \pi(D): \chi(x,y) = (x,y,0)$

Det er klart, at $\chi(\pi(D)) = D^*$, χ er diff. på hele $\pi(D)$,

at χ er bijektiv, at χ er kont., at $\chi^{-1} = \pi|_D$ er kont.

(dvs. χ er en homeomorfi) samt at $\forall p \in \pi(D): d\chi_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

er en injektiv afbildning. (da $\|0^\circ\|=1$)

Af. def. på reg. flade følger, at χ er et kort på D , af * følger yderligere at χ er et atlas. Dvs. D er en reg. flade. □

(+ tilføje: el. brugt prop 1 s. 58 i Do Carmo)

2.2.3

Påstand: $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ er ikke en reg. flade

Bevis:

Antag at C er en reg. flade.

Af prop. 3 s. 63 i Do Carmo følger, at eksisterer en mængde, V der er en åben omegn. af $(0,0,0) \in C$ i C , således at V er grafen for en fkt. f , der enten er def. på projektionen af V på x - y planet, x - z planet el. y - z planet. Men disse tre projektioner er ikke injektive og f kan således ikke være veldefineret. $\frac{1}{2}$ $\square$

2.2.4

Definer: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = z^2$

Påstand: 0 er ikke en regulær værdi for f . $f^{-1}(0)$ er en reg. flade.

Bevis:

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f_1(x, y, z) = 0, f_2(x, y, z) = 0, f_3(x, y, z) = 2z$

$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$

Det er klart, at $f^{-1}(0) = M$ samt at $f_1|_M \equiv f_2|_M \equiv f_3|_M \equiv 0$

Af def. 2 s. 58 i Do Carmo + bn. s. 58-59 i Do Carmo følger, at 0 ikke er en regulær værdi for f .

Da $f^{-1}(0) = M$ og M er x - y planet er det klart, at $f^{-1}(0)$ er en reg. flade...

Definer $I: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : I(x, y) = 0$

I er klart af klasse C^∞ og da M er grafen for f og $\mathbb{R}^2$ specielt er en åben delmængde af $\mathbb{R}^2$ følger det enskede af prop. 1 s. 58 i Do Carmo.

□

Geometri 1, afl. nr. 2, Gunnar Hellmud, Årskortur. 96 03 12

(opg. 15.17 a) + b)

$I \subseteq \mathbb{R}$ (I åbent interval)

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ betegner en glat kurve parametriseret ved buelængde

$$\forall s \in I: \tau(s) \neq 0$$

Påstand: α er en helix $\iff \frac{\kappa}{\tau} = \text{konstant}$

Bevis:

$\implies$

α er en helix, dvs. $\exists c \in \mathbb{R}^3 \forall s \in I: \arccos\left(\frac{\langle c, \alpha'(s) \rangle}{|c| |\alpha'(s)|}\right) = \text{konst.} = \Theta$
definer $\hat{c} = \frac{c}{|c|}$, da α er parametriseret ved buelængde (dvs $|\alpha'| = 1$)

$$\text{fås } \arccos\left(\frac{\langle c, \alpha'(s) \rangle}{|c| |\alpha'(s)|}\right) = \arccos(\langle \hat{c}, \alpha'(s) \rangle) = \Theta \quad (= \text{konst.})$$

$\Downarrow$ ($\arccos$ bijektiv på $[-1, 1]$)

$$\langle \hat{c}, \alpha'(s) \rangle = \text{konst.}$$

$\Downarrow$

$$\frac{d}{ds} \langle \hat{c}, \alpha'(s) \rangle = \left\langle \frac{d}{ds} \hat{c}, \alpha'(s) \right\rangle + \left\langle \hat{c}, \frac{d}{ds} \alpha'(s) \right\rangle = \langle \hat{c}, \alpha''(s) \rangle \equiv 0$$

$\Downarrow$

$$\hat{c} \perp \alpha''(s)$$

$\Downarrow$

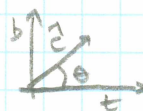
$$\hat{c} \perp n(s)$$

$\Downarrow$

$\hat{c} \in \text{sp}(t(s), b(s))$ ((t, n, b) definerer j. en orthonormal basis for $\mathbb{R}^3$)

Da $(t(s), b(s))$ definerer en orthonormal basis og da $\langle \hat{c}, t(s) \rangle = \cos \Theta$ fås

$$\hat{c} = \cos \Theta t(s) + \sin \Theta b(s)$$



Da $\hat{e}$ er en konst. vektor og θ er en konst. fås

$$\frac{d}{ds}(\cos \theta t(s) + \sin \theta b(s)) = \cos \theta t'(s) + \sin \theta b'(s) = 0$$

$\Downarrow$ (Frenet lign. s. 19 i Do Carmo)

$$\cos \theta k(s)n(s) + \sin \theta \tau(s)n(s) = (\cos \theta k(s) + \sin \theta \tau(s))n(s) \equiv 0$$

$\Downarrow$ ($n \neq 0$)

$$\cos \theta k(s) + \sin \theta \tau(s) \equiv 0$$

$\Downarrow \tau \neq 0$

$$\frac{k(s)}{\tau(s)} = \frac{-\sin \theta}{\cos \theta} = \text{konst. (da } \theta \text{ konst.)}$$

' $\Leftarrow$ '

Da $-\tan :]-\pi/2; \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ er bijektiv $\exists \theta \in]-\pi/2; \pi/2[$ således at

$$-\tan(\theta) = \frac{k(s)}{\tau(s)} = \text{konstant (pr. antagelse, husk } \tau \neq 0)$$

$$\text{Da } \tan = \frac{\sin}{\cos} \text{ fås } \text{konstant} = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{k(s)}{\tau(s)}$$

$\Downarrow$

$$k(s) \cos \theta + \tau(s) \cdot \sin \theta \equiv 0$$

$\Downarrow$

$$(\cos \theta k(s) + \sin \theta \tau(s))n(s) \equiv 0$$

$\Downarrow$ (θ konst.)

$$\cos \theta \int k(s)n(s)ds + \sin \theta \int \tau(s)n(s)ds = c \quad (c \text{ konst.}, c \in \mathbb{R}^3)$$

$\Downarrow$ (vi finder stamfkt. uhja. Frenet lign.)

$$\cos \theta t(s) + \sin \theta b(s) = \text{konstantvektor} =: \hat{e} \quad (\text{vi ser -idiotformlen - } |\hat{e}| = 1)$$

Vi ser, at (da $t \perp b$) $\langle t, \hat{e} \rangle = \cos \theta = \text{konstant}$, så

$$\angle t, \hat{e} = \arccos\left(\frac{\langle t, \hat{e} \rangle}{|t||\hat{e}|}\right) = \arccos(\langle t, \hat{e} \rangle) = \theta = \text{konst.}$$

Ved brug af $\hat{e}$, som den relevante konstantvektor, ser vi, at α opfylder definitionen på at være en helix $\checkmark$

Påstand: α er en helix $\iff \exists c \in \mathbb{R}^3 \forall s \in I, r \in \mathbb{R} : \langle c, r \cdot n(s) \rangle = 0$
 (dvs. der eksisterer et plan (med normalvektor c)
 (hvormed alle normalvektorer er parallelle))

Bevis:

' $\implies$ '

Af det foregående bevis fremgår det, at der eksisterer en konstantvektor $c = \cos \theta t(s) + \sin \theta b(s)$ $\theta = \angle c, t = \text{konstant}$

Da $n \perp t, n \perp b$ og jvf. en distributiv ^{det} regel ^{or bilinear} for indre produkt $\checkmark$ fås

$$\forall r \in \mathbb{R}, s \in I : \langle c, r \cdot n(s) \rangle = r \cos \theta \langle t(s), n(s) \rangle + r \sin \theta \langle b(s), n(s) \rangle = 0$$

' $\impliedby$ '

$$\exists c \in \mathbb{R}^3 \forall s \in I, r \in \mathbb{R} : \langle c, r \cdot n(s) \rangle = 0 \implies \langle c, n(s) \rangle = 0$$

$$\implies r \cdot \langle c, n(s) \rangle = 0 \implies \langle c, \frac{d}{ds} t(s) \rangle = 0$$

Frenet ligh.

$$\text{Da } \frac{d}{ds} (\langle c, t(s) \rangle) = \langle c, \frac{d}{ds} t(s) \rangle = 0 \text{ fås } \langle c, t(s) \rangle = \text{konstant}$$

Da $|c|, |t| \equiv 1$ (således kan vi jo vælge c) følger, at

$$\angle t, c = \arccos \left(\frac{\langle c, t \rangle}{|c||t|} \right) = \text{konstant}$$

Da c er en konstantvektor, opfylder α def. på en helix $\checkmark$ $\square$

Godtlandt

13/3 - 98

1 kbt



17. februar 1998

Geometri 1.

UGESEDDER NR. 3

Forelæsningerne d. 19. og 20. Februar.

Forelæsningerne i denne uge vil handle om Whitney's sætning om isotopi af plane lukkede kurver.

To kurver er isotope, hvis den ene kan deformeres over i den anden. Vi vil give en præcis definition af begrebet deformation, som resulterer i begrebet isotopi. Vi vil se, at ikke alle lukkede kurver er isotope:

Dette gøres ved at indføre grad, et heltal, som er et mål for hvor mange gange tangentvektoren til kurven drejer rundt, når kurven gennemløbes. For et vilkårligt heltal n , er det let at konstruere en kurve af grad n .

Vi vil give en præcis definition for graden af en lukket plan kurve og bevise at hvis to kurver er isotope, så har de samme grad.

Derefter beviser vi Whitney's sætning, som siger at to lukkede plane kurver er isotope hvis og kun hvis de har samme grad.

Endvidere skal vi diskutere Whitney's formel for graden af en lukket plan kurve, som muliggør en meget simpel udregning af graden. Beviset for at Whitney's formel faktisk giver graden af den lukkede plane kurve vil ikke blive gennemgået, men kan læses i Whitney's oprindelige artikel.

Sluttelig skal vi lige snuse lidt til definitionerne inden for knudeteori, som er studiet af isotopiklasser af indlejrede lukkede kurver i det 3-dimensionale Euclidiske rum.

Vi får brug for Lebesgue's lemma i beviset for Whitney's sætning og flere gange gennem kurset, så jeg har inkluderet lemmaet med bevis på denne ugeseddel.

Noter til forelæsningerne d. 19. og 20. Februar.

Noterne til disse to forelæsninger vil udkomme onsdag d. 18. Februar i elektronisk form på hjemmesiden og i trykt form samme sted som ugesedlen foran Aud. D1.

Øvelsesopgaver 23. – 27. Februar:

1.5.9, 1.5.12, 1.5.13, 1.6.1, 1.6.2

Afleveringsopgaver 23. – 27. Februar:

1.5.17 a) og b)

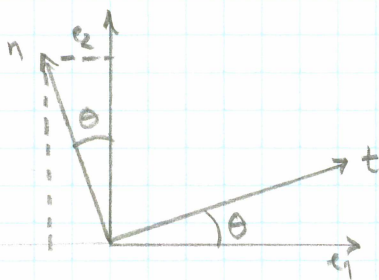
Geometri 1, TØ nr. 3

1.5.9 (den lok. krumnings hovedsætning for plane kurver)

Givet en diff. fkt. $k: I \rightarrow \mathbb{R}$, gælder at den ved bue længde parametriserede plane kurve med krumning k er på formen

$$\alpha(s) = \begin{pmatrix} \int \cos \theta(s) ds + a \\ \int \sin \theta(s) ds + b \end{pmatrix}, \theta(s) = \int k(s) ds + \varphi, \text{ hvor } \varphi, a, b \in \mathbb{R} \text{ er vilk.}$$

Beweis:



$$\theta'(s) = k(s) \quad (t'(s) = k(s)n(s), \text{ def. af krumning for plan kurve + } |t(s)| = 1)$$

$\Downarrow$

$$\theta(s) = \int k(s) ds + \varphi \quad (\varphi \text{ svarer til en rotation af standard basis})$$

$$\text{Vi ser, } n(s) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta(s)) \\ \cos(\theta(s)) \end{pmatrix}$$

$$\text{Da } \alpha'(s) = t(s) \Rightarrow \alpha''(s) = k(s)n(s) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta(s))k(s) \\ \cos(\theta(s))k(s) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha'(s) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(s)) + \psi \\ \sin(\theta(s)) + \xi \end{pmatrix}, \psi, \xi \in \mathbb{R}, |\alpha'(s)| = 1 \Rightarrow \psi = \xi = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(s) = \begin{pmatrix} \int \cos(\theta(s)) ds + a \\ \int \sin(\theta(s)) ds + b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \quad (a, b \text{ svarer til en translation af } \alpha(s))$$

□

1.5.12

$I \subseteq \mathbb{R}$ (I betegner et åbent interval)

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ betegner en regulær glat parametrisert kurve

$\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ betegner reparametriseringen af $\alpha(I)$ med bue længde
 $s = s(t)$ [$t \in I$] målt fra $t_0 \in I$ som parameter (se bmk.s. 21-22 Doc)
 $t = t(s)$ betegner den inverse fkt. af s (husk α regulær)

$$x' := \frac{dx}{dt} \quad x'' := \dots \quad osv.$$

a) Pöstand: $\frac{dt}{ds} = 1/|x'|$, $\frac{d^2t}{ds^2} = \frac{-\langle x', x'' \rangle}{|x'|^4}$

Bevis:

Da β er parametriseret ved buelængde fås

$$1 = \left| \frac{dB}{ds} \right| = \left| \frac{dx(t(s))}{ds} \right| = \left| \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds} \right| = \left| \frac{dx}{dt} \right| \frac{dt}{ds} \quad (*)$$

↓ (hush & regular)

$$\frac{dt}{ds} = 1/|\frac{dx}{dt}| = 1/|x'|$$

$$(*) \Rightarrow 0 = \frac{d}{ds} \left(\left| \frac{dx}{dt} \right| \frac{dt}{ds} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{produktregel}}}{=} \left(\frac{d}{ds} \left| \frac{dx}{dt} \right| \right) \frac{dt}{ds} + \left| \frac{dx}{dt} \right| \frac{d^2(t)}{ds^2} \quad (t_1)$$

$$\frac{d}{ds} \left| \frac{dx}{dt}(t(s)) \right| = \frac{d}{ds} \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2} =$$

$$\alpha_i := \langle \alpha, e_i \rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \cdot 2(x_1' x_1'' + x_2' x_2'' + x_3' x_3'') \cdot \frac{dt}{ds} = -\frac{1}{|x'|^2} \langle x', x'' \rangle(t_c)$$

Reduktion

$$t_1, t_2 \Rightarrow \frac{d^2 t}{ds^2} = -\frac{1}{|x'|^3} \langle x', x'' \rangle \cdot \frac{dt}{ds} \cdot \frac{1}{|x'|} = \frac{-\langle x', x'' \rangle}{|x'|^4}$$

(x regular)

b)

Påstand:

$$k(t) = \frac{|\alpha' \wedge \alpha''|}{|\alpha'|^3} \quad (t \in I)$$

Bevis:

$$k(t) = k(t(s)) = |\beta''(s)| = \left| \frac{d^2 \alpha(t(s))}{ds^2} \right|$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{kedjeregeln}}}{=} \left| \frac{d}{ds} \left(\frac{d\alpha(t(s))}{dt} \frac{dt}{ds} \right) \right| \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{produktregeln}}}{=} \left| \frac{d}{ds} \left(\frac{d\alpha(t(s))}{dt} \right) \cdot \frac{dt}{ds} + \left(\frac{d\alpha(t(s))}{dt} \right) \frac{d^2 t}{ds^2} \right|$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{kedjeregeln}}}{=} \left| \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{d\alpha}{dt} \frac{d^2 t}{ds^2} \right| \stackrel{a)}{=} \left| \alpha'' / |\alpha'|^2 + \alpha' \cdot \frac{-\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{|\alpha'|^4} \right|$$

$$\stackrel{\substack{\alpha'_i := \langle \alpha', e_i \rangle \\ \alpha''_i := \langle \alpha'', e_i \rangle}}{=} \frac{1}{|\alpha'|^4} \left| |\alpha'|^2 \alpha'' - \langle \alpha', \alpha'' \rangle \alpha' \right| \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Do Carmo s. 14}}}{=} \frac{1}{|\alpha'|^4} |(\alpha' \wedge \alpha'') \wedge \alpha'|$$

$$= \frac{1}{|\alpha'|^4} |\alpha' \wedge \alpha''| |\alpha'| = \frac{|\alpha' \wedge \alpha''|}{|\alpha'|^3}$$

c)

Påstand: $\tau(t) = - \frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{|\alpha' \wedge \alpha''|^2}, t \in I$

Bevis:

Af 1.5.2 følger

$$\tau(t) = - \frac{\langle \beta'(s(t)) \wedge \beta''(s(t)), \beta'''(s(t)) \rangle}{|k(s(t))|^2}$$

$$= - \frac{\langle (\alpha'/|\alpha'|) \wedge (\alpha''/|\alpha'|^2), \alpha'''/|\alpha'|^3 \rangle}{|\alpha' \wedge \alpha''|^2} |\alpha'|^6$$

udregn. i a) og b)

+ resultat i b)

samt at $\alpha' \wedge \alpha'' \perp \alpha', \alpha' \wedge \alpha'' \perp \alpha'', \alpha' \wedge \alpha' = 0$

$$= \frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{|\alpha' \wedge \alpha''|^2}$$

↑

def. af $\wedge$ -produkt
det er lineær i alle søjler

□

d)

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ betegner en plan kurve $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$
Kurvationsen med fortegn for α i t er givet ved udtrykket

$$k(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}$$

Beweis:

Juf. b) skal vi blot vise at $x'y'' - x''y'$ har samme fortegn som $\det(t, n)$ ($\neq 0$ da t, n basis/uafh.), men dette er trivielt, idet $\text{sign}(\det(t, n)) = \text{sign}(\det(\alpha', \alpha'')) = x'y'' - x''y'$

□

1.5. 13

Påstand:

$I \subseteq \mathbb{R}$ (I åbent interval)

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ betegner en glat kurve parametriseret ved bukelængde

Antag $\forall s \in I: T(s) \neq 0, K(s) \neq 0$

Da gælder, at en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at $\alpha(I)$ ligger på en sfære er, at $(R=1/k, T=1/\tau, R'=\frac{dR}{ds})$

$$R^2 + (R')^2 T^2 = \text{konstant}$$

Bevis:

For at vise at det er en nødvendig betingelse, antag at α ligger på en sfære.

Lad os desuden antage, at denne sfære har centrum i origo, en sådan antagelse er 'tilladelig' jvf. Den Lokale Kurveteoris Fundamentalsætning, der bla. siger, at torsion og kurvation er invariant under translation, og da slutresultatet netop i dette tilfælde omhandler torsion og kurvation.

Da (t, n, b) danner en orthonormal basis for $\mathbb{R}^3$ findes der funktioner $A, B, C: I \rightarrow \mathbb{R}$ således, at $\alpha = At + Bn + Cb$ *

$$|\alpha| = \text{konst} \Rightarrow |\alpha|^2 = \text{konst.} \Rightarrow \frac{d}{ds} |\alpha|^2 = \frac{d}{ds} \langle \alpha, \alpha \rangle = 0$$

$$\Rightarrow 2\langle \alpha, \alpha' \rangle = 2\langle \alpha, t \rangle = 0 \quad (\Rightarrow A=0)$$

$$\Rightarrow \langle \alpha', t \rangle + \langle \alpha, t' \rangle = \langle t, t \rangle + \langle \alpha, kn \rangle = 0 \quad (\Rightarrow 1 + Bk = 0 \Rightarrow B = -R)$$

$$\Rightarrow \underbrace{2\langle t', t \rangle}_{k'n} + \underbrace{\langle \alpha', kn \rangle}_t + \langle \alpha, k'n + kn' \rangle = \langle \alpha, -\frac{R'}{R^2} n - \frac{1}{R^2} t - \frac{1}{RT} b \rangle = 0$$

$k' = -\frac{R'}{R^2}$

$$(\Rightarrow \frac{R'}{R^2} - \frac{1}{RT} C = 0 \Rightarrow C = R'T), \text{ dvs. } \alpha = -Rn + R'Tb$$

Jvf. * + 'pythagoras' fås derfor $\text{konst.} = |\alpha|^2 = R^2 + (R')^2 T^2$

For at vise at det er en tilstrækkelig betingelse, antag

$$R^2 + (R')^2 T^2 = \text{konstant} \quad (+)$$

Definer $\beta := \alpha + Rn - R'Tb$

$$\beta' = t + R'n + Rn' - (R'T)'b - R'Tb'$$

$$= t + R'n + R(-1/R \cdot t - 1/T b) - (R'T)'b - R'T \cdot 1/T n$$

$$= \cancel{t} + \cancel{R'n} - \cancel{Rn} - \cancel{t} - R/T b - (R'T)'b = - (R/T + (R'T)')b \quad *$$

$$(+)\Rightarrow 2RR' + 2(R'T)(R'T)' = 2(R'T)(R/T + (R'T)') = 0$$

Vi ser ved indsættelse i *, at $\beta' = 0$ (idet $t, \tau \neq 0 \Rightarrow R'T \neq 0$)

Af middelværdisætn. følger, at β er konstant, p_0 .

Af def. på β følger, at $|\alpha - p_0|^2 \overset{\uparrow}{=} R^2 + (R')^2 T^2 \overset{\substack{\text{pr. antagelse.} \\ \downarrow}}{=} \text{konstant}$
(Pyth. da (t, n, b) er ortonormalsystem)

Heraf ses, at α ligger på sfæren med centrum i p_0 og radius $|\alpha - p_0|$.

□

1.6.1

$I \subseteq \mathbb{R}$ (I åbent interval)

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ betegner en glat kurve parametriseret ved buelængde
 $\forall s \in I: \kappa(s) \neq 0$

Påstand:

Lad $s \in I$ være givet, (da $\kappa \neq 0, \kappa \neq 1$ er (t, n, b) en veldef. ortonormal basis)

$T \neq 0$, P betegner planet, hvorefter det gælder ...

- 1) $\forall c \in \mathbb{R}: c \cdot \alpha'(s) \in P$
- 2) Givet en omegn af $s, J \subseteq I$, da eksisterer der punkter i $\alpha(J)$ på begge sider af P .

Da er P det osculerende plan

$T \equiv 0$, Q betegner planet, hvorefter det gælder ...

- 1) $\forall c \in \mathbb{R}: c \cdot \alpha'(s) \in P$
- 2) $\exists \tilde{s} \in I \forall c \in \mathbb{R}: c \cdot \alpha'(s) \neq \alpha(\tilde{s}) \wedge \alpha(\tilde{s}) \in P$

Da er P det osculerende plan (der jo tillige indeholder $\alpha(I)$)

Bevis:

Lad $s \in I$ være givet

$T \neq 0$, (antag $s=0$, dette er def. på buelængde 'tilladt' i.e. sæt $s_0=s$)

Da $\forall c \in \mathbb{R}: c \cdot \alpha'(s) \in P$, og P er et plan, gælder (se evt. fig. 1-18)

at $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=0\}$ el. $\exists c \in [0, \infty): P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=c \cdot y\}$

Juf. Taylorudviklingen af koordinatfkt. for $(t(s), n(s), b(s))$ basen

(se (1) s. 27 i Do Carmo) og Mat 11 eksisterer der en omegn

$J \subseteq I$ af $s=0$ således, at $y > 0 \forall s' \in J \setminus \{0\}$ og $y=0, \tilde{s}=0$

Antager vi yderligere, at $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$ får vi en modstrid med antagelsen om, at for enhver omegn af s , og dermed specielt ovenstående J , gælder at $\kappa(J)$ indholder pld. på hver side af P .

Dvs. $\exists c \in \mathbb{R} \quad P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = c \cdot y\} \quad (*)$

Hvis $\tau(s) \neq 0$ kan vi benytte et simpelt argument:

Lad $c \in \mathbb{R}$, betegne vort c fra (*). Jvf. Taylorudv. s 27 (1) i DoCamm Mat 11 og da $k, \tau \neq 0$ (pr. antagelse) eksisterer der en udpræget omegn af $s=0$, således at der for elementer i denne udprægede omegn gælder $y > 0$ (da $k > 0$) og $z < 0$ (bmkt. τ kan være pos. el. neg.)

og andre elementer for hvilke vi har

$$y > 0 \quad \text{og} \quad z < 0$$

Da $c = \frac{z}{y}$ er konst. og både pos. og neg. ser vi, at $c = 0$

Dvs. $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\} = \text{span}\{t, n\} = \text{osculerende plan.}$

Hvis $\tau(s)$ måske er nul, har vi følgende argument....

Da $R = O(s^3) \Rightarrow R_2 = O(s^3)$ og da $\exists \delta > 0: |h| < \delta \Rightarrow |y(h)| > 0$ benytte vi Taylorudv. af z og y til at indse, at

$$c = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{z(0+h)}{y(0+h)} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{-\frac{k}{6} \tau h^3 + R_z}{\frac{k}{2} h^2 + \frac{k'}{6} h^3 + R_y} \right) = 0$$

(ved at dele med s^3 i h^3 i tæller og nævner ser vi at opg. er ok også for $\tau \neq 0$.)

$$\tau \equiv 0$$

Det er klart, at 'planet' P er den tomme mængde

Da $\tau \equiv 0$ er $\alpha(I)$ indeholdt i et plan; da der eksisterer pkt. i $\alpha(I)$ på hver side af P , er P ikke planet, der indeholder $\alpha(I)$.

Omvendt har vi tidl. set at hvis $\tau \equiv 0$ er $\alpha(I)$ indeholdt i det osculerende plan (De Carma s. 18). Dus. P er ikke det osculerende plan.

Men argumenterne på de foregående sider kan genbruges, heraf fremgår det, at $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$

$$\text{Dus. } P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \wedge (\exists O \in P, z_0 \neq 0)\} = \emptyset$$

Det er ligeledes klart, at Q er veldef. og det osculerende plan, dette følger direkte af def. på Q og resultatet at $\alpha(I) \subseteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ hvis $\tau \equiv 0$.

□

Exc. 1.6.2

$I \subseteq \mathbb{R}$ (I åbent interval)

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ betegner en kurve parametriseret ved bue længde (α glat)

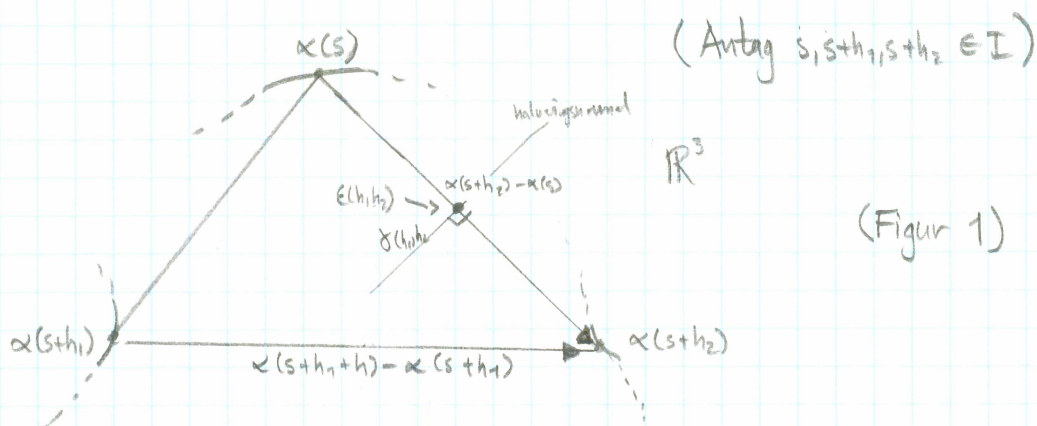
$\forall s \in I: k(s) \neq 0$

a) Påstand:

Lad $s \in I$ være givet

Det osculerende plan for α i s er 'grænseplanet', der fremkommer ved at betragte planet gennem $\alpha(s), \alpha(s+h_1), \alpha(s+h_2)$ for $h_1, h_2 \rightarrow 0$

Bevis:



Da α er glat følger af def. på differentiability af vektorer i $\mathbb{R}^n$, at

$$\lim_{h_2 \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha(s+h_2) - \alpha(s)}{h_2} \right) = \alpha'(s) \quad (\text{dvs } \alpha' = t \text{ er indh. i 'grænseplanet'})$$

Sæt $h = h_2 - h_1$, da α er glat fås af

$$\alpha'(s+h_1) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha(s+h_1+h) - \alpha(s+h_1)}{h} \right) \quad \text{og da } h \rightarrow 0 \text{ for } h_1, h_2 \rightarrow 0$$

at $\alpha'(s+h_1)$ er indholdt i 'grænseplanet'

(Da vi for tilstrækkeligt små h_1, h_2 har at $\alpha(s+h_1) \approx s+h_1$ og $\alpha(s+h_2) \approx s+h_2$ se vi at ovenstående grænsevæktorer er kuldevektorer i fin overensstemmelse med at α er parametriseret ved bue længde)

Da α er glat og af ovenstående følger at

$$\alpha''(s) = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha'(s+h_1) - \alpha'(s)}{h_1} \right) \text{ er indeholdt i 'grænseplanet'}$$

Dette medfører ($\forall s \in I : k(s) \neq 0$) at n er indeholdt i 'grænseplanet'

Da det osculerende netop er $\text{sp}(t, n)$ og da vi lige har vist at t, n ligger i grænseplanet er vi færdige. $\square$

b)

Påstand:

Den omskrevne cirkel af $\Delta \alpha(s), \alpha(s+h_1), \alpha(s+h_2)$ er i grænsen $h_1, h_2 \rightarrow 0$ en cirkel indeholdt i det osculerende plan med centrum på linien, som indeholder $nc(s)$, og radius lig kurationsradius ($= 1/k(s)$).
(Cirklen betegnes den osculerende cirkel i s)

Bevis:

Lad $O(h_1, h_2)$ betegne den omskrevne cirkel.

Af a) følger, at $\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} O(h_1, h_2) \subseteq \text{sp}(t, n) = \text{det osculerende plan}$

Lad $C(h_1, h_2)$ betegne centrum i den omskrevne cirkel, da har vi

$$\exists R_{(h_1, h_2)} \in \mathbb{R}_+ : O(h_1, h_2) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid d(x, C_{(h_1, h_2)}) = R_{(h_1, h_2)} \wedge x \in \text{sp}(\alpha(s+h_1) - \alpha(s), \alpha(s+h_2) - \alpha(s))\}$$

Da α er glat og dermed kont. og da $d: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ er kont.

Ses at $\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} O(h_1, h_2)$ er cirklen

$$O = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid d(x, \lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} (C_{(h_1, h_2)})) = \lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} (R_{(h_1, h_2)}) \wedge x \in \text{sp}(t, n)\}$$

$C(h_1, h_2)$ er skæringspunktet mellem de tre halveringsnormaler
Dvs $C(h_1, h_2)$ ligger på $\gamma(h_1, h_2)$.

Da $\alpha'(s) = \lim_{h_2 \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha(s+h_2) - \alpha(s)}{h_2} \right)$ og da $\forall h_1, h_2: \gamma(h_1, h_2) \perp \alpha(s+h_2) - \alpha(s)$
gælder at $\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} (\gamma(h_1, h_2)) \perp \alpha'(s) = t. (*)$

Da $\gamma(h_1, h_2)$ er indeholdt i et plan, som jvf. a) konvergerer mod det osculerende plan, og da $t \in \mathbb{R}$ og $\varphi(t, n) = \text{osculerende plan}$ er

(1) $\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} (\gamma(h_1, h_2)) \parallel n(s) \quad (\text{jvf } (*)).$

(2) $\lim_{h_2 \rightarrow 0} \alpha(s+h_2) = \alpha(s)$ af trekantuligheden følger at $\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} E(h_1, h_2) = \alpha(s)$

Alt i alt giver (1) og (2) at $\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} C(h_1, h_2)$ ligger på normallinien.

Idé til bevis for at radius af den osculerende cirkel i s er $1/\kappa(s)$

Brugt De Carmo s. 19m +

Def.:

Konvergens af cirkler:

En følge af cirkler siges at konvergere (mod en cirkel)

hvis centrene $C_n \rightarrow C$ for $n \rightarrow \infty$ (konvergens i $\mathbb{R}^3$)

hvis radierne $R_n \rightarrow R$ for $n \rightarrow \infty$ (konvergens i $\mathbb{R}$)

(konvergens hvis 'Cauchy' følge (se som 4-tupel og dermed konvergens i $\mathbb{R}^4$))

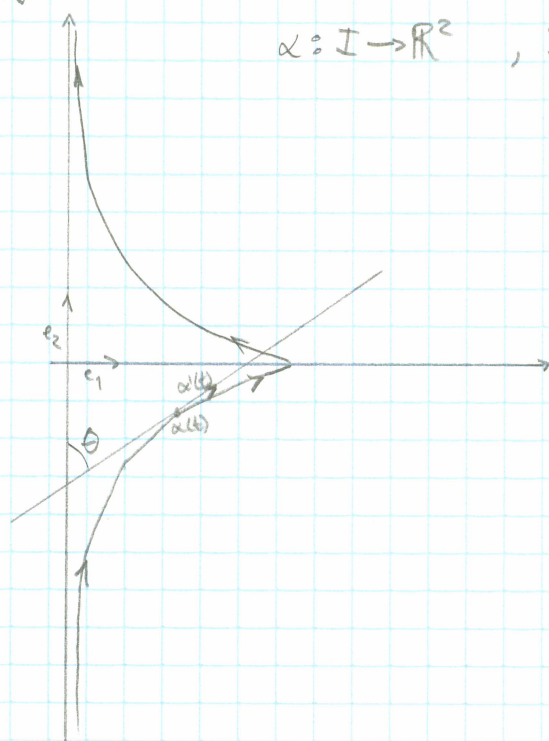
Sætn. (sætn. om omskrevet cirkel)

Givet tre pkt. i $\mathbb{R}^3$, der ikke ligger på en ret linie findes

der præcis en cirkel som skærer alle tre punkter.

Betragt tre cirkler med centre på de tre halveringsnormaler nærliggende $1/\kappa(s)$, $1/\kappa(s+h_1)$ og $1/\kappa(s+h_2)$ og som skærer hh. $\alpha(s)$, $\alpha(s+h_1)$ og $\alpha(s+h_2)$.

(opg. 1.3.4)



$$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad I = (0, \pi), \quad \alpha(t) = (\sin(t), \cos(t) + \ln(\tan(\frac{t}{2})))$$

a)

Påstand: α er en glat parametriseret kurve

Bevis: Vi skal vise $\alpha(t) \in C^\infty(I)$, dvs. $\langle \alpha(t), e_1 \rangle, \langle \alpha(t), e_2 \rangle \in C^\infty(I)$

Det er oplagt, at $\langle \alpha(t), e_1 \rangle \in C^\infty(I)$, da $\sin(t) \in C^\infty(I)$ ✓

$$D[\ln(\tan(t/2))] = \frac{1}{\tan(t/2)} \frac{1}{\cos^2(t/2)} \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \sin(t/2) \cos(t/2)} = \frac{1}{\sin(t)} \quad \checkmark$$

↑
kædereglen

Da $\sin(I) \subseteq \mathbb{R}_+$, $\sin(t) \in C^\infty(I)$ og

$x \mapsto 1/x \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ følger af kædereglen, produktreglen, at $1/\sin(t) \in C^\infty(I)$.

Da $\cos(t) \in C^\infty(I)$ fås

$$\langle \alpha(t), e_2 \rangle = (\cos(t) + \ln(\tan(t/2))) \in C^\infty(I) \quad \checkmark$$

(man skal vel lige bemærke, at I er en åbent interval på den reelle akse)

□

$$\text{Vi ser, } \alpha'(t) = (\cos(t), -\sin(t) + \frac{1}{\sin(t)}) = (\cos(t), \frac{\cos^2(t)}{\sin(t)}) \quad \checkmark$$

↑
idiotformlen

Påstand: α er regulær på $I \setminus \{\pi/2\}$

Bevis:

$$\alpha'(t) = 0, t \in I \Rightarrow \cos(t) = 0 \wedge \frac{\cos^2(t)}{\sin(t)} = 0$$

Da $\cos(t) \neq 0 \forall t \in I \setminus \{\pi/2\}$ har vi kun én kandidat, $t = \pi/2$

Ved indsettelse fås $\alpha'(\pi/2) = (\cos(\pi/2), \frac{\cos^2(\pi/2)}{\sin(\pi/2)}) = (0, \frac{0}{1}) = (0, 0)$ ✓ □

b)

Påstand: $\theta = t, t \in (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$

Bevis:

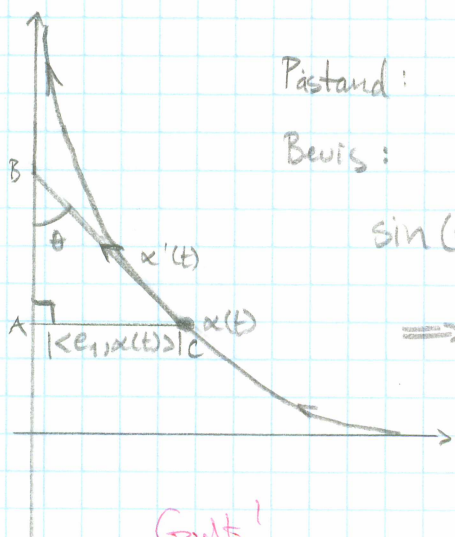
$t \in (0, \pi/2)$:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\langle e_2, \alpha'(t) \rangle}{|e_2| |\alpha'(t)|} = \frac{\cos^2(t)}{\sin(t)} \left(\sqrt{\cos^2(t) + \frac{\cos^4(t)}{\sin^2(t)}} \right)^{-1} \\ &= \frac{\cos^2(t)}{\sin(t)} \left(\sqrt{\cos^2(t) \left(1 + \frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)} \right)} \right)^{-1} = \frac{\cos^2(t)}{\sin(t)} \left(\sqrt{\frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)}} \right)^{-1} \\ &\stackrel{+}{=} \frac{\cos^2(t)}{\sin(t)} \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \cos(t) \end{aligned}$$

$\cos(t), \sin(t) > 0, t \in (0, \pi/2)$

Da cosinus er bijektiv på $(0, \pi/2)$ følger det umiddelbart

for $t \in (\pi/2, \pi)$ betragter vi $\langle -e_2, \alpha'(t) \rangle$ og skal desuden huske en fortegnsskiftning ved $*$ ✓ □



Påstand: $|BC| = 1, \forall t \in I \setminus \{\pi/2\}$

Bevis:

$$\sin(\theta) = \sin(t) = \frac{|\langle e_1, \alpha(t) \rangle|}{|BC|} = \frac{\sin(t)}{|BC|}$$

$$\Rightarrow |BC| = 1 \quad \square \quad \checkmark$$

Guldt!

Guld medalje

26/2 - 98

skit



9. februar 1998

Geometri 1.

UGESEDDER NR. 2

Forelæsningerne d. 12. og 13. Februar.

Vi fortsætter med afsnit 1 – 5 om den lokale teori for kurver. Vi vil definere for ethvert punkt på en glat 1-regulær kurve de to fundamentale størrelser, nemlig krumningen og torsionen samt normal og binormal-vektorene, som sammen med tangentvektoren danner det såkaldte Frenet treben. Derefter beviser vi hovedsætningen i den lokale teori af kurver, som siger følgende to ting: En kurve er entydigt bestemt (op til globale symmetrier af det 3-dimensionale euklidiske rum) af sin krumning og torsion. For vilkårlige differentiable funktioner k og τ defineret på et åbent interval, således k er positiv, finder der en glat kurve defineret på det samme interval med krumning k og torsion τ .

Hvis tiden tillader det, vil vi også gennemgå 1 – 6, som omhandler den lokale kanoniske form af en kurve i koordinatsystemet specificeret ved Frenet trebenet.

Øvelsesopgaver 16. – 20. Februar:

1.2.5, 1.3.2, 1.4.10., 1.5.1, 1.5.2, 1.5.4.

Afleveringsopgaver 16. – 20. Februar:

1.3.4 (Vinklen, som på figur 1-9 er angivet med t er en trykfejl. Derimod er det rigtigt at t er vinklen mellem y -aksen og $\alpha'(t)$.)

Der vil blive stillet 12 afleveringsopgaver i løbet af semestret. For at kunne indstille sig til eksamen er det en forudsætning, at 8 af opgaverne er afleveret til instruktoren og godkendt.

Jørgen Ellegaard Andersen

Proving is believing!

Whitney (Note 1)

$$I = [0, 1]$$

Def.

En lukket plan kurve er en differentiabel afbildning $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, som opfylder

- 1) Den er lukket $f(0) = f(1)$, $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- 2) Den er regulær $(\forall t \in I : f'(t) \neq 0)$

Def. (deformation / ækvivalens)

To lukkede plane kurver f_0, f_1 er ækvivalente, og vi skriver $f_0 \sim f_1$, hvis der findes en differentiabel afb.

$F: I \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$, som opfylder

$$1) \quad i = 0, 1 : F|_{I \times \{i\}} = f_i$$

$$2) \quad \forall s \in I \text{ er } F|_{I \times \{s\}} \text{ en lukket plan kurve}$$

Def. en afb. F , som opfylder ovenstående, kaldes en isotopi

Geometri 1, uge 7, TØ nr. 2

opg. 1.2.5

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ betegner en parametriseret kurve

$\forall t \in I: \alpha'(t) \neq 0$ (regulær)

Påstand: $|\alpha(t)|$ er en positiv reel konstant hvis $\forall t \in I: \alpha(t) \cdot \alpha'(t) = 0$

Beweis:

' $\Rightarrow$ ':

$|\alpha(t)|$ er en positiv reel konstant $\Rightarrow |\alpha(t)|^2$ er en positiv reel konstant

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} |\alpha(t)|^2 = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (\alpha(t) \cdot \alpha(t)) = 0 \Rightarrow 2\alpha(t) \cdot \alpha'(t) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(t) \cdot \alpha'(t) = 0, \text{ for alle } t \in I$$

' $\Leftarrow$ ':

$$\alpha(t) \cdot \alpha'(t) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (\alpha(t) \cdot \alpha(t)) = 2\alpha(t) \cdot \alpha'(t) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} |\alpha(t)|^2 = 0$$

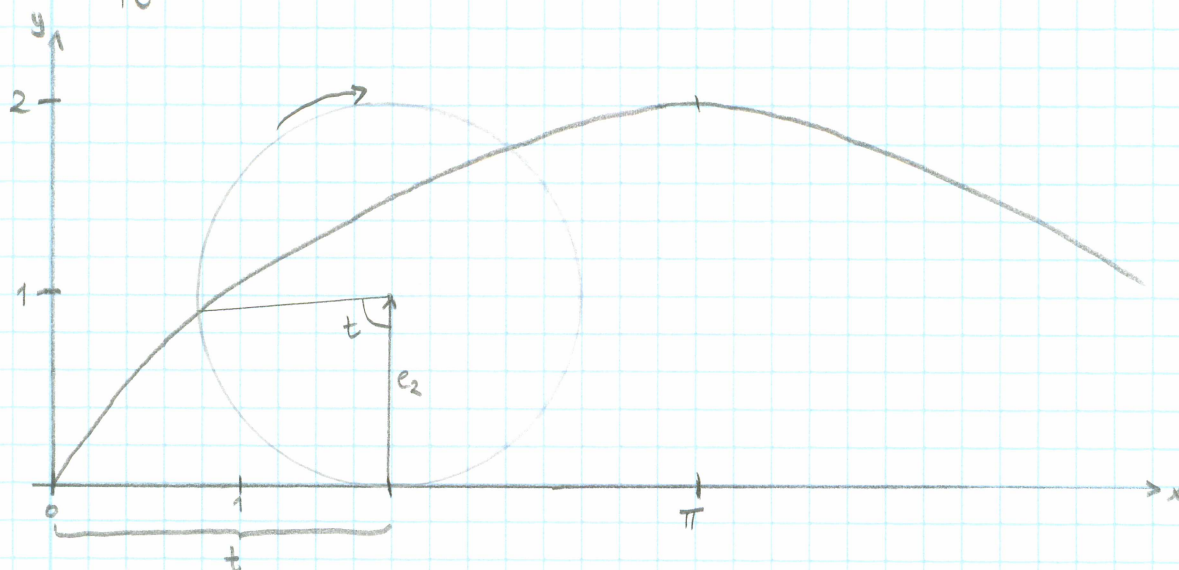
$\Rightarrow |\alpha(t)|^2$ er en reel konstant $\Rightarrow |\alpha(t)| \in \mathbb{R}_+$ er en reel konstant, for alle $t \in I$

$$|\alpha(t)| \neq 0: |\alpha(t)| = 0, \forall t \in I \Rightarrow \alpha(t) = 0 \quad \forall t \in I \Rightarrow \alpha'(t) = 0, \forall t \in I \quad \begin{matrix} \text{m} \\ \text{f} \end{matrix}$$

(I åben)

□

opg. 1.3.2



$$a) \quad r(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix} \Rightarrow r'(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$r'(t) = 0 \Rightarrow 1 - \cos(t) = 0 \wedge \sin(t) = 0 \Rightarrow \cos(t) = 1 \wedge \sin(t) = 0$$

$$\Rightarrow t = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$r'(2\pi n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

Dvs. r 's singulære pkt. er af orden 0 er $t = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

b)

Valg $t_0 = 0$

$$s(2\pi) = \int_0^{2\pi} |r'(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2(t) - 2\cos(t) + \sin^2(t)} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos(t))} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(t)} dt$$

↑
identifikan

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \cdot \sin^2(t/2)} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin(t/2) dt$$

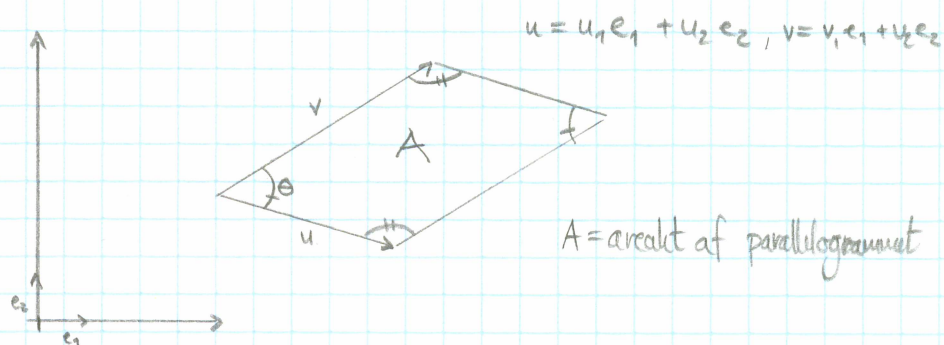
$\sin(t/2) \geq 0$
 $t \in]0, 2\pi[$

$$= 2 \cdot [-2\cos(t/2)]_0^{2\pi} = -4 [\cos(t/2)]_0^{2\pi} = -4(-2) = 8$$

opg. 1.4.10

[For notation see opg. formuleringen]

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^2 + u_2^2 & u_1 v_1 + u_2 v_2 \\ v_1 u_1 + v_2 u_2 & v_1^2 + v_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ v \cdot u & v \cdot v \end{pmatrix} \quad (*)$$



$$\begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ v \cdot u & v \cdot v \end{vmatrix} = |u|^2 |v|^2 - |u|^2 |v|^2 \cos^2 \theta = (|u| |v| \sin \theta)^2 = A^2 \quad (\text{cf. Do Cam. 513})$$

$\Downarrow$

$$A^2 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2$$

Hervedfor defineres orienteringen af areal ($\text{sign} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$)

opg. 1.5.1

a)

Jvf. De Carus s.6 skal vi vise, at $|\alpha'(s)| \equiv 1, s \in \mathbb{R}$

$$\alpha'(s) = \left(-\frac{a}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c} \right), s \in \mathbb{R}$$

$$|\alpha'(s)|^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \equiv 1 \Rightarrow |\alpha'(s)| \equiv 1, s \in \mathbb{R}$$

b)

$$\alpha''(s) = \left(-\frac{a}{c^2} \cos\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{a}{c^2} \sin\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right), \alpha''(s) \neq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Valg $n(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{c}\right), -\sin\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right)$, da $|n(s)| = 1$ ser vi, at

$$k(s) = \frac{|a|}{c^2},$$

c)

Det osculerende plan har normalvektor

$$\begin{aligned} \alpha'(s) \wedge n(s) &= \left(\frac{b}{c}, -\cos\left(\frac{s}{c}\right) \frac{b}{c}, \frac{a}{c} \sin^2\left(\frac{s}{c}\right) + \frac{a}{c} \cos^2\left(\frac{s}{c}\right) \right) \\ &= \left(\frac{b}{c}, -\cos\left(\frac{s}{c}\right) \frac{b}{c}, \frac{a}{c} \right) \end{aligned}$$

$$\alpha(0) = (a, 0, 0)$$

ligning for det osculerende plan

$$\left(\frac{b}{c}, -\cos\left(\frac{s}{c}\right) \frac{b}{c}, \frac{a}{c} \right) \cdot (\bar{x} - x(s), \bar{y} - y(s), \bar{z} - z(s)) = 0 \quad (t(s) = (x, y, z)(s))$$

b2)

$$\begin{aligned} b'(s) &= t(s) \wedge n'(s) = \alpha'(s) \wedge \left(\frac{1}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{1}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right) \\ &= \left(\frac{b}{c^2} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c^2} \sin\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right) \end{aligned}$$

$$T(s) = \frac{-b}{c^2}$$

10

d)

$$n(s) \cdot e_3 = |n(s)| |e_3| \cdot \cos \theta = \cos \theta$$

$\Downarrow$

$$0 = \cos \theta$$

$\Downarrow$

$$\theta = \pi/2 \quad (\text{husk } \theta \in [0, \pi])$$

Da $\alpha(s) + a n(s) = (0, 0, \frac{b}{c})$
ser vi desuden at normal-
linien møder z-aksen

e)

$$\alpha'(s) e_3 = |\alpha'(s)| |e_3| \cos \theta = \cos \theta$$

$\Downarrow$

$$\frac{b}{c} = \cos \theta$$

$\Downarrow$

$$\theta = \text{konstant} = \arccos\left(\frac{b}{c}\right) \in [0, \pi]$$

opg. 1.5.2

Antag $k(s) \neq 0, s \in I$, da er $J(s)$ def. : $J: I \rightarrow \mathbb{R}$:

$$b'(s) = J(s)n(s)$$

$$\begin{aligned} b'(s) &= t(s) \wedge n'(s) = \alpha'(s) \wedge \frac{d}{ds} \left(\frac{\alpha''(s)}{k(s)} \right) \\ &= \alpha'(s) \wedge \left(\frac{\alpha'''(s)}{k(s)} - \frac{\alpha''(s)}{(k(s))^2} k'(s) \right) \end{aligned}$$

$$\downarrow$$
$$b'(s) \cdot \alpha'''(s) = - \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{(k(s))^2} k'(s) \quad (\alpha)$$

$\alpha''' \perp \alpha' \wedge \alpha''$

$$\alpha'''(s) = \frac{d}{ds} \alpha''(s) = k'(s)n(s) + k(s)n'(s)$$

$\downarrow$

$$J(s)n(s) \cdot \alpha'''(s) = J(s)k'(s) \quad (\beta)$$

$n \perp n'$

$$\alpha \text{ og } \beta \Rightarrow J(s) = - \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{(k(s))^2} \cdot \alpha'''(s)$$

opg. 1.5.4

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ (α en kurve)

Da alle normallinierne passerer gennem et pkt. i $\mathbb{R}^3$
gælder: $\exists c \in \mathbb{R}^3 \quad \alpha(s) + \gamma(s)n(s) = c, \quad \forall s \in I$

↓

$$\alpha'(s) + \gamma'(s)n(s) + \gamma(s)n'(s) = 0$$

|| Frenet ligningerne

$$t'(s) + \gamma'(s)n(s) + \gamma(s)(-k(s)t(s) - \tau(s)b(s))$$

||

$$(1 - \gamma k)t + \gamma' n - \tau \gamma b$$

↓

$$1 = \gamma k, \quad \tau \equiv 0, \quad \gamma' \equiv 0$$

Dvs. α er indeholdt i et plan ($\tau \equiv 0$)

$$1 = \gamma k \Rightarrow \gamma = \frac{1}{k}, \quad \gamma' \equiv 0 \Rightarrow \gamma = \text{konstant}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k} = \text{konstant} = \text{krumningsradius} \Rightarrow k = \text{konstant}$$

Af overvejelserne s. 19 i Do Carmo fremgår, at en cirkel (radius r)
har konst. krumningsradius $r = 1/k$, $\tau = \text{konstant}$, $k = \text{konstant}$.

Af Den lokale kurveteoris fundamentalteorem fremgår, derfor,
at hvis $\tau = \text{konstant}$, $k = \text{konstant}$ da er kurven en cirkel
med radius $r = 1/k$.

(i brugen af hovedsetn. ovenfor har vi implicit antaget at
de indgående kurver er parametriseret ved bue længde

— husk desuden at τ/k er invariant under ændring
af orientering)

Institute of Mathematics • University of Aarhus

Ny Munkegade • 8000 Aarhus C • Denmark



2. februar 1998

Geometri 1.

UGESEDDER NR. 1

Bogen:

Bogen vi skal bruge er Manfredo P. Do Carmo: "Differential Geometry of Curves and Surfaces", Prentice-Hall, 1976. Den kan købes i vores boghandel. I løbet af kurset vil der desuden udkomme supplerende noter.

Forelæsningerne:

Der er forelæsninger i kurset

Torsdag kl. 14 – 16, Aud. F,

Fredag kl. 11 – 13, Aud. D1.

Øvelserne:

Der er tre timers øvelser hver uge. Holdlisterne for øvelsesholdene er opslået uden for Aud. D1.

Ugesedlerne:

Ugesedlen udkommer hver tirsdag. Den indeholder en oversigt over hvad forelæsningerne torsdag og fredag vil omhandle, samt en oversigt over øvelse og afleveringsopgaver for den følgende uge.

Hjemmesiden:

Kurset har en hjemmeside:

<http://www.mi.aau.dk/~andersen/geo1/>

Her kan man finde yderligere information om kurset og emnet geometri. Ugesedlerne er også tilgængelig her. Endvidere vil de supplerede noter vi skal bruge også kunne hentes her.

Jeg forestiller mig at hjemmesiden vil udvikle sig gennem semestret, så

check it out!

VEND!

Geometri 1, uge 6, TØ nr. 1

opg. 1.2.1

$$\underline{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \cos(-t + \pi/2) \\ \sin(-t + \pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t + \pi/2) \\ \sin(\pi/2 - t) \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

opg. 1.2.2

$$I \subseteq \mathbb{R}, I \text{ åben} \quad \forall t \in I: \underline{\alpha}(t) \neq \underline{0}$$

$$t_0 \in I \quad \forall t \in I: |\underline{\alpha}(t_0)| \leq |\underline{\alpha}(t)| \quad (t_0 \text{ indre pkt. trivelt da } I \text{ åben})$$

$$\underline{\alpha}'(t_0) \neq \underline{0}$$

$$\text{Påstand: } \underline{\alpha}(t_0) \perp \underline{\alpha}'(t_0) \iff \underline{\alpha}(t_0) \cdot \underline{\alpha}'(t_0) = 0$$

Beweis:

$$\forall t \in I: |\underline{\alpha}(t_0)| \leq |\underline{\alpha}(t)| \Rightarrow |\underline{\alpha}(t_0)|^2 \leq |\underline{\alpha}(t)|^2$$

$$|\underline{\alpha}(t)|^2 = \underline{\alpha}(t) \cdot \underline{\alpha}(t) \in C^1(I) \text{ da } \underline{\alpha}(t) \in C^1(I)$$

$$\text{Da } t_0 \text{ er et indre pkt. fås: } \frac{d}{dt}(\underline{\alpha}(t_0) \cdot \underline{\alpha}(t_0)) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\underline{\alpha}(t_0) \cdot \underline{\alpha}(t_0)) = 2 \underline{\alpha}(t_0) \cdot \underline{\alpha}'(t_0) = 0 \Rightarrow \underline{\alpha}(t_0) \cdot \underline{\alpha}'(t_0) = 0$$

□

opg. 1.2.3

$$\underline{\alpha}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \alpha_i = (\underline{\alpha} \cdot \underline{e}_i)$$

$$\underline{\alpha}'' \equiv \underline{0} \quad , \Rightarrow \alpha_i'' \equiv 0 \Rightarrow \alpha_i = a_i \cdot t + b_i \quad , \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

konverger til
middelverdisætn.
og Analysens FT

opg. 1.3. 10

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, α er en parametriseret, diff. kurve, $[a, b] \subset I$, $a \neq b$

$$\alpha(a) = p, \alpha(b) = q$$

a)

Påstand: $v \in \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$: $(q-p) \cdot v = \int_a^b \alpha'(t) \cdot v dt \leq \int_a^b |\alpha'(t)| dt$

Bevis:

$$(q-p) \cdot v = (\alpha(b) - \alpha(a)) \cdot v = \int_a^b \alpha'(t) \cdot v dt \leq \left| \int_a^b \alpha'(t) \cdot v dt \right|$$

+ Analysis FT

$$\leq \int_a^b |\alpha'(t) \cdot v| dt \leq \int_a^b |\alpha'(t)| |v| dt \leq \int_a^b |\alpha'(t)| dt$$

indskudsreglen
+ trekanthuligheden
for $a < b$

↑
Cauchy-Schwarz

□

b)

$v := \frac{q-p}{|q-p|}$, veldef $\alpha(a) \neq \alpha(b)$

$$\text{Påstand: } |\alpha(b) - \alpha(a)| \leq \int_a^b |\alpha'(t)| dt$$

Bevis: $\alpha(b) = \alpha(a)$ oplygt, antag $\alpha(a) \neq \alpha(b)$

Påstanden følger af a)

□

$$+ \frac{d}{dt} (\alpha(t) \cdot v) = \alpha'(t) \cdot v + \alpha(t) \cdot v' = \alpha'(t) \cdot v$$

opg. 1.4.1

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 12 = -10$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 8 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$
$$= -47 + 62 + 24 = 39$$

1.4.12

$0 \neq v \in \mathbb{R}^3, w \in \mathbb{R}^3$ (* ellers må $w=0$ og påstanden ville være trivial)

Påstand: $\exists u \in \mathbb{R}^3: u \times v = w \iff v \perp w (\iff v \cdot w = 0)$

' $\implies$ '
 $v \cdot w = w \cdot v = (u \times v) \cdot v = \det(u, v, v) = 0$

' $\impliedby$ '

$k(v \times w), k \in \mathbb{R}$

$$k(u \times w) \times v = k(w \cdot v)w - (w \cdot v) \cdot v = k|v|^2 w$$

Vælg $u = \frac{1}{|v|^2} (v \times w)$ ($v \neq 0 \implies |v|^2 \neq 0$) □

Af sætn. ovenfor og egenskaberne for $\times$ -produktet følger $u \in \{w\}^\perp$, da $v, v \times w \in \{w\}^\perp$, $v, v \times w$ er lin. uafh. og $\dim(\{w\}^\perp) = 2$ er $v, v \times w$ en basis for $\{w\}^\perp$

Dvs. $\exists a, b \in \mathbb{R}: u = av + b(v \times w)$ (en løsn. er $a=0, b=\frac{1}{|v|^2}$)

Lad u være som i ovenstående sætn., dvs. $u \times v = w, v \perp w$
 Heraf fås

$$|u|^2 = |av|^2 + |b(v \times w)|^2 = a^2|v|^2 + b^2|v \times w|^2 = |v|^2(a^2 + b^2|w|^2)$$

pyth. + De Comp. 1.4

$$\text{Dette bruges i } |w|^2 = |u \times v|^2 = |u|^2|v|^2 \cdot \sin^2 \theta = |u|^2|v|^2 \frac{b^2}{a^2 + b^2}$$

$v \perp v \times w$

$$= |v|^4(a^2 + b^2|w|^2) \frac{b^2}{a^2 + b^2}$$

$\Downarrow$

$$a^2|w|^2 + b^2|w|^2 = a^2|v|^4b^2 + b^4|v|^4|w|^2$$

$\Downarrow$

$$a^2(|w|^2 - b^2|v|^4) = b^2|w|^2(b^2|v|^4 - 1) \implies |a| = \sqrt{\frac{b^2|w|^2(b^2|v|^4 - 1)}{|w|^2 - b^2|v|^4}} \quad \text{f.eks.}$$

Dette giver en metode til at finde $|a|$ når b er givet således, at $|u \times v| = |w|$ (bemærk b er vilkårlig)

Fortegnet for a :

Da $a=0$, $b = \frac{1}{|v|^2} > 0$ giver en korrekt orientering af u for, at orienteringen af $av + b(v \times w)$ skal være den samme som $u = \frac{1}{|v|^2}$.

For $a=0$, $b = \frac{1}{|v|^2}$ for desuden, at a kan være vilkårlig

$$\left(\begin{array}{l} \text{el. } u_0 \times v = w \\ (u_0 + r v) \times v = u_0 \times v = w, \forall r \in \mathbb{R} \\ \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u \times v = w\} = \{u_0 + r v \mid r \in \mathbb{R}\} \end{array} \right)$$