WHITNEY'S SÆTNING FOR PLANE KURVER, N1

Noter om lukkede plane kurver. Geometri I, JEA.

1.1. Lukkede plane kurver og isotopier.

Lad $I = [0, 1]$. Lad os præcisere, hvilke lukkede plane kurver vi en intereseret i.

Definition 1.1. *En* lukket plan kurve *er en differentiabel afbildning* $f : I \to \mathbb{R}^2$, *som opfylder følgende to betingelser:*

1. *Den er* lukket*:* $f(0) = f(1), f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1)\ \forall k \in \mathbb{N}$.
2. *Den er* regulær*:* $f'(t) \neq 0\ \forall t \in I$.

Eksempel.

1.1. Cirklen: For $t \in I$ definerer vi

$$c_1(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)).$$

Dette parametriserer enhedscirklen.

1.2. Den n-foldte dobling af cirklen: Lad $n \in \mathbb{Z}$, så $n \neq 0$. For $t \in I$ definerer vi

$$c_n(t) = (\cos(2\pi nt), \sin(2\pi nt)).$$

Når t løber fra 0 til 1 i I, løber c_n rundt langs enhedscirklen n gange.

1.3. Lad

$$c_0(t) = (\sin(2\pi t), \sin(4\pi t)),\ \ \forall t \in I.$$

Vi har da at

$$c_0'(t) = (2\pi\cos(2\pi t), 4\pi\cos(4\pi t)) \neq 0$$

idet der for $t \in I$ gælder

$$\cos(2\pi t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4} \text{ eller } \frac{3}{4}$$

og

$$\cos(4\pi t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8} \text{ eller } \frac{7}{8}.$$

Altså c_0 er en lukket plan kurve.

Vi ønsker nu at indføre en ækvivalensrelation $\sim$ på mængden af lukkede plane kurver. To lukkede plane kurver skal være ækvivalente, hvis den ene kan deformeres over i den anden. Det formaliserer vi på følgende måde.

Definition 1.2. *To lukkede plane kurver f_0 ~~and~~ og f_1 er ækvivalente, og vi skriver $f_0 \sim f_1$, hvis der findes en differentiabel afbildning $F : I \times I \to \mathbb{R}^2$, som opfylder*

1. *For $i = 0, 1$ har vi at $F|_{I\times\{i\}} = f_i$.*
2. *For alle $s \in [0, 1]$ er $F|_{I\times\{s\}}$ en lukket plan kurve.*

Bemærkning.
En afbildning med samme egenskaber som F i denne definition kaldes en isotopi fra f_0 til f_1.

Eksempel.
1.4. Lad $r : I \to \mathbb{R}_+$ være en differentiabel funktion således $r(0) = r(1)$ og $r^{(k)}(0) = r^{(k)}(1)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Lad $c_1(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ være enhedscirklen og $f(t) = r(t)c_1(t)$. ~~Hvis~~ $\cancel{r'(t) \neq 0, \forall t \in I}$ så er f en lukket plan kurve. Vi påstår at c_1 er ækvivalent med f: Betragt

$$F : I \times I \to \mathbb{R}^2$$

givet ved

$$F(t, s) = (sr(t) + (1 - s))c_1(t). \in C^\infty(I\times I, \mathbb{R}^2)$$

Da er $F(t, 0) = c_1(t)$ og $F(t, 1) = f(t)$. Vi udregner

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, s) = sr'(t)c_1(t) + (sr(t) + (1 - s))c_1'(t).$$

Men idet $c_1(t) \perp c_1'(t)$, følger det af antagelserne på r at $\frac{\partial F}{\partial t} \neq 0 \ \forall (t, s) \in I \times I$. Det er også let at se at $F|_{I\times\{s\}}$ virkelig er en lukket plan kurve. Altså F er en isotopi fra c_1 til f.
Dette eksempel passer fint med vores ønske om at $\sim$ skal formalisere begrebet deformation.

Øvelse.
1.1. Bevis at $\sim$ er en ækvivlensrelation. D.v.s. for alle lukkede plane kurver f, g og h skal der gælde at

1. $f \sim f$, refleksiv
2. $f \sim g \Rightarrow g \sim f$ samt symmetriske
3. $f \sim g$ og $g \sim h \Rightarrow f \sim h$. transitivitet

$F_1(2x)$ $F_2(2x-1)$
$0 \to 1/2$ $1/2 \to 1$ + def. på diff.

Af øvelsen har vi altså at $\sim$ klassedeler mængden af lukkede plane kurver. Vi ønsker nu at forstå denne klassedeling. Med andre ord, vi ønsker at forstå, hvornår to lukkede plane kurver er ækvivalente. Whitney's sætning giver svaret på det. Lad os først vise nogle elementære lemmaer.

Lemma 1.3. *Hvis f er en lukket plan kurve og $r \in \mathbb{R}_+$, så er $f \sim rf$.*

Bevis.
Lad $F : I \times I \to \mathbb{R}^2$ være givet ved $F(t,s) = (sr + (1-s))f(t)$. Da er

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,s) = (sr + (1-s))f_1'(t),$$

så $\frac{\partial F}{\partial t} \neq 0 \ \forall (s,t) \in I \times I$. Det er klart at $F|_{I\times\{s\}}$ er en lukket plan kurve. Altså F er en isotopi fra f til rf.

□

Lemma 1.4. *Lad $\phi : I \to I$ være en differentiabel afbildning således $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$, $\phi^{(k)}(0) = \phi^{(k)}(1)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ og $\phi'(t) \neq 0 \ \forall t \in I$. For vilkårlig lukket plan kurve f har vi at $f \sim f \circ \phi$.*

15

Bevis.
Idet $\phi(0) < \phi(1)$ og $\phi'(t) \neq 0$ må $\phi'(t) > 0 \ \forall t \in I$. Betragt så følgende differentiable afbildning

$$F : I \times I \to \mathbb{R}^2$$

givet ved

$$F(t,s) = f(s\phi(t) + (1-s)t).$$

Vi ser at

$$\frac{\partial F}{\partial t} = f'(s\phi(t) + (1-s)t)(s\phi'(t) + (1-s)) \neq 0$$

idet

$$0 < \phi'(t) = \frac{s-1}{s}$$

ikke kan løses for $(t,s) \in I \times I$. Endvidere ses det let at F opfylder resten af betingelserne for at være en isotopi fra f til $f \circ \phi$.

□

Lemma 1.5. *Lad f være en lukket plan kurve. Da er f ækvivalent med en lukket plan kurve g som er parametriseret ved buelængde.*

Bevis.
Lad $L = \int_0^1 |f'(t)|dt$. Sæt $f_1 = \frac{1}{L}f$. Da er f_1 en lukket plan kurve og $f_1 \sim f$ ifølge lemma 1.3.

Lad $\phi : I \to I$ være den differentiable afbildning bestemt ved at $f_1 \circ \phi$ er parametriseret ved buelængde og $\phi(0) = 0$. Bemærk at ϕ er den inverse funktion til $t \mapsto \int_0^t |f_1'(\tau)|d\tau$. Derfor er ϕ defineret på I og $\phi'(t) > 0 \ \forall t \in I$. Endvidre er $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$ og $\phi^{(k)}(0) = \phi^{(k)}(1) \ \forall k \in \mathbb{N}$. Da er $g = f_1 \circ \phi$ en lukket plan kurve parametriseret ved buelængde og af lemma 1.4 følger af $f_1 \sim g$. Altså $f \sim g$.

□

Proposition 1.6. *Lad f være en lukket plan kurve. Da findes der en lukket plan kurve g som er ækvivalente med f og som opfylder at*

1. $g(0) = (0,0)$,
2. $g'(0) = (1,0)$ *og*
3. g *er parametriseret ved buelængde.*

Bevis.
Lad f være en lukket plan kurve. Af lemma 1.5 findes der en lukket plan kurve f_0 som er ækvivalent med f og f_0 er parametriseret ved buelængde. Lad $\theta_0 \in [0,1)$ være bestemt ved $f_0'(0) = (\cos(2\pi\theta_0), \sin(2\pi\theta_0))$ og sæt

$$v = R(-\theta_0) f_0(0),$$

hvor vi lader $R(\varphi)$ være rotationen med med vinklen $2\pi\varphi$:

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\varphi) & -\sin(2\pi\varphi) \\ \sin(2\pi\varphi) & \cos(2\pi\varphi) \end{pmatrix}.$$

Lad nu

$$F(t,s) = R(-s\theta_0) f_0(t) - sv \ \forall (t,s) \in I \times I.$$

Det er klart at F er differentiabel og $F|_{I\times\{s\}}$ er en lukket plan kurve, så F er en isotopi fra $f_0 = F|_{I\times\{0\}}$ til $g = F|_{I\times\{1\}}$. Altså $f \sim f_0 \sim g$. Vi ser at g er parametriseret ved buelængde, $g(0) = (0,0)$ og $g'(0) = (1,0)$.

$\square$

1.2. Graden af en plan kurve.

For at kunne definere graden af en lukket plan kurve skal vi bruge følgende lemma.

Lemma 1.7. *Lad $g : I \to \mathbb{R}^2$ være en differentiabel afbildning, således $|g(t)| = 1 \ \forall t \in I$. Da findes der en differentiabel funktion $\theta : I \to \mathbb{R}$ således*

$$g(t) = (\cos(2\pi\theta(t)), \sin(2\pi\theta(t))) \ \forall t \in I.$$

Bemærkning.
For en lukket plan kurve f, vil $f'/|f'|$ være en differentiabel funktion som g i lemmaet. En differentiabel funktion $\theta : I \to \mathbb{R}$ således

$$f'(t) = |f'(t)| (\cos(2\pi\theta(t)), \sin(2\pi\theta(t))) \ \forall t \in I,$$

kaldes for en tangentvinkel for f. Sådanne eksisterer per lemma 1.7 og vi observerer i det tilfælde at $\theta(1) - \theta(0) \in \mathbb{Z}$, idet f er lukket.

Bevis.
Lad $\theta_0 \in [0,1)$ være bestemt af $g(0) = (\cos(2\pi\theta_0), \sin(2\pi\theta_0))$. Definer differentiable funktioner $x, y : I \to \mathbb{R}$ ved

$$g(t) = (x(t), y(t)) \ \forall t \in I.$$

polære koor: $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$

$\theta' = \theta'\cos^2\theta + \theta'\sin^2\theta = xy' - x'y$

Sæt $\theta : I \to \mathbb{R}$ til

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{1}{2\pi}\int_0^t (x(s)y'(s) - y(s)x'(s))\, ds.$$

Betragt så

$$\begin{aligned} E(t) &= (x(t) - \cos(2\pi\theta(t)))^2 + (y(t) - \sin(2\pi\theta(t)))^2 \\ &= 2 - 2\left(x(t)\cos(2\pi\theta(t)) + y(t)\sin(2\pi\theta(t))\right). \end{aligned}$$

Lad os nu udregne E.

$$\begin{aligned} E' &= 2(-x2\pi\sin(2\pi\theta)\theta' + y2\pi\cos(2\pi\theta)\theta' + x'\cos(2\pi\theta) + y'\sin(2\pi\theta)) \\ &= -y'\sin(2\pi\theta)(x^2+y^2) - x'\cos(2\pi\theta)(x^2+y^2) + x'\cos(2\pi\theta) + y'\sin(2\pi\theta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Men idet $E(0) = 0$ følger lemmaet.

□

Lemma 1.8. *Hvis F er en isotopi af lukkede plane kurver, så findes der en differentiabel funktion*

$$\theta : I \times I \to \mathbb{R},$$

således at $\theta|_{I\times\{s\}}$ er en tangentvinkelfunktion for den lukkede plane kurve $F|_{I\times\{s\}}$.

Bevis.
Vælg $\theta_{(0,0)}$ så $\frac{\partial F}{\partial t}(0,0)/|\frac{\partial F}{\partial t}(0,0)| = (\cos(2\pi\theta_{(0,0)}), \sin(2\pi\theta_{(0,0)}))$. Definer differentiable funktioner $x, y : I \times I \to \mathbb{R}$ ved

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{|\frac{\partial F}{\partial t}|}(t,s) = (x(t,s), y(t,s))\ \forall (t,s) \in I \times I.$$

Lad så

$$\begin{aligned} \theta(t,s) &= \theta_{(0,0)} + \int_0^s \left(x(0,\sigma)\frac{\partial y}{\partial s}(0,\sigma) - y(0,\sigma)\frac{\partial x}{\partial s}(0,\sigma)\right) d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_0^t \left(x(\tau,s)\frac{\partial y}{\partial t}(\tau,s) - y(\tau,s)\frac{\partial x}{\partial t}(\tau,s)\right) d\tau. \end{aligned}$$

!??

Af argumenter som er analoge til beviset for lemma 1.7 ses at $\theta|_{I\times\{s\}}$ er en tangentvinkelfunktion for den lukkede plane kurve $F|_{I\times\{s\}}$. Det er klart fra formlen for θ, at den er differentiabel.

□

Definition 1.9. *Lad f være en lukket plan kurve og lad θ være en tangentvinkelfunktion for f. Graden for $d(f) \in \mathbb{Z}$ for f defineres da til at være*

$$d(f) = \theta(1) - \theta(0).$$

(husk θ entydigt bestemt op til $\mathbb{Z}\cdot 2\pi$)

Veldef. eks. jvf. L 1.7 entydighed jvf bm. efter lem. 1.7

Bmk.

Hvis f er en lukket plan kurve parametriseret ved buelængde, så ser vi af formlen for tangentvinkelfunktionen i beviś for lemma 1.7, at $d(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 |f'(t), f''(t)|\, dt$, hvor $|(f'(t), f''(t)|$ er determinanten af 2x2 matricen $(f'(t), f''(t))$.

Invariant: M mængde, og $\sim$ en ækvivalensrel. på M
En invariant (af $\sim$) er en fkt. $G: M \to N$
således at hvis $m_1 \sim m_2 \Rightarrow G(m_1) = G(m_2)$

Bemærkning.
Definitionen af $d(f)$ afhænger ikke af valget af tangentvinkelfunktionen.

Θ er entydigt bestemt op til et helt antal omdrejn.
Dvs. $\exists p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$:
$\hat{\Theta} = \Theta + p$

Eksempel.
1.5. Betragt den n-folde double c_n af cirklen:

$$c_n(t) = (\cos(2\pi nt), \sin(2\pi nt)).$$

Vi ser at tangentvinklen for c_n er $\theta_n(t) = nt \overset{+1/4}{}$. Altså har c_n grad $d(c_n) = n$.

1.6. Hvis f er en lukket plan kurve , så kan vi definere en ny lukket plan kurve ved $\tilde{f}(t) = f(1-t)\ \forall t \in I$. Vi ser at $\tilde{f}'(t) = -f'(1-t)$. Hvis nu θ er en tangentvinkel for f og $\tilde{\theta}$ er en tangentvinkel for $\tilde{f}$, så har vi altså at $2(\tilde{\theta}(t) - \theta(1-t)) \in \mathbb{Z}$, uafhængig af t per kontinuitet. Da har vi at

$$d(f) = \theta(1) - \theta(0) = \tilde{\theta}(0) - \tilde{\theta}(1) = -d(\tilde{f}).$$

1.7. Betragt $c_0(t) = (\sin(2\pi t), \sin(4\pi t))$. Lad θ_0 være tangentvinkelfunktionen for c_0. Idet $c_0(1-t) = -c_0(t)$ følger $c_0'(1-t) = c_0'(t)\ \forall t \in I$. Lad nu $\tilde{c}_0(t) = c_0(1-t)$. Af forrige eksempel er $d(c_0) = -d(\tilde{c}_0)$. Men $\tilde{c}_0'(t) = -c_0'(1-t) = -c_0'(t)$, så $2(\tilde{\theta}_0(t) - \theta_0(t)) \in \mathbb{Z}$ og derfor konstant, hvor $\tilde{\theta}_0$ er tangentvinkelfunktionen for $\tilde{c}_0$. Da følger at

$$d(c_0) = \theta_0(1) - \theta_0(0) = \tilde{\theta}_0(1) - \tilde{\theta}_0(0) = d(\tilde{c}_0).$$

Vi kan altså konkludere at $d(c_0) = 0$.

Lemma 1.10. *Lad f og g være lukkede plane kurver. Da har vi at*

$$f \sim g \Rightarrow d(f) = d(g).$$

(d er en invariant af lukkede plane kurver)

Bevis.
Lad F være en isotopi fra f til g. Lad $\theta : I \times I \to \mathbb{R}$ være tangentvinkelfunktionen for F som konstrueret i lemma 1.8. Vi bemærker at afbildningen $s \mapsto d(F|_{I\times\{s\}}) = \theta(1,s) - \theta(0,s)$ er kontinuert. Men da $d(F|_{I\times\{s\}}) \in \mathbb{Z}$, må denne afbildning være konstant, altså

skæringssætn.

$$d(f) = d(F|_{I\times\{0\}}) = d(F|_{I\times\{1\}}) = d(g).$$

□

1.3. Whitney's sætning.

Sætning 1.11 (Whitney). *Lad f og g være lukkede plane kurver. Da kan f deformeres over i g hvis og kun hvis f og g har den samme grad, altså*

$$f \sim g \Leftrightarrow d(f) = d(g).$$

(Graden er en fuldstændig el. klassificerende invariant af lukkede plane kurver
Hvis f er en lukket plan kurve, $\exists! n \in \mathbb{Z}$ så $f \sim c_n$)
[c_n er listen af ækvivalensklasser]

Whitney skriver selv i sin artikel [2], at det faktisk var W.C. Graustein som foreslog denne sætning, samt et bevis for den til Whitney. Sætning kendes dog udelukkende under navnet Whitney idag.

Vi skal bruge følge lemma i beviset for Whitney's sætning.

Lemma 1.12. *Lad $\theta : I \to \mathbb{R}$ være en differentiabel funktion og definer den differentiable funktion $f : I \to \mathbb{R}^2$ ved*

$$f(t) = (\cos(2\pi\theta(t)), \sin(2\pi\theta(t))).$$

Da er

$$\left| \int_0^1 f(t)dt \right| = 1 \text{ hvis og kun hvis } \theta'(t) = 0\ \forall t \in I.$$

Bevis.

jf trekantsulighed. for integraler

Lad $v = \int_0^1 f(t)dt$. Det er klart at $|v| \leq 1$ og hvis θ er konstant, så er $|v| = 1$. Antag nu $|v| = 1$. Da ses at

$= |\int (v_1 \cdot f_1(t) + v_2 \cdot f_2(t)) dt| = |\int \langle v, f(t) \rangle dt|$

$$1 = \left| v \cdot \int_0^1 f(t)dt \right| \leq \int_0^1 |v||f(t)||\cos\varphi(t)|dt = \int_0^1 |\cos\varphi(t)|dt,$$

hvor $\varphi(t)$ er vinklen mellem v og $f(t)$. Hvis θ ikke er konstant, så er φ heller ikke konstant. Da vil der findes et åbent interval J af I og et $\epsilon > 0$ så $\varphi(t) > \epsilon\ \forall t \in J$. Det følger da at

pr. def af φ er $\varphi \geq 0$

$$\int_0^1 |\cos\varphi(t)|dt < 1.$$

husk $1 < \pi$

Det er en modstrid med det tidligere. Altså θ er konstant.

$\square$

Bevis for Whitney's sætning.

Antag f og g er lukkede plane kurver . Hvis $f \sim g$, så siger lemma 1.10 at $d(f) = d(g)$. Antag omvendt at $d(f) = d(g) = d \in \mathbb{Z}$. Vi ønsker så at vise $f \sim g$.

Af Proposition 1.6 kan vi finde lukkede plane kurver f_0 og f_1 så $f \sim f_0$ og $g \sim f_1$ således

1. $f_i(0) = (0, 0)$,
2. $f_i'(0) = (1, 0)$ og
3. f_i er parametriseret ved buelængde.

Vi skal nu blot bevise at $f_0 \sim f_1$.

Lad θ_i være tangentvinklen for f_i som opfylder at $\theta_i(0) = 0$ og

$$f_i'(t) = (\cos(2\pi\theta_i(t)), \sin(2\pi\theta_i(t))).$$

Per antagelse har vi at

$$\theta_0(1) = d(f_0) = d(f) = d(g) = d(f_1) = \theta_1(1).$$

Lad os definere

$$\theta : I \times I \to \mathbb{R}$$

ved

$$\theta(t,s) = s\theta_1(t) + (1-s)\theta_0(t)$$

og

$$H : I \times I \to \mathbb{R}^2$$

ved

$$H(t,s) = (\cos(2\pi\theta(t,s)), \sin(2\pi\theta(t,s)).$$

Det følger at H er differentiabel. Definer så $F : I \times I \to \mathbb{R}^2$ ved

$$F(t,s) = \int_0^t H(\tau,s)d\tau - t\int_0^1 H(\tau,s)d\tau.$$

Funktionen F er differentiabel og

$$\frac{\partial F}{\partial t}(1,s) - \frac{\partial F}{\partial t}(0,s) = H(1,s) - H(0,s) = 0$$

idet

$- \theta_0(0)$ $(=0)$

$$\theta(1,s) - \theta(0,s) = s\theta_1(1) + (1-s)\theta_0(1) - (s\theta_1(0) + (1-s)\theta_0(0)) = \theta_0(1) \in \mathbb{Z}.$$

Endvidere ses at

husk $\theta_1(1) = \theta_0(1)$, $\theta_1(0) = \theta_0(0)$

$$F(t,i) = \int_0^t f_i'(\tau)d\tau - t\int_0^1 f_i'(\tau)d\tau = f_i(t) \; \forall t \in I$$

for $i = 0, 1$. Hvis der gælder at

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,s) \neq 0 \; \forall (t,s) \in I \times I,$$

da er F en isotopi fra f_0 til f_1 som ønsket.

Lad os modsat antage der findes $(t_0, s_0) \in I \times I$ så

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t_0, s_0) = 0.$$

Da følger at

$$H(t_0, s_0) = \int_0^1 H(\tau, s_0)d\tau.$$

Af lemma 1.12 ses at funktionen $t \mapsto \theta(t, s_0)$, $t \in I$ er konstant. Da fås, idet $\theta_0(0) = \theta_1(0) = 0$ at

$$s_0\theta_1(t) + (1-s_0)\theta_0(t) = 0 \; \forall t \in I \Rightarrow$$
$$\theta_0(t) = \frac{s_0}{s_0 - 1}\theta_1(t) \; \forall t \in I,$$

idet $s_0 \neq 0, 1$.

f_0, f_1 er jo reg. plan kurver

Hvis $d \neq 0$ er $\theta_0(1) = \theta_1(1) = d \neq 0$, så da kan der ikke findes et sådant s_0. Altså i det tilfælde er F en isotopi mellem f_0 og f_1 og derfor er $f_0 \sim f_1$ som ønsket.

Hvis $d = 0$ og vi har at θ_0 ikke er propositional med θ_1, så har vi igen at F er en isotopi mellem f_0 og f_1, altså $f_0 \sim f_1$ igen som ønsket.

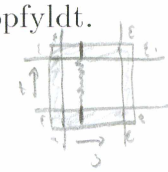
Lad us nu antage vi er i det specielle tilfælde, hvor

$$\theta_0(t) = \frac{s_0}{s_0 - 1}\theta_1(t) \ \forall t \in I.$$

Vi vil da modificere konstruktionen af isotopien som følger.

Lad $c : I \times I \to \mathbb{R}$ være en differentiabel funktion som opfylder: Der findes $\epsilon > 0$ således

1. $c(t, s) = s$, når en af ulighederne $t < \epsilon$, $s < \epsilon$, $1 - t < \epsilon$, $1 - s < \epsilon$ er opfyldt.
2. $c|_{I \times \{s_0\}}$ er ikke konstant lig s_0.



Definer så $\tilde{\theta} : I \times I \to \mathbb{R}$ ved

$$\tilde{\theta}(t, s) = c(t, s)\theta_1(t) + (1 - c(t, s))\theta_0(t) \ \forall (t, s) \in I \times I,$$

og lad $\tilde{H}$ og $\tilde{F}$ være defineret udfra $\tilde{\theta}$ som H og F er defineret udfra θ ovenfor. Idet $\theta_1(1) = \theta_0(1) = \theta_1(0) = \theta_0(0) = 0$ er det let at se at

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}(1, s) - \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}(0, s) = 0 \ \forall s \in I.$$

Vi ser også at $\tilde{F}(t, i) = f_i(t) \ \forall t \in I$ for $i = 0, 1$.
Hvis der findes $(\tilde{t}_0, \tilde{s}_0) \in I \times I$ så

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}(\tilde{t}_0, \tilde{s}_0) = 0,$$

er $t \mapsto \tilde{\theta}(t, \tilde{s}_0)$, $t \in I$ konstant af samme argument som ovenfor for F og derfor fås, idet $\theta_0(0) = \theta_1(0) = 0$ at

$$c(t, \tilde{s}_0)\theta_1(t) + (1 - c(t, \tilde{s}_0))\theta_0(t) = 0 \ \forall t \in I \Rightarrow$$

$$\theta_0(t) = \frac{c(t, \tilde{s}_0)}{c(t, \tilde{s}_0) - 1}\theta_1(t) \ \forall t \in I,$$

hvilket er en modstrid, idet $c(t, \tilde{s}_0)$ ikke er konstant lig s_0.
Altså følger at $\tilde{F}$ er en isotopi fra f_0 til f_1 som ønsket.

$\square$

1.4. Whitney's formel for graden af en generisk lukket plan kurve.

Definition 1.13. *Lad f være en lukket plan kurve. Vi siger, at $p \in \mathbb{R}^2$ er et* simpelt dobbelt-punkt *for f, hvis*

1. *Der findes præcist to tal $t_1, t_2 \in I$, så $f(t_1) = f(t_2) = p$ eller hvis der findes præcist et tal $t \in (0,1)$ så $f(0) = f(t) = f(1) = p$.*
2. *Vektorerne $f'(t_1)$ og $f'(t_2)$ er lineært uafhængige.*

Eksempel.
Betragt $c_0(t) = (\sin 2\pi t, \sin 4\pi t)$. Vi ser at $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ er et simpelt dobbelt-punkt for c_0, idet $c_0^{-1}(0,0) = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, $c_0'(0) = (2\pi, 4\pi)$ og $c_0'(\frac{1}{2}) = (-2\pi, 4\pi)$.

Definition 1.14. *Lad f være en lukket plan kurve. Vi siger, at f er en* generisk *lukket plan kurve, hvis der findes forskellige tal $t_1, \ldots, t_{2n} \in I$, så*

1. *$f(t_{2i-1}) = f(t_{2i})$ er et simpelt dobbelt punkt for $i = 1, \ldots, n$.*
2. *$f|_{I - \{0, t_1, \ldots, t_{2n}, 1\}}$ er injektiv.*

Bemærkning.
Vi ser at c_{-1}, c_0 og c_1 er eksempler på generiske lukkede plan kurver, hvorimod c_n for $|n| > 1$ ikke er det. Det er faktisk rigtigt, at enhver lukket plan kurve kan gøres generisk ved en vilkårlig lille deformation, altså en vilkårlig lukket plan kurve er ækvivalent med en generisk lukket plan kurve. (se [2]).

Øvelse.
1.2. Tegn generiske plane kurver som er isotope til c_n for $|n| > 1$.

Definition 1.15. *Et punkt $p \in f(I)$ kaldes et* ydre punkt *for f, hvis der findes en linie l gennem p, så $l \cap f(I) = \{p\}$.* , p ikke dobbeltpkt.

Øvelse.
1.3. Bevis at en vilkårlig lukket plan kurve har ydre punkter. ekstremalværdisætn. på $|f|^2$ + se på tang. i maks. pkt.

Lad nu g være en generisk lukket plan kurve. Lad $t_0 \in I$, så $g(t_0)$ er et ydre punkt. Definer så en ny lukket plan kurve f ved

$$f(t) = \begin{cases} g(t + t_0), & \text{for } t \in [0, 1 - t_0], \\ g(t + t_0 - 1), & \text{for } t \in [1 - t_0, 1]. \end{cases}$$

Ø4 **Øvelse.**
1.4. Vis at $f \sim g$.

Lad nu $t_1, \ldots, t_{2n} \in I$således at $f(t_1) = f(t_2), \ldots, f(t_{2n-1}) = f(t_{2n})$ er de simple dobbelt-punkter for f og $t_{2i-1} < t_{2i}$ for $i = 1, \ldots, n$. Definer så $\mu_i \in \{\pm 1\}$, $i = 1, \ldots, n$, ved at

$$\mu_i = \begin{cases} -1, & \text{hvis } (f'(t_{2i-1}), f'(t_{2i})) \text{ positiv basis}, \\ +1, & \text{hvis } (f'(t_{2i-1}), f'(t_{2i})) \text{ negativ basis}. \end{cases}$$

Definer endvidere fortegn $\mu_0 \in \{\pm 1\}$ hørende til det ydre punkt på følgende måde: Vektoren $R(\frac{1}{4})(f'(0))$ udpeger en positiv side af linien l gennem $f(0)$ i retningen $f'(0)$. Vi lader $\mu_0 = +1$, hvis $f(I)$ ligger på den positive side af l, ellers er $\mu_0 = -1$.

Sætning 1.16 (Whitney). *Vi har følgende formel*

$$d(f) = \sum_{i=0}^{n} \mu_i.$$

Eksempel.
1.8. Betragt den generiske lukkede plane kurve c_1. Vi ser, at c_1 ikke har nogen dobbelt-punkter. Idet $c_1'(0) = (0,1)$ er $R(\frac{1}{4})(c_1'(0)) = (-1,0)$, så $c_1(I)$ er på den positive side af linien gennem $c_1(0) = (1,0)$ i retningen $c_1'(0) = (0,1)$. Derved følger at $d(c_1) = 1$. På samme måde kan vi udregne graden af c_{-1} til $d(c_{-1}) = -1$. Det svarer jo fint til vores tidligere udregninger

1.9. Betragt nu den generiske lukkede plane kurve c_0. Det ses let at $c_0(\frac{1}{4})$ er et ydre punkt for c_0. Vi har at $c_0'(\frac{1}{4}) = (0,-4\pi)$, så $R(\frac{1}{4})(c_0'(\frac{1}{4})) = (4\pi, 0)$; altså ligger $c_0(I)$ på den negative side og $\mu_0 = -1$. Der er ét dobbelt-punkt for c_0 nemlig $c_0(\frac{1}{2}) = c_0(1)$. Idet $(c_0'(\frac{1}{2}), c_0'(1)) = ((-2\pi, 4\pi), (2\pi, 4\pi))$, så er $\mu_1 = +1$. Dermed bliver $d(c_0) = -1 + 1 = 0$, som stemmer med udregningen i 1.7.

Øvelse. 04
1.5. Tegn nogle generiske lukkede plane kurver og brug Whitney's formel til at beregne graderne af de tegnede kurver. Kan du bevise Whitney's formel?

Whitney's sætning har dog langt fra lukket studiet af isotopier af plane kurver. For de nyeste udviklinger i studiet af isotopier af plane kurver se [1].

References

[1] V.I. Arnold, *Topological Invariants of Plane Curves and Caustics* University Lecture Series, Volume 5 (1994), American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

[2] H. Whitney, *On regular closed curves in the plane* Compositio Mathematica 4 (1937) 276-286.

Et kriterium for positiv definithed af matricer

Vi husker på, at en reel symmetrisk kvadratisk matrix A kaldes **positiv definit**, hvis den kvadratiske form x^tAx er positiv for alle x, der er forskellig fra 0. Tilsvarende kaldes en reel symmetrisk kvadratisk matrix **positiv semidefinit**, hvis der gælder, at $x^tAx \geq 0$ for alle x.

Vi har, at $x^tAx = \Sigma_i\Sigma_j\, a_{ij}x_ix_j$. Desuden husker vi på spektralsætningen for symmetriske matricer, der siger, at A er ortogonalt ækvivalent med diagonalmatricen B bestående af A's egenværdier: $A = U^tBU$, hvor U er en ortogonal matrix. Heraf får vi, at for determinanter gælder : $\det(A) = \det(U^t)\det(B)\det(U) = \det(U^tU)\det(B) = \det(B)$. Desuden får vi med $x = U^ty$, så er $x^tAx = y^tDy = \Sigma\ \lambda_iy_i^2$, hvor λ–erne er egenværdierne for A. Ved at vælge y-erne passende, ser man at A er positiv definit, hvis og kun hvis alle λ–erne er positive. På tilsvarende måde ser man, at A er positiv semidefinit hvis og kun hvis alle egenværdierne er ikke-negative.

Som bekendt er egenværdierne rødderne i det karakteristiske polynomium for A. For at finde dem skal man altså faktorisere et nte grads polynomium. Det kan være svært. Derfor er det undertiden en hjælp, at man kan nøjes med at undersøge fortegn for nogle determinanter.

Lad D_k være den kte ledende underdeterminant for A:

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & .. & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & .. & a_{kk} \end{vmatrix}$$

Sætning 1

Lad A være en reel symmetrisk nxn-matrix. Så er A positiv definit hvis og kun hvis $D_k > 0$ og $a_{kk} > 0$ for alle $k = 1, 2,...,n$.

Bevis

Antag først, at A er positiv definit. Lader vi A_k være den ledende kxk-matrix i A, så er for $x = (x_1,...,x_k, 0,...,0)$ og $y = (x_1,...,x_k)$:

$x^tAx = y^tA_ky$

og derfor er A_k positiv definit. Alle A_ks egenværdier er derfor positive. Da determinanten D_k af A_k er produktet af egenværdierne for A_k , og disse alle er positive, er D_k positiv. Et tilsvarende argument giver, at alle a_{kk} er positive.

Det omvendte følger af nedenstående lemma 1 ved et induktionsbevis.

Lemma 1

Lad A være en positiv definit symmetrisk nxn matrix. Lad $a > 0$. Lad x være en n-vektor. Lad B være (n+1)x(n+1) matricen:

$$B = \begin{pmatrix} A & x \\ x^t & a \end{pmatrix}$$

Hvis determinanten af B er positiv, så er B positiv definit.

Bevis

For ethvert tal s mellem 0 og 1 defineres matricen B_s ved

$$B_s = \begin{pmatrix} A & sx \\ sx^t & a \end{pmatrix}$$

Så er $B_1 = B$ og B_0 er positiv definit (hvilket man ser ved at regne på den kvadratiske form for B_0). Vi udregner determinanten af B_s ved at benytte, at determinanten er lineær i hver søjle, når de andre søjler holdes fast, – og tilsvarende for rækker.

$$\det(B_s) = \det\begin{pmatrix} A & sx+0 \\ sx^t & sa+(1-s)a \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & sx \\ sx^t & sa \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ sx^t & (1-s)a \end{pmatrix}$$

$$= s\det\begin{pmatrix} A & x \\ sx^t & a \end{pmatrix} + (1-s)a\det(A) = s\det\begin{pmatrix} A & x \\ sx^t+0 & sa+(1-s)a \end{pmatrix} + (1-s)a\det(A)$$

$$= s\left(\det\begin{pmatrix} A & x \\ sx^t & sa \end{pmatrix} + (1-s)a\det(A)\right) + (1-s)a\det(A)$$

$$= s^2\det(B) + s(1-s)\ a\ \det(A) + (1-s)\ a\ \det(A)$$

$$= s^2\det(B) + (1-s^2)\ a\ \det(A) > 0$$

Lad

$$W = \{s \in [0,1] : B_s \text{er positiv semidefinit}\}$$

Vi skal indse, at 1 tilhører W. Vi indser nedenfor, at W er lukket. Lader vi da t være det største element i W, så er B_t positiv semidefinit. Da vi lige har set, at $\det(B_t)$ er positiv, kan ingen af egenværdierne i B_t være 0, så B_t er positiv definit. Hvis ikke $t = 1$, kan vi vælge en følge $s(n) \to t$ og en følge af vektorer x_n med norm lig med 1, så at $x_n{}^t B_{s(n)} x_n \leq 0$. Ved at udtynde x-erne kan vi antage, at der findes et x, så at $x_n \to x$ og $s(n) \to t$. Da ses, at $x^t B_t x \leq 0$. Modstrid, da x må have norm 1.

Vi mangler at vise, at W er lukket. Det er let. Lad $s(n) \to s$, hvor s(n)erne ligger i W. Lad x være vilkårlig. Da er $x^t B_{s(n)} x \geq 0$ og da denne talfølge konvergerer mod $x^t B_s x$, er dette udtryk ikke-negativt for alle x, hvilket skulle vises.

Korollar 1

Lad A være en reel symmetrisk kvadratisk matrix. Så gælder følgende:

A er negativ definit, dvs $x^tAx < 0$ for alle x forskellig fra 0, hvis og kun hvis alle $a_{kk} < 0$ og for alle k er $(-1)^kD_k > 0$.

Bevis

A er negativ definit hvis og kun hvis –A er positiv definit. Anvend så sætning 1 på –A.

Der findes også en karakterisering af positiv semidefinite matricer ved hjælp af determinanter, men her må man tage alle principale underdeterminanter i betragtning og ikke kun de ledende. (Der er naturligvis en tilsvarende karakterisering af negativ semidefinite matricer analog til korollar 1, som læseren selv må formulere og bevise).

Først indfører vi notationen $A(i(1),i(2),...,i(k))$ for den kxk matrix vi får ved at slette alle andre rækker og søjler i A end lige dem, der har numrene $i(1),...,i(k)$. Lad også $d(i(1),...,i(k))$ være determinanten af $A(i(1),...,i(k))$. Med den tidligere notation får vi specielt, at $D_k = d(1,2,...,k)$

Sætning 2

Lad A være en reel symmetrisk nxn matrix. Så er A positiv semidefinit hvis og kun hvis der for alle valg af $i(1) < i(2) < ...< i(k)$ gælder, at $d(i(1),...,i(k)) \geq 0$.

Bevis

Antag først, at A er positiv semidefinit. Så indses, at $A(i(1),...,i(k))$ er positiv semidefinit analogt til beviset for sætning 1, og den har derfor ikke negativ determinant.

Vi viser nu den anden vej ved induktion. Sætningen er klart rigtig for n = 1. Antag da, at den gælder for alle (n-1)x(n-1) matricer og lad A være en nxn matrix, der opfylder, at alle de principale underdeterminanter er ikke-negative. Vi viser, at for alle $\epsilon > 0$ gælder, at alle de ledende underdeterminanter for $A + \epsilon I$, at disse er positive. Af sætning 1 følger da, at $A + \epsilon I$ er positiv definit og dermed, at $x^t(A + \epsilon I)x = x^tAx + \epsilon x^tx > 0$ for alle x forskellig fra 0. Lader vi ϵ gå mod 0, får vi, at $x^tAx \geq 0$ for alle x.

Vi fuldfører nu induktionsbeviset. Sletter vi en søjle og en række med samme nummer i A, bliver den tilbageværende matrix positiv semidefinit ifølge induktionshypotesen. Adderer vi ϵI med $\epsilon > 0$ til en positiv semidefinit matrix får vi en positiv definit matrix. Da $a_{nn} + \epsilon > 0$, mangler vi kun at vise, at $\det(A + \epsilon I) > 0$ for at kunne bruge sætning 1. Dette sidste er der flere måder at se på. Sætter vi

$$f(t) = \det(A + tI)$$

så er f ifølge nedenstående lemma 2 differentiabel med afledet

$$f'(t) = \Sigma_1{}^n \det(A^{(i)} + tI_{n-1}) > 0 \text{ for } t > 0$$

hvor $A^{(i)}$ er A med søjle og række nr i slettede. Følgelig er f voksende for $t > 0$, så $f(\epsilon) > f(0) \geq 0$. Hermed er induktionsbeviset gennemført.

Lemma 2

Lad $f_1(t),...,f_n(t)$ være n vektorfunktioner af en reel variabel t, som er differentiable. Med $f_j'(t)$ betegnes vektorfunktionen bestående af alle de afledede af koordinatfunktionerne for f_j.

Lad $g(t) = \det(f_1(t),...,f_n(t))$. Da er g differentiabel med afledet

$$g'(t) = \Sigma_i \det(f_1(t),...,f_{i-1}(t),\ f_i'(t),\ f_{i+1}(t),...,f_n(t))$$

Bevis

Skriv $v_i(h) = \det(f_1(t+h),...,f_i(t+h),\ f_{i+1}(t),...,f_n(t))$ for $i = 1,...,n$ og $v_0(h) = g(t)$. Da er

$$g(t + h) - g(t) = v_n(h) - v_{n-1}(h) + v_{n-1}(h) - v_{n-2}(h) + \ldots + v_1(h) - v_0(h).$$

Resultatet følger da ved at dividere med h på begge sider og flytte 1/h ind på den ite faktor successivt ved at benytte, at determinanten er lineær i hver søjle for sig, når de andre fastholdes, og endelig lade h gå mod 0.

Bemærkning

Matricen

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$$

opfylder at alle ledende determinanter er 0 og det er også alle diagonalelementer, men egenværdierne er 0, 1, −1, så matricen er ikke positiv semidefinit. Man kan derfor godt opgive at få en karakterisering af positiv semidefinithed svarende til sætning 1 i afsvækket form.

Tage Bai Andersen, April 1995.

Supplerende noter om differentiable Flader, N2

i tilknytning til doC 2 - 2. Geometri I. JEA.

Inversfunktionssætningen.

Definition 2.1. *Lad $U \subset \mathbb{R}^n$ være åben. En afbildning*

$$F : U \to \mathbb{R}^m$$

er af klasse $C^k (k = 1, 2, \dots, \infty)$ hvis F har kontinuerte partielle afledede af alle ordener $\leq k$ (differentiabel betyder af klasse C^∞). For en sådan afbildning definerer vi for vilkårlig $u \in U$ den aflede af F

$$dF_u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

til at være den linære afbildning givet ved Jacobi matricen

$$dF_u = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 \; \cdots & i & \cdots \; n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ j \\ m \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(u) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(u) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(u) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(u) \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} F_1(u) \\ \dots \\ \operatorname{grad} F_m(u) \end{pmatrix}$$

Bemærk, at klasse C^k indebære klasse C^l for $1 \leq l \leq k$.

Lemma 2.2. *Lad $U \subset \mathbb{R}^n$ og $V \subset \mathbb{R}^m$ være åben og lad $F : U \to \mathbb{R}^m$ og $G : V \to \mathbb{R}^l$ være afbildninger af klasse C^k og antag af $F(U) \subset V$.*
Så er

$$G \circ F : U \to \mathbb{R}^l$$

af klasse C^k.

Bevis.
Resultatet for $k = 1$ er kendt fra Mat 11: Hvis F har en afledet dF_u i $u \in U$ og G har en afledet dG_v i $v = F(u)$, så har $G \circ F$ en afledet i u og

$$d(G \circ F)_u = dG_{F(u)} \cdot dF_u \qquad \text{(Kæderegeln - generaliseret)}$$

som skrevet med partielle aflede siger

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ F)_j(u) = \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial G_j}{\partial y_r}(F(u)) \cdot \frac{\partial F_r}{\partial x_i}(u)$$

den opskrivning behøver man vel strengt taget ikke?!

for $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots l$ og alle $u \in U$. Heraf ser vi, at hvis G og F er C^1, så er $G \circ F$ også C^1.
Lemmaet bevises nu ved induktion - induktionen "starter" ved $k = 1$ som vi lige har set. Vi antager lemmaet gælder for afbildninger af klasse C^{k-1} og skal så vise at det gælder for klasse C^k.

Lad F, G være af klasse C^k. Da er $\frac{\partial F_r}{\partial x_i}$ af klasse C^{k-1}. Endvidere er $\frac{\partial G_j}{\partial y_r} \circ F$ som sammensætning af afbildninger af klasse C^{k-1}, ud fra induktionsantagelsen også af klasse C^{k-1}, så højre side af (1) er af klasse C^{k-1}, som sum af produkter af C^{k-1}-funktioner.

Så venstre side af (1) er også af klasse C^{k-1}. Men hvis første-ordens afledede af en afbildning er af klasse C^{k-1}, så er afbildningen af klasse C^k, og vi er færdige.

$\square$

Vi skal bruge følgende lemma i beviset for inversfunktionssætning.

Lemma 2.3. *Lad U være en åben conveks delmængde af $\mathbb{R}^n$ og $f : U \to \mathbb{R}^m$ en afbildning af klasse C^1. For alle $a \in U$ kan vi skrive*

(2)
$$f(x) - f(a) = \Phi(x)(x - a)\ \forall x \in U.$$ (Φ afh. af a

hvor $\Phi(x)$ er en $m \times n$ matrix, så indgangene i $\Phi(x)$ er kontinuerte i x. Endvidere gælder at $\Phi(a) = df_a$.

Bemærkning.
Omvendt ses det let at hvis $f : U \to \mathbb{R}^m$ er vilkårlig og opfylder (2) for en kontinuert Φ, så er f differentiabel i a og $df_a = \Phi(a)$. —dette gøres ved at gange ud og huske def. på partielt afl. / entydigheden af gradient.

Bevis.
Lad $a, x \in U$. Vi har da at

$$\frac{d}{ds} f(a + s(x - a)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + s(x - a))(x_i - a_i).$$

Hvis vi integrerer over s fra 0 til 1 fås

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + s(x - a))ds \right) (x_i - a_i).$$

Lad så Φ være defineret på U således at $\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + s(x - a))ds$ er den i'te søjle i $\Phi(x)$. Da er Φ klart kontinuert i alle $x \in U$ og

$$f(x) - f(a) = \Phi(x)(x - a).$$

Af formlen for Φ ses at $\Phi(a) = df_a$.

$\square$

Sætning 2.4 (Inversfunktionssætning - C^1). *Lad $U \subset \mathbb{R}^n$ være åben og $F : U \to \mathbb{R}^n$ en afbildning af klasse C^1. Lad $u_0 \in U$ være således at $dF_{u_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er en lineær isomorfi.*
Da findes der åbne omegne W af u_0 i U og V af $F(u_0)$ i $\mathbb{R}^n$ således at

1. $F(W) = V$,
2. $F|_W : W \to V$ er bijektiv og
3. $(F|_W)^{-1} : V \to W$ er C^1. → (implicit brug af at V åben)

Bevis.
Vi opdeler beviset i en række påstande.

Påstand.
Der findes en omegn W af u_0 i U så $F|_W$ er injektiv.

+kædereglen

Bevis.
Lad $D \subset U$ være en åben kugle centreret i u_0. Af middelværdisætningen følger at der for alle $x, y \in D$ findes z_i på liniestykket der forbinder x med y så

$$F_i(x) - F_i(y) = dF_i(z_i) \cdot (x - y).$$

Dette kan samlet skrives

$$F(x) - F(y) = \begin{pmatrix} dF_1(z_1) \\ \vdots \\ dF_n(z_n) \end{pmatrix} (x - y).$$

Definer nu $g : D \times \ldots \times D \to \mathbb{R}$ ved

$$g(w_1, \ldots, w_n) = \det \begin{pmatrix} dF_1(w_1) \\ \vdots \\ dF_n(w_n) \end{pmatrix}$$

for $(w_1, \ldots, w_n) \in D \times \ldots \times D$. Idet $g(u_0, \ldots, u_0) = \det(dF_{u_0}) \neq 0$, kan vi finde $W \subset D$ åben omegn af u_0 så

$$g(w_1, \ldots, w_n) \neq 0 \; \forall (w_1, \ldots, w_n) \in W \times \cdots \times W.$$

(induktion (af) på sætn. fra Ebbe-noteheftet i Mat 11)

Da følger at $F|_W : W \to \mathbb{R}^n$ er injektiv.

Påstand.
For alle åbne delmængder $W' \subset W$, gælder at $F(W')$ er åben.

direkte: Lebesgue Lemma

Bevis.
Lad $x_0 \in W'$ og lad $K \subset W'$ være en lukket kugle med positiv radius og centrum i x_0. Lad så $\delta = \mathrm{dist}(F(x_0), F(\partial K))$. Da $F|_W$ er injektiv har vi at $F(x_0) \notin F(\partial K)$. Men idet ∂K er lukket og begrænset og funktionen $|F(x) - F(x_0)|$ er kontinuert i x, følger at $\delta > 0$. Vi viser nu at $B(F(x_0), \frac{\delta}{2})$ er indeholdt i $F(K)$. Lad $y \in B(F(x_0), \frac{\delta}{2})$ og betragt afbildningen $\varphi : K \to \mathbb{R}$ givet ved

Vi skal sikre os at δ er ét tal! hertil benytter vi ekstremalværdisætn.

$$\varphi(x) = |F(x) - y|^2, \; \forall x \in K.$$

Igen, idet K er lukket og begrænset, har φ et minimum, $x \in K$. Vi ser at $x \notin \partial K$ for $\varphi|_{\partial K} > \frac{\delta^2}{4}$, men $\varphi(x_0) < \frac{\delta^2}{4}$. Altså x er i det indre af K. Da følger at $d\varphi_x = 0$. Af formlen

(3) $$d\varphi_x = 2(dF_x)^t(F(x) - y)$$

kædereglen

Bem. jf. en øvelse $f : X \to Y$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$

f kont. hvis | $f^{-1}(f(E))$ åben.

ses at

$$F(x) - y = 0$$

idet $\det(dF_x) \neq 0$. Altså $y \in F(K)$. Formlen (3) bevises således

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}(x) &= \sum_s \frac{\partial}{\partial x_r}(F_s(x) - y_s)^2 \\
&= 2\sum_s (F_s(x) - y_s)\frac{\partial F_s}{\partial x_r} \\
&= 2\sum_s \frac{\partial F_s}{\partial x_r}(F_s(x) - y_s).
\end{aligned}$$

Lad nu $V = F(W)$. Af de lige viste påstande er V åben og $F|_W : W \to V$ er bijektiv.

Påstand.
Afbildningen $(F|_W)^{-1} : V \to W$ er kontinuert.

Bevis.
Lad $y_0 \in V$ og sæt $x_0 = (F|_W)^{-1}(y_0)$. Lad $\epsilon > 0$ antag at ϵ er så lille at $B(x_0, \epsilon) \subset W$. Af forrige påstand følger at $F|_W(B(x_0, \epsilon))$ er åben. Da findes der $\delta > 0$ så $B(y_0, \delta) \subset F|_W(B(x_0, \epsilon))$. Men idet $F|_W$ er bijektiv følger det så at $(F|_W)^{-1}(B(y_0, \delta)) \subset B(x_0, \epsilon)$. Vi ser derfor at

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |y - y_0| < \delta \Rightarrow |(F|_W)^{-1}(y) - (F|W)^{-1}(y_0)| < \epsilon.$$

Altså $(F|_W)^{-1} : V \to W$ er kontinuert.

Vi afslutter beviset for sætningen ved at vise følgende påstand.

Påstand.
Afbildningen $(F|_W)^{-1}$ er af klassen C^1.

Bevis.
Lad $x_0 \in W$ og $y_0 = F(x_0)$. Af forrige lemma følger der findes Φ så

$$F(x) - F(x_0) = \Phi(x)(x - x_0) \; \forall x \in W$$

Idet $\Phi(x_0) = dF_{x_0}$ og $\det(\Phi(x_0)) = \det(dF_{x_0}) \neq 0$, kan vi vælge en omegn $W' \subset W$ af x_0 så $\det\Phi(x) \neq 0 \; \forall x \in W'$.

Da ser vi at $y = F(x)$

$$(F|_W)^{-1}(y) - (F|_W)^{-1}(y_0) = \Phi((F|_W)^{-1}(y))^{-1}(y - y_0).$$

Heraf følger så at $(F|_W)^{-1}$ har en afledet i y_0 og

$$d((F|_W)^{-1})_{y_0} = dF^{-1}_{(F|_W)^{-1}(y_0)}. = \left[dF_{(F|W)^{-1}(y_0)}\right]^{-1}$$

Derfor er $d((F|_W)^{-1})_{y_0}$ er kontinuert i y_0. Altså er $(F|_W)^{-1}$ er C^1.

husk hvordan den inverse

□

Sætning 2.5 (Inversfunktionssætning - C^k). *Lad $U \subset \mathbb{R}^n$ være åben og $F : U \to \mathbb{R}^n$ en afbildning af klasse C^k. Lad $u_0 \in U$ være således at $dF_{u_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er en lineær isomorfi.*
Da findes der åbne omegne W af u_0 i U og V af $F(u_0)$ i $\mathbb{R}^n$ således at

1. *$F(W) = V$,*
2. *$F|_W : W \to V$ er bijektiv og*
3. *$(F|_W)^{-1} : V \to W$ er C^k.*

Bevis.
Tilfældet $k = 1$ blev bevist ovenfor. Vi bruger induktion, som "starter" med dette kendte resultat: Vi antager at C^k-sætningen gælder, og må vise at C^{k+1}-sætningen gør.

Lad F være C^{k+1} så dF_{u_0} en lineær isomorfi. Induktionsantagelsen fortæller, at der findes W, V som i sætningens ordlyd, altså med $F^{-1} : V \to W$ af klasse C^k.

Vi har idet $F \circ F^{-1} = 1_V$, at

lemma 2.2
$$(dF)_{F^{-1}(v)} \circ d(F^{-1})_v = 1_{\mathbb{R}^n},$$
← identitetsmatricen $n \times n$

altså

$$d(F^{-1})_v = [(dF)_{F^{-1}(v)}]^{-1} \tag{4}$$

for alle $v \in V$.

Indgangene i matricen dF er C^k-funktioner idet F er C^{k+1}. Da F^{-1} er af klasse C^k, er indgangene i $(dF)_{F^{-1}(v)}$, på formen

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \circ F^{-1}(v),$$

som er C^k-funktioner i v.

Determinanten $\det(dF)_{F^{-1}(v)}$ er af klasse C^k, som sum af produkter af C^k-funktioner. Denne funktion er ikke nul for $v \in V$ (for matricen er invertibel), så $1/\det(dF)_{F^{-1}(v)}$ er også en C^k-funktion. Men så at indgangene i

$$[(dF)_{F^{-1}(v)}]^{-1}$$

C^k-funktioner af v, for disse er dannet ved summer af produkter af C^k-funktionerne $\det(dF)_{F^{-1}(v)}$ og $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \circ F^{-1}(v)$.

Men så giver (4) at leddene i $d(F^{-1})_v$ er C^k-funktioner af v; disse led er de første-ordens afledede af F^{-1}, så F^{-1} er af klasse C^{k+1}, som ønsket.

□

Vi har altså bevist følgende fundamentale sætning:

Sætning 2.6 (Inversfunktionssætning). *Lad $U \subset \mathbb{R}^n$ være åben og $F : U \to \mathbb{R}^n$ en differentiabel afbildning. Lad $u_0 \in U$ være således at $dF_{u_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er en lineær isomorfi.*
Da findes der åbne omegne W af u_0 i U og V af $F(u_0)$ i $\mathbb{R}^n$ således at

1. $F(W) = V$,
2. $F|_W : W \to V$ *er bijektiv og*
3. $(F|_W)^{-1} : V \to W$ *er differentiabel.*

Definition 2.7 (Diffeomorfi). *Lad $W, V \subset \mathbb{R}^n$ være åben og lad $F : W \to V$ være en afbildning. Hvis der gælder*

1. $F : W \to V$ *er bijektiv*
2. $F : W \to V$ *er differentiabel og*
3. $F^{-1} : V \to W$ *er differentiabel.*

så siges F at være en diffeomorfi fra W til V.

Bemærkning.
Inversfunktionssætning siger altså at $F|_W : W \to V$ er en diffeomorfi.

Regulære flader.

Før vi definerer en regulær flade skal vi lige bruge nogle elementære begreber angående kontinuitet og åbne mængder.

Definition 2.8. *Lad X være en vilkårlig delmængde af $\mathbb{R}^n$. Vi siger at en funktion $f : X \to \mathbb{R}^m$ er* kontinuert *i $x_0 \in X$, hvis og kun hvis*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta, x \in X \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \tag{5}$$

Vi siger at f er kontinuert, hvis den er kontinuert i alle $x_0 \in X$.

Bemærkning
1. Vi observerer at (5) er equivalent med:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(B(x_0, \delta) \cap X) \subset B(f(x_0), \epsilon),$$

hvor vi for $p \in \mathbb{R}^k$ og $r > 0$ definerer

$$B(p, r) = \left\{q \in \mathbb{R}^k \mid |q - p| < r\right\}.$$

2. Hvis X er en vilkårlig delmængde af $\mathbb{R}^m$, Y er en vilkårlig delmængde af $\mathbb{R}^n$ og $f : X \to Y$ er en afbildning, så siger vi at f er kontinuert, hvis den er kontinuert når den betragtes som afbildning fra X til $\mathbb{R}^n$.

3. Lad U være en åben delmængde af $\mathbb{R}^n$. Hvis $F : U \to \mathbb{R}^m$ er en kontinuert funktion og X er en vilkårlig delmængde af $\mathbb{R}^n$, da er det klart at $F|_{X \cap U} : X \cap U \to \mathbb{R}^m$ er kontinuert.

Definition 2.9 (Homeomorfi). *Lad X være en vilkårlig delmængde af $\mathbb{R}^m$, Y er en vilkårlig delmængde af $\mathbb{R}^n$ og $f : X \to Y$ er en afbildning. Da er f en* homeomorfi *hvis og kun hvis*

1. *$f : W \to V$ er bijektiv*
2. *$f : W \to V$ er kontinuert og*
3. *$f^{-1} : V \to W$ er kontinuert.*

Lemma 2.10. *Lad X være en vilkårlig delmængde af $\mathbb{R}^m$ og lad Y være en vilkårlig delmængde af $\mathbb{R}^n$. Lad $f : X \to Y$ og $g : Y \to \mathbb{R}^k$ være kontinuerte afbildninger. Da er $g \circ f : X \to \mathbb{R}^k$ kontinuert.*

Bemærkning.
Af dette lemma følger det at sammensætningen af to homeomorfier er igen en homeomorfi.
Øvelse. 2.1
Bevis dette lemma.

Definition 2.11. *Lad X være en vilkårlig delmængde af $\mathbb{R}^m$. En delmængde $W \subseteq X$ kaldes* åben i X, *hvis der for alle $p \in W$ findes en åben omegn V i $\mathbb{R}^m$ af p således $V \cap X \subseteq W$.*

05 **Øvelse.** 2.2
Lad X være en vilkårlig delmængde af $\mathbb{R}^n$. Bevis følgende 3 påstande for åbne mængder i X.

1. Mængderne $\emptyset$ og X er åbne i X.
2. Hvis $U_1, \dots, U_n$ er endeligt mange åbne delmængder i X, så er $\cap_{i=1}^n U_i$ åben i X.
3. Hvis U_j, $j \in J$ er en familie af åbne delmængder i X, så er $\cup_{j\in J} U_j$ åben i X.

Dette betyder at de åbne mængder i X danner hvad man kalder en *topologi* på X.

05 **Øvelse.** 2.3
Betragt det specielle tilfælde hvor X er en åben delmængde af $\mathbb{R}^m$. Bevis i det tilfælde at $W \subseteq X$ er åben i X hvis og kun hvis W er åben. Giv eksempler på delmængder af $\mathbb{R}^m$ hvor dette ikke er tilfældet.

Som nævnt på ugeseddel # 4, vil vi bruge følgende definition af en regulær flade:

Definition 2.12 (Regulær flade). *En delmængde $S \subset \mathbb{R}^3$ er en* regulær flade *hvis der for alle $p \in S$, findes en omegn V i $\mathbb{R}^3$ af p og en bijektiv afbildning $\mathbf{x} : U \to V \cap S$, hvor $U \subset \mathbb{R}^2$ er åben, således at*

1. *Afbildningen $\mathbf{x}$ er differentiabel.*
2. *Afbildningen $\mathbf{x}$ er en homeomorfi. D.v.s. $\mathbf{x} : U \to V \cap S$ og $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \to U$ er kontinuerte.*
3. *(Regularitets betingelsen.) For alle $u \in U$ er differentialet $d\mathbf{x}_u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ injektivt.*

Funktionen $\mathbf{x}$ kaldes en parametrisering, et lokalt koordinatssystem eller et kort for en omegn af p eller nær p.

Bemærk definition 2.11 fortæller os hvad det betyder at en delmængde W af en regulær flade S er *åben i S*.

Proposition 2.13. *Lad S være en regulær flade og W en delmængde af S. Da er W åben i S hvis og kun hvis der for alle kort $\mathbf{x} : U \to S$ gælder at $\mathbf{x}^{-1}(W)$ er en åben delmængde af U.*

Bevis.
Antag at W er åben i S. Lad $q \in \mathbf{x}^{-1}(W)$, og lad $p = \mathbf{x}(q)$. Da findes der $\epsilon > 0$ så $B(p, \epsilon) \cap S \subset W$ per definition. Men idet $\mathbf{x} : U \to S$ er kontinuert findes der $\delta > 0$ så $\mathbf{x}(B(q, \delta)) \subset B(p, \epsilon) \cap S \subset W$, altså $B(q, \delta) \subset \mathbf{x}^{-1}(W)$. Derfor er $\mathbf{x}^{-1}(W)$ åben.

Antag nu omvendt at $W \subset S$ er således at $\mathbf{x}^{-1}(W)$ er åben for alle kort $\mathbf{x} : U \to S$. Lad $p \in W$ og lad V være en åben omegn i $\mathbb{R}^3$ af p, således der findes et kort $\mathbf{x} : U \to V \cap S$. Lad så $q = \mathbf{x}^{-1}(p)$. Idet $\mathbf{x}^{-1}(W)$ er åben, følger der findes $\epsilon > 0$ så $B(q, \epsilon) \subset \mathbf{x}^{-1}(W)$. Da $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \to U$ er kontinuert, findes der $\delta > 0$ så $B(p, \delta) \subset V$ og

$$\mathbf{x}^{-1}(B(p, \delta) \cap S) \subset B(q, \epsilon) \subset \mathbf{x}^{-1}(W).$$

Idet $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \to U$ er bijektiv følger at

$$B(p, \delta) \cap S \subset W.$$

Altså er W åben i S.

$\square$

På grundlaget af definitionerne, lemmaerne, propositionerne og sætningerne i denne note er alle beviserne i afsnit $2-2$ i do Carmo nu ok (også beviset for Proposition 4. side 64)!!