

Den inverse funktions sætning

Vi begynder med at minde om definitionen af differentiability for funktioner $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

DEFINITION .1. Lad $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ være en funktion defineret på en åben delmængde U af $\mathbb{R}^n$ og lad $x_0 \in U$. Vi siger, at f er **differentiabel** i x_0 , såfremt én af følgende ækvivalente betingelser er opfyldt:

(I) Der findes en lineær afbildning A , således at

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0.$$

(II) Der findes en lineær afbildning A og en epsilon-funktion $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ således, at

$$(2) \quad f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \|x - x_0\| \cdot \epsilon(x - x_0).$$

(III) Der findes en matrix-funktion $x \rightarrow \Psi(x)$, der er kontinuert i x_0 , således at

$$(3) \quad f(x) - f(x_0) = \Psi(x)(x - x_0).$$

Vi sætter $f'(x_0) = A = \Psi(x_0)$ og kalder denne for differential (eller Jacobi-matricen) af f i x_0 .

BEMÆRKNING .2. $f'(x_0)$, der i øvrigt ofte betegnes f'_{x_0} er den matrix, der på den ij -te plads har $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, når $f = (f_1, \dots, f_n)$. Vi vil ikke bevise, at de tre betingelser er ækvivalente, dog kan vi oplyse, at hvis vi har (II) opfyldt, da er funktionen Ψ i (III) givet ved at have den ij -te koefficient givet som

$$(4) \quad \Psi_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) + \epsilon_i((x - x_0)) \cdot \frac{(x - x_0)_j}{\|x - x_0\|}.$$

SÆTNING .3. Lad D være en åben kugle i $\mathbb{R}^n$ og $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ en differentiabel funktion. Givet punkter x og y i D , da eksisterer et punkt z på linestykket, der forbinder x med y , så

$$(5) \quad \boxed{F(y) - F(x) = \langle F'(z), y - x \rangle .}$$

Bevis: Betragt den differentiable kurve

$$(6) \quad \ell : \mathbb{R} \rightarrow D$$

givet ved $\ell(t) = x + (y - x)t$. Den sammensatte funktion $F \circ \ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er differentiabel. I følge den sædvanlige middelværdisætning på $[0, 1]$ findes et $\theta \in]0, 1[$, så

$$(7) \quad F(y) - F(x) = \langle F'(x + (y - x)\theta), y - x \rangle.$$

Sæt $z = x + (y - x)\theta$.

SÆTNING .4 (DEN INVERSE FUNKTIONS SÆTNING). Lad U være en åben delmængde af $\mathbb{R}^n$ og $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ en kontinuert differentiabel afbildning, så for alle $x \in U$

$$(8) \quad \boxed{\det f'(x) \neq 0 \quad ; \quad x \in U .}$$

Da gælder følgende

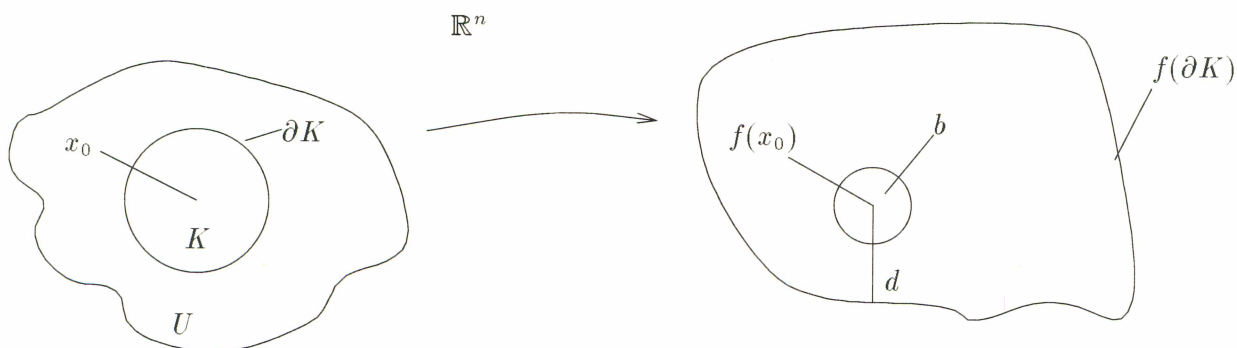
- I:** Billedet $f(U)$ er en åben delmængde af $\mathbb{R}^n$.
- II:** Afbildningen f er lokalt injektiv, i.e. ethvert punkt $x_0 \in U$ har en omegn, hvori f er injektiv.
- III:** Hvis f er injektiv på U , da er f^{-1} kontinuert differentiabel på $f(U)$ og $(f^{-1})'(y) = f'(f^{-1}(y))^{-1}$ for $y \in f(U)$.

Bevis: Gennem hele beviset er det en stående hypotese, at $\det f'(x) \neq 0$ for alle $x \in U$. Det er afgørende, at II) bevises først. *Bevis II:* Givet $x_0 \in U$. Vi skal først finde en omegn D af x_0 , så restriktionen af f til D er injektiv. Lad $D \subseteq U$ være en åben kugle med centrum i x_0 . Vi kan nu anvende middelværdisætningen på f 's i 'te koordinatfunktion f_i . For $x, y \in D$ kan vi finde et z_i på liniestykket, der forbinder x med y , så

$$(9) \quad f_i(y) - f_i(x) = \langle \text{grad } f_i(z_i), y - x \rangle,$$

hvilket samlet kan skrives

$$(10) \quad f(y) - f(x) = \left\{ \begin{array}{c} \text{grad } f_1(z_1) \\ \vdots \\ \text{grad } f_n(z_n) \end{array} \right\} (y - x).$$



Det er nu tilstrækkeligt at vise, at der findes en åben omegn W af x_0 , så matricen

$$(11) \quad \begin{pmatrix} \text{grad } f_1(w_1) \\ \text{grad } f_2(w_2) \\ \dots \\ \text{grad } f_n(w_n) \end{pmatrix}$$

har determinant $\neq 0$ for alle $w_1, \dots, w_n \in W$. Lad $d(w_1, \dots, w_n)$ betegne determinanten af matricen ovenfor. Vi kan interpretere denne som en kontinuert funktion på $U \times U \times \dots \times U$ (n faktorer). Idet $d(x_0, \dots, x_0) \neq 0$ følger påstanden umiddelbart.

Bevis for I: Påstanden I kan reformuleres: For ethvert $x_0 \in U$ gælder, at $f(U)$ indeholder en åben kugle med centrum i $f(x_0)$.

Hertil betragter vi en kompakt kugle $K \subseteq U$ med centrum i x_0 , valgt så lille at restriktionen af f til K er injektiv. Vi lader $d = \text{dist}(f(x_0), f(\partial K))$; afstanden fra $f(x_0)$ til $f(\partial K)$.

Vi vil vise, at kuglen $D(f(x_0), \frac{1}{3}d)$ er helt indeholdt i $f(K)$, i.e. at ethvert $b \in D(f(x_0), \frac{1}{3}d)$ kan rammes med et punkt fra K . For et sådant b anlægger vi følgende strategi: Lad $\varphi_b : K \rightarrow \mathbb{R}$ betegne funktionen givet ved

$$(12) \quad \varphi_b(x) = \|f(x) - b\|^2 \quad ; \quad x \in K.$$

Eftersom φ_b er kontinuert, og K er kompakt, har denne funktion et minimum.

Vi bemærker, at minimum ikke kan antages på ∂K : For $x \in \partial K$ har vi $\|f(x) - b\| > \frac{2}{3}d$ og dermed

$$(13) \quad \varphi_b(x) > \frac{4}{9}d^2 \quad ; \quad x \in \partial K.$$

Idet $|f(x_0) - b| < \frac{1}{3}d$ har vi

$$(14) \quad \varphi_b(x_0) < \frac{1}{9}d^2.$$

Altså funktionen $\varphi_b: K \rightarrow \mathbb{R}$ antager sit minimum i et indre punkt x af K . I et sådant punkt har vi $\varphi'_b(x) = 0$. I følge formelen (16) nedenfor, hvor $\varphi'_b(x)$ og $(f(x) - b)$ er rækkevektorer, gælder

$$(15) \quad \varphi'_b(x) = 0 \Rightarrow f(x) = b,$$

og dermed har vi ramt $b \in \mathbb{R}^n$ med $x \in K$.

$$(16) \quad \varphi'_b(x) = 2(f(x) - b)f'(x).$$

Bevis for (16):

$$(17) \quad \frac{\partial \varphi_b}{\partial x_r}(x) = \sum_s \frac{\partial}{\partial x_r} (f_s(x) - b_s)^2$$

$$(18) \quad = 2 \sum_s (f_s(x) - b_s) \frac{\partial f_s}{\partial x_r}(x) = 2 \sum_s \frac{\partial f_s}{\partial x_r}(x) (f_s(x) - b_s).$$

Bevis III: Det antages altså, at $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ er injektiv. I følge I) gælder, at $f(U)$ er åben; men af samme grund gælder:

$$(19) \quad \text{For enhver åben delmængde } V \text{ af } U \text{ gælder, at}$$

$$(20) \quad f(V) \text{ er en åben delmængde af } \mathbb{R}^n.$$

Denne specielle egenskab ved f implicerer umiddelbart, at $f^{-1}: f(U) \rightarrow U$ er kontinuert: Givet $y_0 \in f(U)$ og en åben omegn V af $f^{-1}(y_0)$ i U ; da er $f(V)$ en åben omegn af y_0 i $f(U)$, der afbildes ind i V af f^{-1} .

Vi skal nu vise, at f^{-1} er differentiabel i $y_0 = f(x_0)$.

Da f er differentiabel kan vi skrive (overvej)

$$(21) \quad f(x) - f(x_0) = \Phi(x)(x - x_0); \quad x \in U,$$

hvor $\Phi(x)$ er en $n \times n$ matrix af funktioner på U , kontinuerte i x_0 . Idet $\Phi(x_0) = f'(x_0)$ og $\det f'(x_0) \neq 0$ kan vi vælge en åben omegn V af x_0 i U , så $\det \Phi(x) \neq 0$ for $x \in V$. Af ovenstående fås med $x = f^{-1}(y)$

$$(22) \quad f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = \Phi(f^{-1}(y))^{-1}(y - y_0); \quad y \in f(V).$$

Det følger nu let, at f^{-1} er differentiabel i y_0 med

$$(23) \quad (f^{-1})'(y_0) = f'(f^{-1}(y_0))^{-1}.$$

Af dette udtryk følger, at Jacobimatricen for f^{-1} varierer kontinuert, når y_0 varieres. $\square$