

Kompleks Funktionsteori

Ugeseddel nr. 12

Forelæsningerne den 4. og 6. december omhandler følger og rækker af analytiske funktioner. Der benyttes Ahlfors: "Complex analysis" side 136-139.

Opgaver til øvelserne i ugen 10. - 14. december:

Eksamen vinteren 1999-2000, opgave 3
Eksamen sommeren 2001, opgave 4
Ahlfors, side 139 opgave 1, 2 og 3

Afleveringsopgave til ugen 10. - 14. december:

Eksamen vinteren 1999-2000, opgave 1

Med venlig hilsen

Erik Balslev

a)

$$z \in \mathbb{C}, z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^x e^{iy} + e^{-x} e^{-iy}}{2}$$

$$= \frac{e^x}{2} (\cos y + i \sin y) + \frac{e^{-x}}{2} (\cos(-y) + i \sin(-y))$$

$$= \frac{\cos y}{2} (e^x + e^{-x}) + i \frac{\sin y}{2} (e^x - e^{-x})$$

$$= \cos y \cosh x + i \sin y \cdot \sinh x$$

$$\text{Vi ser } \cosh z = 0 \iff z = i(\pi/2 + \pi p), p \in \mathbb{Z}$$

Udfra def. p1 f ser vi at $z = i(\pi/2 + \pi p)$, $p \in \mathbb{Z}$ er fs singularitet.

Juf. beviset for lemma 12.2 har vi $z_0 = i(\pi/2 + \pi p)$, $p \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{e^{az_0}}{\sinh(z_0)} \neq 0 \quad (*) \quad \text{idet} \quad D[\cosh z] = \sinh z,$$

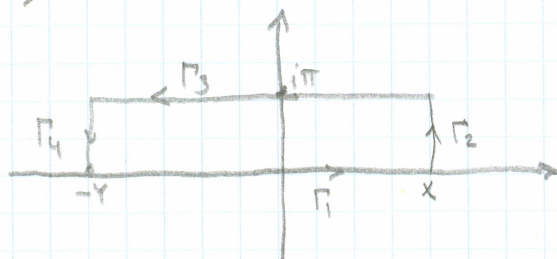
$$e^{az_0} = e^{-i \operatorname{Im} a} e^{i \operatorname{Re} a \cdot (\pi/2 + \pi p)} \neq 0, \quad \sinh(z_0) \neq 0 \quad (+)$$

Af prop. 11.4 følger at f har simpel pol i z_0 og af lemma 12.2 følger at

$$\operatorname{res}(f, z_0) = \frac{e^{az_0}}{i} = -i e^{az_0} \quad (*)(+)$$

$$(+)\text{ Husk } \cosh^2(z_0) - \sinh^2(z_0) = 1 \implies \sinh(z_0) = i \neq 0$$

b)



$$\Gamma_1 = t, \quad t \in [-Y, x]$$

$$\Gamma_2 = x + it, \quad t \in [0, \pi]$$

$$-\Gamma_3 = i\pi + t, \quad t \in [-Y, x]$$

$$-\Gamma_4 = -Y + it, \quad t \in [0, \pi]$$

$$\Gamma = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_4$$

Af sætn. 12.1 + a) følger $\int_{\Gamma} f = 2\pi i \operatorname{res}(f, i\pi/2) = 2\pi e^{ia\pi/2} (x)$

Γ_2 :

Lad $\varepsilon > 0$ være vilk., da $\operatorname{Re} a < 1 \exists \tilde{x} > 0 \forall x > \tilde{x} (t \in [0, \pi])$

$$|f(x+it)| = \left| \frac{e^{a(x+it)}}{\cosh(x+it)} \right| = \frac{e^{\operatorname{Re} a \cdot x}}{e^x} \left| \frac{e^{-\operatorname{Im} a \cdot t + i(\operatorname{Re} a \cdot t)}}{e^{it} + e^{-2x} e^{-it}} \right| < \frac{\varepsilon}{\pi}$$

Af lemma 6.10 følger $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} f = 0$ (da exp kont.)

Tilsvarende ses, at $\lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_4} f = 0$

Γ_3 :

$$\int_{\Gamma_3} f = - \int_{-\Gamma_3} f = - \int_{-Y}^X \frac{e^{a(i\pi+t)}}{\cosh(i\pi+t)} dt = \int_{-Y}^X \frac{e^{a(i\pi+t)}}{\cosh(t)} dt$$

$\uparrow$
 ST s. 108

$$= e^{ai\pi} \int_{-Y}^X \frac{e^{at}}{\cosh(t)} dt$$

Γ_1 :

$$\int_{\Gamma_1} f = \int_{-Y}^X \frac{e^{at}}{\cosh(t)} dt$$

Af (x) og ovenstående fås:

$$2\pi e^{ia\pi/2} = \lim_{X, Y \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f = (1 + e^{ai\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{at}}{\cosh(t)} dt$$

$\Downarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{at}}{\cosh(t)} dt = \pi \frac{2}{e^{ai\pi/2} + e^{-ai\pi/2}} = \frac{\pi}{\cos(a\pi/2)}$$

c)

Da $\cosh(-x) = \cosh(x)$ fås fra b) (sæt $a=0$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh(x)} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\cosh(x)} dx = \pi \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{1}{\cosh x} dx = \pi/2$$

Sæt $a=i$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{\cosh x} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{\cosh x} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{\cosh x} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\cosh x} dx \\ &= \frac{\pi}{\cos(\pi/2)} = \frac{\pi}{\cosh(\pi/2)} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\cosh x} dx = \frac{\pi}{2 \cosh(\pi/2)} \end{aligned}$$

$\sin -x = -\sin x$
 $\cos -x = \cos x$

Kompleks Funktionsteori TØ nr. 14

Vinter 1999-2000 opgave 3

a)

Da f er analytisk i Ω pincer i 0, hvor den har en pol af orden m , gælder jvf. sætn. 11.1 / ST s. 202

$$\exists b_1, \dots, b_m \in \mathbb{C} (a_n)_{n \geq 0} \subseteq \mathbb{C} : b_m \neq 0 : \forall z \in \Omega \setminus \{0\} :$$

$$f(z) = b_m/z^m + \dots + b_1/z + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (*)$$

Det er udfra reglerne for multiplikation med rækker (ST s. 58)

$$\exists \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{2m} \in \mathbb{C} (\tilde{a}_n)_{n \geq 0} \subseteq \mathbb{C} : \tilde{b}_{2m} = b_m \cdot b_m \neq 0 : \forall z \in \Omega \setminus \{0\}$$

$$f^2(z) = \tilde{b}_{2m}/z^{2m} + \dots + \tilde{b}_1/z + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n z^n, \text{ dette er jvf. ST s. 199-200}$$

Laurentrækken for f^2 , og af ST s. 202 følger at f^2 har en pol af orden $2m$ i 0.

b)

Af ST s. 201-202 følger at idet $f(z)$ har en simpel pol i 0 har $f(z)/z$ en dobbelt pol i 0.

Af lemma 12.3 følger (+ prop. 4.2) at

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{f(z)}{z} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} (f(z) + z f'(z)) = s \quad (+)$$

Jvf (*) + ST s. 74 gælder $f(z) = \frac{r}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

$$\text{således at } z \in \Omega \setminus \{0\} : z \cdot f'(z) = -\frac{r}{z} + a_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n$$

Da $\lim_{z \rightarrow 0} (a_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n) = 0$ følger af (+) + regneregler for konvergente følger at $\lim_{z \rightarrow 0} (f(z) - \frac{r}{z}) = s$

c)

Jf a) har f^2 en dobbelt pol i 0

Af lemma 12.3 følger

$$\begin{aligned} \text{res}(f^2, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{d}{dz} z^2 f^2(z) \right) = \lim_{z \rightarrow 0} (2z f^2(z) + 2z^2 f(z) f'(z)) \\ &= 2 \cdot \lim_{z \rightarrow 0} (z f(z) (f(z) + z f'(z))) \end{aligned}$$

Da $\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = r$ jf. lemma 12.2

og $\lim_{z \rightarrow 0} (f(z) + z f'(z)) = s$ jf. udregningerne i s

følger af regnereglerne for konvergente følger at

$$\text{res}(f^2, 0) = 2rs$$

d)

Af sætn. 12.1 følger

$$\int_{\gamma} f = 2\pi i r, \quad \int_{\gamma} f(z)/z \, dz = 2\pi i s, \quad \int_{\gamma} f^2 = 2\pi i^2 r s$$

$\Downarrow$

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz \cdot \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z} \, dz = -4\pi^2 r s = i \cdot \pi (2\pi i^2 r s) = i\pi \cdot \int_{\gamma} f^2 \, dz$$

fore, convergence of (2) implies that the original series (1) is convergent. A series with the property that the series formed by the absolute values of the terms converges is said to be *absolutely convergent*.

1.2. Subsequences. In Chap. II, Sec. 2.1, we have already discussed sequences from the point of view of *limit points*. We recall that y is a limit point of the sequence $\{x_n\}$ if and only if every neighborhood of y contains x_n for infinitely many n . Under this condition there exists, first of all, an integer n_1 such that $|x_{n_1} - y| < 1$, and to make the choice definite let n_1 be the smallest integer with this property. Next, there exists an $n_2 > n_1$ such that $|x_{n_2} - y| < \frac{1}{2}$, and we can again let n_2 be the smallest integer with these two properties. The construction can now be continued by induction. By supposing that $n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1}$ have already been found, we can determine $n_k > n_{k-1}$ so that $|x_{n_k} - y| < 1/k$; for definiteness we choose n_k as small as possible. The construction determines an infinite subsequence $\{x_{n_k}\}$ with $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = y$. Thus every limit point is the limit of a subsequence. Conversely, it is clear that the limit of a subsequence is a limit point of the original sequence. To simplify the language we shall henceforth call a limit point of a sequence a *limit*. This can be done without fear of confusion if we distinguish carefully between the limit of a convergent sequence and a limit of an arbitrary sequence.

Particular interest is attached to the limits of a sequence of real numbers. It is practically evident that the set of limits of a sequence $\{x_n\}$ is closed (cf. Chap. II, Sec. 2.1, Ex. 7). If the numbers x_n are bounded, so is the set of limits. Moreover, by the Bolzano-Weierstrass theorem (Chap. II, Sec. 2.3, Theorem 6) the set of limits is not empty. In the real case we can hence apply Theorem 2 of Chap. II, Sec. 2.2, and find that there exist a greatest limit A and a smallest limit a . They are called the *limes superior* and *limes inferior* of the sequence $\{x_n\}$ and are denoted by

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

or, in an alternative notation,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

If the sequence is unbounded, there is either a subsequence which tends to $+\infty$, or one which tends to $-\infty$. These improper limits are compared with the ordinary limits, if any, and the greatest and smallest limit take again the name of limes superior and limes inferior. If the values $\pm\infty$ are taken into account, we may thus conclude that every sequence has a limes superior and a limes inferior.

The use of these notions has above all formal advantages. It happens frequently that a relatively complicated epsilon proof can be reduced to formal manipulations based on inequalities of the type

$$\begin{aligned} \lim x_n &\leq \overline{\lim} x_n \\ \underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n &\leq \underline{\lim} (x_n + y_n) \leq \underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n \\ \underline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n &\leq \overline{\lim} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n. \end{aligned}$$

EXERCISES

1. Prove the inequality $\underline{\lim} (x_n + y_n) \leq \underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n$.
2. Show that $\overline{\lim} \cos nx = 1$ if x/π is irrational.
3. Investigate the $\underline{\lim}$ and $\overline{\lim}$ of the sequence $a, a^2, a^{2^2}, \dots$ for different positive values of a .

1.3. Uniform Convergence. Consider a sequence of functions $f_n(x)$. Suppose first that all the functions $f_n(x)$ are defined on the same set E . Then $f_n(x)$ is said to converge to $f(x)$ on E if $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ for every $a \in E$. It is sometimes very important to consider a more general situation. Assuming that f_n is defined on E_n we consider the set E consisting of all points x which belong to all but a finite number of the sets E_n . This means that for $x \in E$, $f_n(x)$ is defined for all sufficiently large n ; since the limit of a sequence depends only on the values for large n , it is still permissible to speak of the limit of the sequence $f_n(x)$ on E . For instance, the function $1/(z - n)$ is not defined for $z = n$. Nevertheless, it can be maintained that $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/(z - n) = 0$ in the whole plane.

In questions of convergence the interest is focussed on the subscript n , while the variable x acts as a parameter. In order to conform with other uses of the word uniform, we must define *uniform convergence* in the following terms: The sequence $\{f_n(x)\}$ converges uniformly to $f(x)$ on a set E if to every $\varepsilon > 0$ there exists an n_0 such that $f_n(x)$ is defined and satisfies $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ for all $n > n_0$ and all $x \in E$.

In our example the convergence of $1/(z - n)$ to 0 is not uniform in the whole plane for the simple reason that none of the functions is even defined in the whole plane. It is easy to see, however, that the convergence is uniform on any compact set. It is also uniform on the imaginary axis.

There are two consequences of uniform convergence which are constantly used. In the first place we can assert that the limit function of a uniformly convergent sequence of continuous functions is continuous. To show this, suppose that the functions $f_n(x)$ are continuous and tend uniformly to $f(x)$ on E . Let x_0 be any point on E and choose an $\varepsilon > 0$. By the uniform convergence there exists an n such that $|f_n(x) - f(x)|$

$< \epsilon/3$ on E . Next, since $f_n(x)$ is continuous we can find a $\delta > 0$ such that $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon/3$ whenever $x \in E$ and $|x - x_0| < \delta$. For the same points we have then $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$, and we have proved that $f(x)$ is continuous at x_0 . The second consequence concerns integration. Suppose that the functions $f_n(z)$ are continuous and converge uniformly to $f(z)$ on a differentiable arc γ . Then it is true that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

The proof is obvious.

In view of these conclusions, it is highly desirable to be able to prove that a sequence converges uniformly. We observe that Cauchy's necessary and sufficient condition has a counterpart for uniform convergence. We assert:

The sequence $\{f_n(x)\}$ converges uniformly on E if and only if to every $\epsilon > 0$ there exists an n_0 such that $|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$ for all $m > n_0$, $n > n_0$ and all $x \in E$.

The necessity of the condition is again trivial. For the sufficiency we remark that the limit function $f(x)$ exists by the ordinary form of Cauchy's criterion. In the inequality $|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$ we can keep n fixed and let m tend to ∞ . It follows that $|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$ for $n > n_0$ and all $x \in E$, and hence the convergence is uniform.

For practical use the following test is the most applicable: If a sequence of functions $\{f_n(x)\}$ is a contraction of a convergent sequence of constants $\{a_n\}$, then the sequence $\{f_n(x)\}$ is uniformly convergent. The hypothesis means that $|f_m(x) - f_n(x)| \leq |a_m - a_n|$ on E , and the conclusion follows immediately by Cauchy's condition.

In the case of series this criterion, in a somewhat weaker form, becomes particularly simple. We say that a series with variable terms

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

has the series with positive terms

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

for a *majorant* if it is true that $|f_n(x)| \leq Ma_n$ for some constant M and for all sufficiently large n ; conversely, the first series is a *minorant* of the second. In these circumstances we have

$$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leq M(a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}).$$

Therefore, if the majorant converges, the minorant converges uniformly. This condition is frequently referred to as the *Weierstrass M test*. It has the slight weakness that it applies only to series which are also absolutely

convergent. The general principle of contraction is more complicated, but has a wider range of applicability.

EXERCISES

1. Prove that a convergent sequence is bounded.
2. If $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$, prove that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (z_1 + z_2 + \cdots + z_n) = A.$$

3. Show that the sum of an absolutely convergent series does not change if the terms are rearranged.
4. Discuss completely the convergence and uniform convergence of the sequence $\{nz^n\}_1^\infty$.
5. Discuss the uniform convergence of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

for real values of x .

1.4. Limits of Analytic Functions. The central theorem concerning the convergence of analytic functions asserts that the limit of a uniformly convergent sequence of analytic functions is an analytic function. The precise assumptions must be carefully stated, and they should not be too restrictive.

We are considering a sequence $\{f_n(z)\}$ where each $f_n(z)$ is defined and analytic in a region Ω_n . The limit function $f(z)$ must also be considered in some region Ω , and clearly, if $f(z)$ is to be defined in Ω , each point of Ω must belong to all Ω_n for n greater than a certain n_0 . In the general case n_0 will not be the same for all points of Ω , and for this reason it would not make sense to require that the convergence be uniform in Ω . In fact, in the most typical case the regions Ω_n form an increasing sequence, $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset \Omega_n \subset \cdots$, and Ω is the union of the Ω_n . In these circumstances no single function $f_n(z)$ is defined in all of Ω ; yet the limit $f(z)$ may exist at all points of Ω , although the convergence cannot be uniform.

As a very simple example take $f_n(z) = z/(2z^n + 1)$ and let Ω_n be the disk $|z| < 2^{-1/n}$. It is practically evident that $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = z$ in the disk $|z| < 1$ which we choose as our region Ω . In order to study the uniformity of the convergence we form the difference

$$f_n(z) - z = -2z^{n+1}/(2z^n + 1).$$

For any given value of z we can make $|z^n| < \epsilon/4$ by taking $n > (\log 4/\epsilon)/(\log 1/|z|)$. If $\epsilon < 1$ we have then $2|z|^{n+1} < \epsilon/2$ and $|1 + 2z^n| > \frac{1}{2}$ so that $|f_n(z) - z| < \epsilon$. It follows that the convergence

is uniform in any closed disk $|z| \leq r < 1$, or on any subset of such a closed disk.

With another formulation, in the preceding example the sequence $\{f_n(z)\}$ tends to the limit function $f(z)$ uniformly on every compact subset of the region Ω . In fact, on a compact set $|z|$ has a maximum $r < 1$ and the set is thus contained in the closed disk $|z| \leq r$. This is the typical situation. We shall find that we can frequently prove uniform convergence on every compact subset of Ω ; on the other hand, this is the natural condition in the theorem that we are going to prove.

Theorem 1. Suppose that $f_n(z)$ is analytic in the region Ω_n , and that the sequence $\{f_n(z)\}$ converges to a limit function $f(z)$ in a region Ω , uniformly on every compact subset of Ω . Then $f(z)$ is analytic in Ω . Moreover, $f'_n(z)$ converges uniformly to $f'(z)$ on every compact subset of Ω .

The analyticity of $f(z)$ follows most easily by use of Morera's theorem (Chap. III, Sec. 2.3). Let $|z - a| \leq r$ be a closed disk contained in Ω ; the assumption implies that this disk lies in Ω_n for all n greater than a certain n_0 .† If γ is any closed curve contained in $|z - a| < r$, we have

$$\int_{\gamma} f_n(z) dz = 0$$

for $n > n_0$, by Cauchy's theorem. Because of the uniform convergence on γ we obtain

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = 0,$$

and by Morera's theorem it follows that $f(z)$ is analytic in $|z - a| < r$. Consequently $f(z)$ is analytic in the whole region Ω .

An alternative and more explicit proof is based on the integral formula

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(\xi) d\xi}{\xi - z},$$

where C is the circle $|\xi - a| = r$ and $|z - a| < r$. Letting n tend to ∞ we obtain by uniform convergence

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z},$$

and this formula shows that $f(z)$ is analytic in the disk. Starting from the formula

$$f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(\xi) d\xi}{(\xi - z)^2}$$

† In fact, the regions Ω_n form an open covering of $|z - a| \leq r$. The disk is compact and hence has a finite subcovering. This means that it is contained in a fixed Ω_{n_0} .

the same reasoning yields

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^2} = f'(z),$$

and simple estimates show that the convergence is uniform for $|z - a| \leq \rho < r$. Any compact subset of Ω can be covered by a finite number of such closed disks, and therefore the convergence is uniform on every compact subset. The theorem is proved, and by repeated applications it follows that $f_n^{(k)}(z)$ converges uniformly to $f^{(k)}(z)$ on every compact subset of Ω .

Theorem 1 is due to Weierstrass, in an equivalent formulation. Its application to series whose terms are analytic functions is particularly important. The theorem can then be expressed as follows:

If a series with analytic terms,

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots,$$

converges uniformly on every compact subset of a region Ω , then the sum $f(z)$ is analytic in Ω , and the series can be differentiated term by term.

The task of proving uniform convergence on a compact point set A can be facilitated by use of the maximum principle. In fact, with the notations of Theorem 1, the difference $|f_m(z) - f_n(z)|$ attains its maximum in A on the boundary of A . For this reason uniform convergence on the boundary of A implies uniform convergence on A . For instance, if the functions $f_n(z)$ are analytic in the disk $|z| < 1$, and if it can be shown that the sequence converges uniformly on each circle $|z| = r_m$ where $\lim_{m \rightarrow \infty} r_m = 1$, then Weierstrass's theorem applies and we can conclude that the limit function is analytic.

EXERCISES

1. Using Taylor's theorem applied to a branch of $\log(1 + z/n)$, prove that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$$

uniformly on all compact sets.

2. Show that the series

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

converges for $\operatorname{Re} z > 1$, and represent its derivative in series form.

3. Prove that

$$(1 - 2^{1-z})\zeta(z) = 1^{-z} - 2^{-z} + 3^{-z} - \cdots$$

and that the latter series represents an analytic function for $\operatorname{Re} z > 0$.

4. If $f(z)$ is analytic for $|z| < 1$ and $f(0) = 0$, prove that the series

$$f(z) + f(z^2) + f(z^3) + \cdots + f(z^n) + \cdots$$

converges and represents an analytic function for the same values of z .

Eksempel

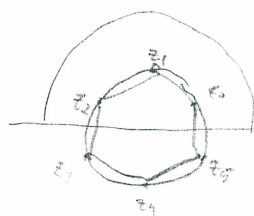
P-S s.d.S. - (t) $\pi/2 \rightarrow \pi/3$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{1+x^6} dx$$

Residuerequiring $f(z) = \frac{z^4}{z^6+1}$

$$z^6+1=0 \quad z^6=-1 = e^{i(\pi+2p\pi)} \quad z = e^{i(\frac{\pi}{6}+p\frac{\pi}{3})} \quad p=0,1,\dots,5$$

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}, z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}, z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}, z_3 = e^{i\frac{7\pi}{6}}, z_4 = e^{i\frac{3\pi}{2}}, z_5 = e^{i\frac{11\pi}{6}}$$



$$\begin{aligned} \text{res}(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{z_0^4}{6z_0^5} = \frac{1}{6z_0} = \frac{1}{6e^{i\pi/6}} = \frac{1}{6} e^{-i\pi/6} \\ \text{res}(f, z_1) &= -1/6, \quad \text{res}(f, z_2) = \frac{1}{6} e^{-i5\pi/6} \end{aligned}$$

$$\int_C \frac{z^4}{z^6+1} dz = 2\pi i \sum_{i=0}^2 \text{res}(f, z_i) = \frac{2\pi i}{6} \{ e^{-i\pi/6} - 1 + e^{-i5\pi/6} \}$$

$$= \frac{\pi i}{3} \{ \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} - 1 + \cos \frac{5\pi}{6} - i \sin \frac{5\pi}{6} \}$$

$$= \frac{\pi i}{3} \{ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} - 1 - i \frac{1}{2} \} = \frac{\pi}{3} (\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\int_{C_r} \frac{z^4}{z^6+1} dz = \int_{-r}^r \frac{x^4}{x^6+1} dx + \int_0^\pi \frac{r^4 e^{i4\theta}}{r^6 e^{i6\theta} + 1} r e^{i\theta} i d\theta$$

$$\left| \int_0^\pi \frac{r^4 e^{i4\theta}}{r^6 e^{i6\theta} + 1} r e^{i\theta} i d\theta \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{r^5}{r^6 e^{i6\theta} + 1} \right| d\theta \leq \pi \frac{r^5}{r^6 - 1} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

$r > 1: |r^6 e^{i6\theta} + 1| \geq r^6 - 1$

Slutten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{x^6+1} dx = \int_C \frac{z^4}{z^6+1} dz = \int_{C_r} \frac{z^4}{z^6+1} dz = \frac{2\pi}{3} - \int_{C_r} \frac{z^4}{z^6+1} dz \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{dvs.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{x^6+1} dx = \frac{2\pi}{3}$$

Kompleks Funktionsteori

Ugeseddel nr. 11

Forelæsningerne den 27. og 29. november omhandler gammafunktionen. De fremlagte noter af Gorm Kittelmann benyttes.

Opgaver til øvelserne i ugen 3. - 7. december:

PS opg. 88, 1-3 (Rettelse i 1. linie: $z + \frac{1}{2}$)

Eksamen som. 2001 opg. 1

Eksamen som. 2001 opg. 4

Eksamen som. 2000 opg. 4

Afleveringsopgave til ugen 3. - 7. december:

Eksamen som. 2001 opg. 3

Med venlig hilsen

Erik Balslev

Afløeringsopgave nr. 12, Komplex Funktionsteori, Gunnar Hellmuth, 19960312

a)

Def. $\varphi: D \rightarrow D$ $z \in D$ $\varphi(z) = \frac{z+a}{\bar{a}z+1}$, det ses $\varphi(0)=a$
og φ er jvf sætn. 25.1 i PS en automorfi af D .

b)

$$g(0) = \varphi^{-1}(f(\varphi(0))) = \varphi^{-1}(f(a)) = \varphi^{-1}(a) = 0$$

$$g(\varphi^{-1}(b)) = \varphi^{-1}(f(\varphi(\varphi^{-1}(b)))) = \varphi^{-1}(f(b)) = \varphi^{-1}(b) \in D \setminus \{0\}$$

Da φ, φ^{-1}, f er holomorfe fkt. fra D ind i D

følger af prop. 4.3 at g er holomorf (fra D ind i D)

Derfor følger af sætn. 25.2 (idet $g(0)=0$ og $g(\varphi^{-1}(b))=\varphi^{-1}(b)$)

at $\exists c \in \mathbb{C} : |c|=1 : \forall z \in D : g(z) = c \cdot z$

Da $g(\varphi^{-1}(b)) = \varphi^{-1}(b) = c \cdot \varphi^{-1}(b)$ ser vi at $c=1$, dvs.

$$g(z) = z, z \in D$$

c)

Lad $z \in D$ være vilkårlig

$$\varphi^{-1}(z) \stackrel{b)}{=} g(\varphi^{-1}(z)) = \varphi^{-1}(f(\varphi(\varphi^{-1}(z)))) = \varphi^{-1}(f(z))$$

$\Downarrow$

$$f(z) = z$$

Sommer 2001 opg. 1

$$(1+z+z^2)^2 = (z + 1/2 - \sqrt{3}/2 i)^2 (z + 1/2 + \sqrt{3}/2 i)^2 \quad (+)$$

Def. $f: \mathbb{C} \setminus \{ -1/2 - \sqrt{3}/2 i, -1/2 + \sqrt{3}/2 i \} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$f(z) = (1+z+z^2)^{-2}, \quad z \in D := \mathbb{C} \setminus \{ -1/2 - \sqrt{3}/2 i, -1/2 + \sqrt{3}/2 i \}$$

Vi ser at $f \in C^\infty(D)$

Juf (+) og prop. 11.4 har f en dobbelt pol i $-1/2 + \sqrt{3}/2 i$

Af lemma 12.3 følger

$$\begin{aligned} \text{res}(f, -1/2 + \sqrt{3}/2 i) &= \lim_{z \rightarrow -1/2 + \sqrt{3}/2 i} \frac{d}{dz} (z + 1/2 + \sqrt{3}/2 i)^{-2} \\ &= \lim_{\substack{z \rightarrow -1/2 + \sqrt{3}/2 i \\ \text{prop. 11.2}}} \frac{-2}{(z + 1/2 + \sqrt{3}/2 i)^3} = \frac{-2}{(\sqrt{3}i)^3} = \frac{2}{3\sqrt{3}i} \quad (*) \end{aligned}$$

Juf Note A s. 221: ST $\exists A, \tilde{R} > 0 \forall R > \tilde{R}: |f(z)| \leq A/R^2$

for $|z|=R, \text{Im } z \geq 0$; da $f \in C^\infty(D)$ gælder juf. ST s. 220

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \text{res}(f, -1/2 + \sqrt{3}/2 i) \stackrel{(*)}{=} 2\pi i \frac{2}{3\sqrt{3}i} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

Sommer 2001 opg. 4

a)

Det er klart at alle pht. i $\mathbb{C} \setminus \Omega$ tilhører samme komponent for $\gamma^{(*)}$ (γ vilk. lukket kurve i Ω), derfor er det en umiddelbar konsekvens af ST s. 132 at γ har samme omløbstal omkring alle pht. i $\mathbb{C} \setminus \Omega$

(+) Idet $\mathbb{C} \setminus \Omega$ er enhedsdisken med centrum i 0 (se desuden def. på 'komponenter' i ST s. 42)

b)

Hvis $\alpha_i \neq 0$ er f diff. i z_i ellers har f en simpel pol i z_i jvf. prop. 11.4 og det tilhørende residue er jvf. lemma 12.2 α_i ($\text{res}(f, z_i) = \alpha_i$)
 f er holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_r \mid \exists \alpha_{ij} \neq 0\} (X)$

Antag at f har en stamfkt. i Ω

Lad C betegne en cirkel i $\mathbb{C}$ med centrum i 0 og radius $r > 1$, dvs. $C \subset \Omega$ og jvf. sætn. 12.1 og sætn. 6.11 samt (X) fås

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum \alpha_i &= 2\pi i \sum_{\alpha_j \neq 0} \alpha_j + 2\pi i \sum_{\alpha_j \neq 0} \text{res}(f, z_j) = 2\pi i \sum_{\alpha_j \neq 0} \text{res}(f, z_j) \\ &= \int_C f = 0 \Rightarrow \sum \alpha_i = 0 \end{aligned}$$

Antag $\sum \alpha_j = 0$, dvs. jvf. (X) $2\pi i \sum_{\alpha_j \neq 0} \text{res}(f, z_j) = 0$ (*)

Lad γ betegne en vilkårlig lukket kurve i Ω

Hvis $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$: $w(\gamma, z) = 0$ følger af a) og sætn. 8.8
at $\int_{\gamma} f = 0$

Antag $w(\gamma, z) = k$, $k \geq 1$ $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$

Vi kan jvf. metoden i st. s. 153-154 vælge

kurver $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ (f.eks. linjestykker parallelle med z -aksen)

i Ω således at $\int_{\sigma_1, \dots, \sigma_k} f = 0$

jvf. sætn. 8.8 og a) og således at der

eksisterer en opsplittning $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ af γ

hvor $\gamma_i + \sigma_i$ er en simpel kurve i Ω , $i = 1, \dots, k$

Jvf. sætn. 12.1 (X), (*) gælder $\int_{\gamma_i + \sigma_i} f = 0$

$$\text{Dvs. } \int_{\gamma} f = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i + \sigma_i} f = k \cdot 2\pi i \sum_{\alpha_j \neq 0} \text{res}(f, z_j) = 0$$

Dvs. da γ var en vilk. lukket kurve i Ω følger af
sætn. 6.11 at f har en stamfkt. i Ω

Sommer 2000 opg. 4

a)

Det er klart at $\pm i\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ er rødder i

$$P(z) = (a^2 - b^2)z^4 + 2(a^2 + b^2)z^2 + a^2 - b^2, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\text{Def. } Q(z) = 2(a^2 + b^2)z^2, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}: |z| = 1:$$

$$|P(z) - Q(z)| = |(a^2 - b^2)z^4 + a^2 - b^2| \leq 2|a^2 - b^2|$$

$$< 2|a^2 + b^2| = |Q(z)|$$

$a, b > 0$
 $a > b$

Af sætn. 12.6 følger at P, Q har samme antal nulpl. i enhedscirkelskiven; Q har 2 nulpl. i enhedscirkelskiven.

Dvs. $\pm i\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ er de eneste rødder i $P(z)$ på enhedscirkelskiven, udfra def. på f ser vi dermed at de eneste singulære punkter for f i enhedscirkelskiven er $\pm i\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$

Udfra prop. 11.4 ser vi at f har simple poler i $\pm i\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$

$$(z - i\sqrt{\frac{a-b}{a+b}})(z + i\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}) = z^2 + \frac{a-b}{a+b}$$

$$P(z): z^2 + \frac{a-b}{a+b} = (a^2 - b^2)z^2 + (a+b)^2 \quad (*)$$

$$\frac{(a^2 - b^2)z^4 + (a-b)^2z^2}{(a+b)^2z^2 + a^2 + b^2}$$

$$(a+b)^2z^2 + a^2 + b^2$$

Af lemma 12.2 følger

$$\begin{aligned} \operatorname{res}(f, i\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}) &= \frac{i\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}}{2i\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}((a^2-b^2)(i\sqrt{\frac{a-b}{a+b}})^2 + (a+b)^2)} \\ &= \frac{1}{2((a+b)^2 - \frac{a-b}{a+b})} = \frac{a+b}{2((a+b)^3 - a+b)} \end{aligned}$$

Tilsvarende ses $\operatorname{res}(f, -i\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}) = \frac{a+b}{2((a+b)^3 - a+b)}$

b)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} \stackrel{\text{ST 12.8}}{=} \int_{\gamma} \frac{1}{a^2 (\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}))^2 + b^2 (\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}))^2} \frac{dz}{iz}$$

$$= \int_{\gamma} \frac{1/iz}{a^2 (1/4(z^2+1/z^2+2)) + b^2 (-1/4(z^2+1/z^2-2))} dz$$

$$= \int_{\gamma} \frac{-4iz}{a^2(z^4+1+2z^2) - b^2(z^4+1-2z^2)} dz$$

$$= \int_{\gamma} \frac{-4iz}{(a^2-b^2)z^4 + 2(a^2+b^2)z^2 + a^2-b^2} dz = -4i \int_{\gamma} f$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{satn. 12.1}}}{=} -4i \cdot 2\pi i \cdot 2 \frac{a+b}{2((a+b)^3 - a+b)} = \frac{8\pi(a+b)}{(a+b)^3 - a+b}$$

2. GAMMAFUNKTIONEN

Historisk set blev Gammafunktionen første gang (1729) [W. & W.] defineret af Euler, som det uendeligeprodukt:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} \right\} \quad (2.1)$$

Vi vil senere se at dette produkt er analytisk på $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$ med simple poler i $z = 0, -1, -2, \dots$

og at denne definition er ækvivalent med Weierstrass's kanoniske form:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right\} \quad (2.2)$$

(γ er Eulers konstant).

Jeg tager udgangspunktet i Gammafunktionen defineret som integral:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt \quad \operatorname{Re} s > 0 \quad (2.3)$$

(t^s hvor s er kompleks ses defineret i def. B.21).

I afsnit 2.2 vil vi udvide denne definition og i afsnit 2.3 vises at (2.1), (2.2) og (2.3) (med udvidelse) er ækvivalente.

2.1. Gammafunktionen som integral.

Definition 2.1. Gammafunktionen og Betafunktionen er defineret ved:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt \quad \operatorname{Re} s > 0 \quad (2.4)$$

$$B(u, v) = \int_0^1 t^{u-1} (1-t)^{v-1} dt \quad \operatorname{Re} u > 0 \quad \operatorname{Re} v > 0 \quad (2.5)$$

Sætning 2.2. $\Gamma(s)$ og $B(u, v)$ er veldefineret og analytisk på $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$.

Bevis. Vi ser først på gammafunktionen. Det første vi skal vise er at integralet eksisterer, dvs $\int_0^{\infty} |e^{-t} t^{s-1}| dt < \infty$

Lad $s \in \mathbb{C}^+$. Da eksisterer der $\delta, A \in \mathbb{R}$ så $0 < \delta < \operatorname{Re} s < A$

$$\begin{aligned} |e^{-t} t^{s-1}| &= |e^{-t}| \cdot |e^{(s-1) \ln t}| \\ &= e^{-t} e^{(\operatorname{Re} s - 1) \ln t} = e^{-t} t^{\operatorname{Re} s - 1} \\ &\leq \begin{cases} t^{\delta-1} & 0 < t \leq 1 \\ e^{-t} t^{A-1} & t > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 t^{\delta-1} dt = \left[\frac{1}{\delta} t^{\delta} \right]_0^1 = \frac{1}{\delta} < \infty$$

$$\int_1^{\infty} e^{-t} t^{A-1} dt < \infty$$

Sidste integral ses ved at anvende partiel integration et passende antal gange og bemærke at $\int_1^{\infty} e^{-t} t^a dt < \int_1^{\infty} e^{-t} dt < \infty$ for $a \leq 0$. Vi kan nu vurdere det ønskede integral:

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |e^{-t} t^{s-1}| dt < \infty$$

For at vise at $\Gamma(s)$ er analytisk lader vi C være en lukket kurve i den positive komplekse halvplan $\mathbb{C}^+$:

$$\int_C \Gamma(s) ds = \int_C \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt ds = \int_0^{\infty} \int_C e^{-t} t^{s-1} ds dt = \int_0^{\infty} 0 dt = 0$$

Hvilket fås fra Cauchy's sætning da $e^{-t} t^{s-1}$ som funktion af s er analytisk. Ombytning af integralerne fås fra Fubinis sætning.

Da $\Gamma(s)$ er kontinuert (integralet eksisterer) og for alle lukkede kurver i $\mathbb{C}^+$ er $\int_C \Gamma(s) ds = 0$ har vi fra Morera's sætning at $\Gamma(s)$ er analytisk i $\mathbb{C}^+$.

På samme måde kan vi vise at $B(u, v)$ er veldefineret og analytisk, med følgende vurdering for $\operatorname{Re} u > \delta > 0$ $\operatorname{Re} v > \delta$:

$$|t^{u-1} (1-t)^{v-1}| \leq t^{\delta-1} (1-t)^{\delta-1} \quad \forall t \in (0, 1)$$

□

2.1.1. Sammenhæng mellem Gamma og Beta-funktionen.

Sætning 2.3.

$$B(u, v) \Gamma(u + v) = \Gamma(u) \Gamma(v) \quad u, v \in \mathbb{C}^+ \quad (2.6)$$

Bevis. Vi udregner følgende integral på to måder:

$$\begin{aligned} I(u, v) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} x^{2u-1} y^{2v-1} dx dy \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2u-1} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} y^{2v-1} dy \\ &= I(u) I(v) \end{aligned}$$

Selv om vores integral ikke er reelt er Substitution tilladt, da vi substituere med en reel variabel, se evt. bemærkning (B.22). Sub. $t = x^2$ $x = \sqrt{t}$ $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$.

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} (\sqrt{t})^{2u-1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{u-1} dt = \frac{1}{2} \Gamma(u)$$

Dvs.

$$I(u, v) = \frac{1}{4} \Gamma(u) \Gamma(v)$$

Herefter udregnes $I(u, v)$ i polære koordinater:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad dx dy = r dr d\theta$$

$$I(u, v) = \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2u-1+2v-1} r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2u-1} (\sin \theta)^{2v-1} d\theta$$

$$\text{Sub. } t = r^2 \quad r = \sqrt{t} \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$\begin{aligned} I(u, v) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{u+v-1} dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2u-1} (\sin \theta)^{2v-1} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \Gamma(u+v) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2u-1} (\sin \theta)^{2v-1} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \Gamma(u+v) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta)^{u-\frac{1}{2}} (1 - \cos^2 \theta)^{v-\frac{1}{2}} d\theta \end{aligned}$$

Sub. $t = \cos^2 \theta$ (Bemærk at t er strengt monoton og diff. på $[0, \frac{\pi}{2}]$)

$$\theta = \text{Arccos} \sqrt{t} \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{\sqrt{1-t} 2\sqrt{t}}$$

$$\begin{aligned} I(u, v) &= \frac{1}{2} \Gamma(u+v) \int_1^0 t^{u-\frac{1}{2}} (1-t)^{v-\frac{1}{2}} \frac{-1}{\sqrt{1-t} 2\sqrt{t}} dt \\ &= \frac{1}{4} \Gamma(u+v) \int_0^1 t^{u-1} (1-t)^{v-1} dt \\ &= \frac{1}{4} \Gamma(u+v) B(u, v) \end{aligned}$$

Det ses nu at

$$\Gamma(u) \Gamma(v) = \Gamma(u+v) B(u, v)$$

□

2.1.2. Funktionalligninger.

Sætning 2.4. Funktionalligninger for gammafunktionen.¹

$$\Gamma(s+1) = s \Gamma(s) \quad \text{Re } s > 0 \quad (2.7)$$

$$\Gamma(s) \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \quad 0 < \text{Re } s < 1 \quad (2.8)$$

Bevis. for 2.7

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 1$$

Med (2.6) har vi

$$\Gamma(s+1) B(s, 1) = \Gamma(s) \Gamma(1) = \Gamma(s)$$

$$\begin{aligned} B(s, 1) &= \int_0^1 t^{s-1} (1-t)^{1-1} dt \\ &= \int_0^1 t^{s-1} dt \\ &= \left[\frac{1}{s} t^s \right]_0^1 = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Se evt. (B.1)

$$\Rightarrow \Gamma(s+1) = s \Gamma(s)$$

□

Til at bevise 2.8 anvendes følgende lemma:

Lemma 2.5.

$$B(s, 1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \quad 0 < \operatorname{Re} s < 1$$

Bevis.

$$B(s, 1-s) = \int_0^1 t^{s-1} (1-t)^{-s} dt = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t} \right)^{s-1} \frac{1}{1-t} dt$$

Substituerer

$$\begin{aligned} x = \frac{t}{1-t} &\Rightarrow x(1-t) = t \Rightarrow \\ x = t(1+x) &\Rightarrow t = \frac{x}{1+x} \end{aligned}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\frac{1}{1-t} = \frac{1}{1 - \frac{x}{1+x}} = 1+x$$

Vi får

$$B(s, 1-s) = \int_0^\infty x^{s-1} (1+x) \frac{1}{(1+x)^2} dx = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1+x} dx$$

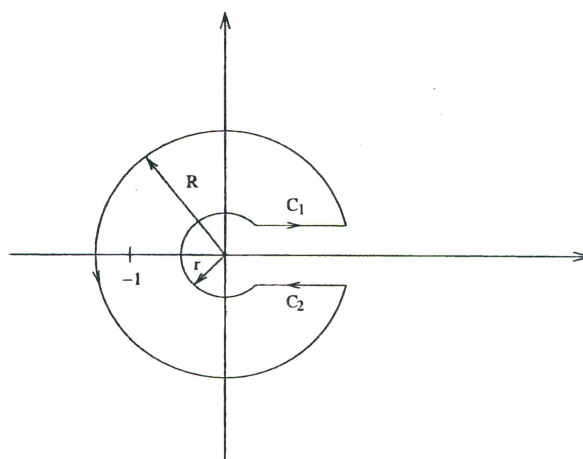
For at evaluere $B(s, 1-s)$ anvendes residue sætningen.

$$f(z) = \frac{z^{s-1}}{1+z} \quad z \in \mathbb{C}_0 = \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$$

Vi ønsker at $f(z)$ er kontinuert på $\mathbb{C}_0 \setminus \{z=-1\}$ og lader derfor

$$z^a = e^{a(\ln|z| + i \arg z)} \quad 0 < \arg z < 2\pi$$

Vi integrerer f langs kurven C , se fig.1



FIGUR 1. kurven C omkring $z=-1$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, -1) &= \lim_{z \rightarrow -1} (z - (-1)) \frac{z^{s-1}}{1+z} = \lim_{z \rightarrow -1} z^{s-1} \\ &= e^{(s-1)(\ln 1 + i\pi)} = e^{(s-1)i\pi} = -e^{i\pi s} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Se [S.T.]. Af residue sætningen fås:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1) = -2\pi i e^{i\pi s} \quad (2.11)$$

$\int_C f$ er uafhængigt af R og r . Vi lader nu $r \rightarrow 0$ og $R \rightarrow \infty$ og ser at vi kun får bidrag fra integralet langs C_1 og C_2 .

Integralet langs den inderste kurve:

$$\int_{|z|=r} f \rightarrow 0 \quad \text{for } r \rightarrow 0$$

Bevis. Lad $z = r e^{i\phi}$ $\phi \in [0, 2\pi]$ $s = u + iv$ $u, v \in \mathbb{R}$ og $0 < u < 1$

$$\begin{aligned} z^{s-1} &= (r e^{i\phi})^{u-1+iv} = e^{(u-1+iv)(\ln r + i\phi)} \\ &= e^{(u-1)\ln r - v\phi} e^{i(v\ln r + (u-1)\phi)} \\ |z^{s-1}| &= e^{(u-1)\ln r - v\phi} \\ &\leq e^{(u-1)\ln r} e^{|v|2\pi} \\ &= r^{u-1} e^{2\pi|v|} \end{aligned}$$

$$|z+1| \geq 1 - |z| = 1 - r > 0 \quad \text{for } r < 1$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{|z|=r} \frac{z^{s-1}}{z+1} dz \right| &\leq 2\pi r e^{2\pi|v|} \frac{r^{u-1}}{1-r} \\ &= \text{konst.} \frac{r^u}{1-r} \rightarrow 0 \quad r \rightarrow 0 \end{aligned}$$

da $u > 0$

Integralet langs den yderste kurve:

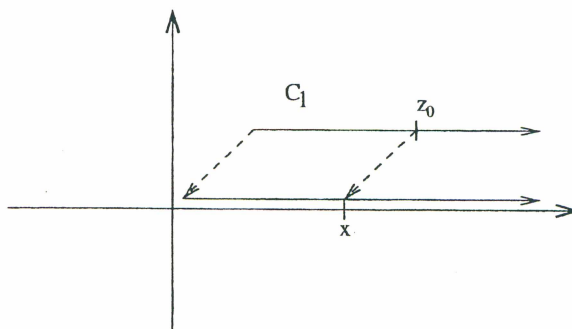
$$\int_{|z|=R} f \rightarrow 0 \quad \text{for } R \rightarrow \infty$$

Bevis. Vi har nu $|z+1| \geq R-1$ for $R > 1$, ellers kan vi blot i ovenstående udregninge erstatte r med R og får:

$$\left| \int_{|z|=R} \frac{z^{s-1}}{z+1} dz \right| \leq \text{konst.} \frac{R^u}{R-1} \leq \text{konst.} R^{u-1} \rightarrow 0 \quad \text{for } R \rightarrow \infty$$

da $u < 1$

Vi vil nu se på grænseværdierne for integralet langs C_1 og C_2 . For et bestemt punkt $z_0 = r_0 e^{i\phi}$ på C_1 vil $\phi \rightarrow 0$ og $r_0 \rightarrow x$ når $r \rightarrow 0$, se figur 2. Derfor vil $\lim_{r \rightarrow 0} z_0^s = e^{s(\ln x + i0)} = x^s$. Pga. vores kontinuerte valg for z^s får vi ikke det samme i det tilsvarende punkt på C_2 . Da vil $\phi \rightarrow 2\pi$ $r_0 \rightarrow x$ når $r \rightarrow 0$ hvorfor $\lim_{r \rightarrow 0} z_0^s = e^{s(\ln x + i2\pi)} = x^s e^{i2\pi s}$



FIGUR 2. Punktet z_0 på C_1 i grænsen $r \rightarrow 0$

$$\int_{C_1} f(z) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{R \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1+x} dx = B(s, 1-s)$$

$$\int_{C_2} f(z) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{R \rightarrow \infty} - \int_0^\infty \frac{x^{s-1} e^{i2\pi s}}{1+x e^{i2\pi}} dx = -e^{i2\pi s} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1+x} dx = -e^{i2\pi s} B(s, 1-s)$$

Dvs.

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_C f = B(s, 1-s) (1 - e^{i2\pi s})$$

Af (2.11) fås:

$$\begin{aligned} B(s, 1-s) (1 - e^{i2\pi s}) &= -2\pi i e^{i\pi s} \Leftrightarrow \\ B(s, 1-s) &= \pi \left[\frac{1}{2i} \frac{e^{i2\pi s} - 1}{e^{i\pi s}} \right]^{-1} = \pi \left[\frac{1}{2i} (e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}) \right]^{-1} = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \end{aligned}$$

□

Bevis. for 2.8. Af (2.6) og lemma (2.5) fås:

$$\Gamma(s) \Gamma(1-s) = B(s, 1-s) \Gamma(s+1-s) = B(s, 1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

□

2.2. Udvidelse af Gammafunktionen.

Proposition 2.7.

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n+1)}{s(s+1)\cdots(s+n-1)(s+n)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \operatorname{Re} s > 0 \quad (2.12)$$

Bevis. Lad $n \in \mathbb{N}$ være givet:

$$\begin{aligned} \Gamma(s+n+1) &= (s+n) \Gamma(s+n) = (s+n)(s+n-1) \Gamma(s+n-1) \\ &= \cdots = (s+n) \cdots (s+1) s \Gamma(s) \end{aligned}$$

□

Ud fra proportion (2.7) kan $\Gamma(s)$ udvides til $\mathbb{C}_{-\mathbb{N}_0} = \mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N} \cup \{0\}\}$ efter følgende opskrift: lad $s \in \mathbb{C}$ være givet. Find et $n \in \mathbb{N}$ så $\operatorname{Re} s > -(n+1) \Leftrightarrow n > -(1+\operatorname{Re} s)$. Da er $\Gamma(s)$ givet ved (2.12)

$\Gamma(s)$ stemmeoverens med den tidligere definition på $\mathbb{C}^+$ og er iflg. proposition 2.7 analytisk på $\mathbb{C}_{-\mathbb{N}_0}$.

2.2.1. Nulpunkter og poler.

Proposition 2.8.

$\Gamma(s)$ har simple poler i $s = 0, -1, -2, \dots$ med $\operatorname{Res}(\Gamma, -n) = (-1)^n \frac{1}{n!} \quad n \in \mathbb{N}_0$

Bevis. Lad $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow -n} \left[(s - (-n)) \cdot \Gamma(s) \right] &= \lim_{s \rightarrow -n} \left[(s+n) \frac{\Gamma(s+n+1)}{s(s+1)\cdots(s+n)} \right] \\ &= \frac{\Gamma(1)}{-n(-n+1)\cdots(-1)} \\ &= (-1)^n \frac{1}{n!} \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} \end{aligned}$$

Da Grænseværdien eksisterer og ikke er nul har vi det ønskede, se [S.T.] lemma 11.4 og 12.2.

□

Proposition 2.10.*Udvidelse af funktionalligning: (2.8)*

$$\Gamma(s) \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \quad \forall s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \quad (2.14)$$

Bevis. $\Gamma(s) \Gamma(1-s)$ og $\frac{\pi}{\sin(\pi s)}$ er begge analytiske funktioner på $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ som klart er en åbenmængde. Da funktionerne stemmer overens på $\{z \in \mathbb{Z} \mid 0 < \operatorname{Re} s < 1\}$ har vi fra identitetssætningen [S.T.] s.187 det ønskede. $\square$

Sætning 2.11. $\Gamma(s)$ har ingen nulpunkter.

Bevis. Vi ved $\Gamma(n+1) = n! \neq 0$ for $n \in \mathbb{N}_0$. Vi mangler nu $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. For at opnå en modstrid antager vi at der eksisterer $s_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ så $\Gamma(s_0) = 0$.

$\Gamma(s) \neq 0$ i en udprikket åben omegn omkring s_0 , (ellers ville $\Gamma = 0$ overalt), og her har vi

$$\Gamma(1-s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

Vi kan derfor tage grænseværdien:

$$\lim_{s \rightarrow s_0} |\Gamma(1-s)| = \lim_{s \rightarrow s_0} \left| \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \right| = \left| \frac{\pi}{\sin(\pi s_0)} \right| \lim_{s \rightarrow s_0} \left| \frac{1}{\Gamma(s)} \right| = \infty$$

Da $\Gamma(1-s)$ er analytisk i s_0 , har vi en modstrid. $\square$

2.2.3. Funktionalligningerne med udvidelse.

På samme måde som vi udvidede gyldigheden af (2.8), kan vi udvide de øvrige funktionalligninger:

$$\Gamma(s+1) = s \Gamma(s) \quad s \in \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}_0 \quad (2.20)$$

$$\Gamma(s) \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \quad s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \quad (2.21)$$

Kompleks funktionsteori, Hold 2 og 3

Morten Skarsholm Risager • A.3.25 • risager@imf.au.dk

23. november 2001

Afsnittet nederst side 132 i P.S om Möbiustransformationen

$$\Phi(z) = \frac{z-i}{z+i}, \quad z \in \mathbb{C}^*$$

er en smule dunkelt. Vi vil forsøge at gå lidt grundigere til værks. Start med at genlæse S&T opg. 2.7 (US 1) for definitionen af sammenhængskomponenter og egenskaber ved disse. Lad

$$\begin{aligned} D &= \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| < 1\}, & \tilde{D} &= \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| > 1\} \\ H &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}, & \tilde{H} &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) < 0\} \\ C &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}. \end{aligned}$$

Det er en god idé at sidde med en tegning af disse områder når bevises gennemlæses. Lav D , $\tilde{D}$ og C på én kopi af $\mathbb{C}$ og de andre på en anden.

Påstand 1. Möbiustransformationen Φ afbilder $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (surjektivt) på C , dvs

$$\Phi(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = C.$$

Bevis. Da Φ er cirkeltro (Sætning 24.3) er $\Phi(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ en cirkel eller en linie. Vi bemærker at

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= -1 \\ \Phi(1) &= -i \\ \Phi(\infty) &= 1 \end{aligned}$$

Disse tre punkter ligger alle på C . Da tre forskellige punkter entydigt bestemmer en cirkel eller en linie er

$$\Phi(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = C.$$

□

Påstand 2. Mængden $\mathbb{C}^* \setminus (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ splitter op i sammenhængskomponenter på følgende måde

$$\mathbb{C}^* \setminus (\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = H \cup \tilde{H}.$$

Bevis. Husk at sammenhængskomponenten indeholdende z_0 er mængden af de $z \in \mathbb{C}^* \setminus (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ hvor der eksisterer en kontinuert kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^* \setminus (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ så $\gamma(a) = z$ og $\gamma(b) = z_0$. Detaljerne overlades til læseren. □

Påstand 3. Mængden $\mathbb{C}^* \setminus C$ splitter op i sammenhængskomponenter på følgende måde

$$\mathbb{C}^* \setminus C = D \cup \tilde{D}.$$

Bevis. Overlades til læseren. $\square$

Påstand 4. Lad A være en sammenhængende delmængde af $\mathbb{C}$ og lad $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ være kontinuert. Så er $f(A)$ sammenhængende.

Bevis. Lad $f(z_1), f(z_2) \in f(A)$, hvor $z_1, z_2 \in A$. Da A er sammenhængende findes der en kontinuert kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ så $\gamma(a) = z_1$ og $\gamma(b) = z_2$. Betragt nu $\Gamma(t) = f(\gamma(t))$ for $t \in [a, b]$. Så er $\Gamma : [a, b] \rightarrow f(A)$ kontinuert og $\Gamma(a) = f(z_1)$ og $\Gamma(b) = f(z_2)$. Dermed er $f(A)$ sammenhængende ifølge definitionen. $\square$

Bemærk at påstand 2 og 4 tilsammen viser at både $\Phi(H)$ og $\Phi(\tilde{H})$ er sammenhængende idet en sammenhængskomponent ifølge opgave 2.7 i S&T er sammenhængende.

Påstand 5. Möbiustransformationen Φ afbilder H ind i D og $\tilde{H}$ ind i $\tilde{D}$, dvs.

$$\Phi(H) \subset D, \quad \Phi(\tilde{H}) \subset \tilde{D}.$$

Bevis. Bemærk at $i \in H$ og $-i \in \tilde{H}$. Da $\Phi(i) = 0 \in D$ og $\Phi(-i) = \infty \in \tilde{D}$ er $\Phi(H) \subset D$ og $\Phi(\tilde{H}) \subset \tilde{D}$. Antag nemlig at der findes et $z \in H$ så $\Phi(z) \notin D$. Da Φ er injektiv kan $\Phi(z)$ ifølge påstand 1 ikke ligge på $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Dermed må $\Phi(z) \in \tilde{D}$. Ifølge bemærkningen umiddelbart efter påstand 4 er der en kontinuert kurve mellem $\Phi(i) = 0$ og $\Phi(z) \in \tilde{D}$. Men dette er i modstrid med påstand 2. Altså er $\Phi(H) \subset D$. Tilsvarende med den anden mængdeinklusion. $\square$

Påstand 6. Möbiustransformationen Φ afbilder H surjektivt på D og $\tilde{H}$ surjektivt på $\tilde{D}$ dvs.

$$\Phi(H) = D, \quad \Phi(\tilde{H}) = \tilde{D}.$$

Bevis. Ifølge påstand 5 er $\Phi(H) \subset D$ og $\Phi(\tilde{H}) \subset \tilde{D}$. Antag modstridsvist at der eksisterer et $z \in D$ så $z \notin \Phi(H)$. Der Φ er en bijektion fra $\mathbb{C}^*$ til $\mathbb{C}^*$ eksister der et $w \in \mathbb{C}^*$ så $\Phi(w) = z$. Ifølge antagelsen er $w \notin H$. Dvs. $w \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eller $w \in \tilde{H}$. Hvis $w \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ er $z = \Phi(w) \in \mathbb{R}$ ifølge påstand 1 og hvis $w \in \tilde{H}$ er $z = \Phi(w) \in \tilde{D}$ ifølge påstand 5. Begge dele giver modstrid med $z \in D$. Altså er antagelsen forkert og $\Phi(H) = D$. Den anden lighed vises på tilsvarende måde. $\square$

Proposition 1. Afbildningen $\Phi|_H : H \rightarrow D$ er en isomorfi mellem den øvre halvplan og enhedscirkelskiven.

Bevis. Afbildningen $\Phi|_H$ er surjektiv på D ifølge påstand 6. Den er injektiv idet Φ er injektiv og den er differentiabel da den er sammensat af differentiable funktioner og $-i \notin H$. Bemærk at den inverse Möbiustransformation giver en differentiabel afbildning den anden vej. $\square$

Morten Skarsholm Risager

Kompleks Funktionsteori

Ugeseddel nr. 10

Vi har afsluttet gennemgangen af homografier efter PS.

Vi fortsætter efter S-T med kap. 13.4, potentialteori, og derefter kap. 14, analytisk fortsættelse.

Opgaver til øvelserne i ugen 26. - 30. november:

PS opg. 98, l. 1-5
opg. 99

Eksamensopgaver

vin. 2000-2001 opg. 1
vin. 2000-2001 opg. 2
som. 2001 opg. 2

Afleveringsopgave til ugen 26. - 30. november:

vin. 2000-2001 opg. 3

Med venlig hilsen

Erik Balslev

a)

Da f er analytisk på D $\exists \{a_n\}_{n=0}^\infty \subseteq \mathbb{C}$:

$$\forall z \in D: f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (*)$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0, \text{ dvs. } f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad (*)$$

$\forall z \in D \setminus \{0\}$:

$$g(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2z} \stackrel{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} z^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} (-1)^n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} z^{2n-1} \quad (+)$$

lemma 3.5

Da $g(0) = 0$ følger (jf. ST s. 201) at g er analytisk på D

$$\text{Af sætn. 4.12 følger af (+) } g'(0) = a_2 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{korollar} \\ 4.14}}{\frac{f''(0)}{2}}$$

b)

Jvf. sætn. 25.2 gælder $\forall z \in D: |f(z)| \leq |z|$

(specielt gælder $\forall z \in D: |f(-z)| \leq |-z|$) (≠)

$$\forall z \in D \setminus \{0\}: |g(z)| \leq \frac{|f(z)|}{2|z|} + \frac{|f(-z)|}{2|-z|} \stackrel{(\neq)}{\leq} 1$$

Hvis $\exists z' \in D: |g(z')| = 1$ så vil $\exists z_0 \in D: |f(z_0)| \geq |z_0|$

Dvs. jvf. (≠) $|f(z_0)| = |z_0|$ og af sætn. 25.2 følger

$$\exists a \in \mathbb{C}: \forall z \in D: f(z) = az \Rightarrow g(D) = \{0\} \subset D$$

Da $g(0) = 0$ følger derfor $g(D) \subset D$

c)

Da $g: D \rightarrow D$ og g holomorf samt $g(0)=0$ følger af sætn. 25.2

$\forall z \in D \setminus \{0\}$:

$$|g(z)| \leq |z| \Rightarrow |f(z) + f(-z)| \leq 2|z|^2$$

$$z=0: |f(z) + f(-z)| = 0 + 0 \leq 0 = 2|z|^2$$

$$\text{Dus, } \forall z \in D: |f(z) + f(-z)| \leq 2|z|^2 \quad (*)$$

Jef. def. på diff. har vi

$$|g'(0)| = \lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{f(z) + f(-z)}{2z^2} \right| \leq \frac{1}{x} \quad \xrightarrow{a)} \Rightarrow \frac{1}{2} |f''(0)| \leq 1 \Rightarrow |f''(0)| \leq 2$$

Vinter 2000-2001 opg. 1

a)

$$\forall z \in \mathbb{C}: e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^n$$

Dvs.,

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{i}{z^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^{n-3} = \frac{1/3}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-i^{(n+3)}}{(n+3)!} z^n \quad (*)$$

Detta er jvf. ST s. 199-200 Laurentserien for f omkring $z_0=0$

Jvf. ST s. 212 ser vi $\text{res}(f, 0) = 1/3$

b)

Vi kan skrive f som $f(z) = 1/3 \cdot 1/z + \varphi(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

hvor φ er analytisk på hele $\mathbb{C}$, jvf. (*), specielt gælder

$$\exists R > 0, M \geq 0 \forall r < R: |z| \leq r \Rightarrow |\varphi(z)| \leq M \quad (+)$$

$\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ $t \in [0, \pi]$ $\gamma(t) = re^{it}$ er en parametrisering af H_r

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{H_r} f = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{H_r} \frac{1}{z^2} dz + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{H_r} \varphi(z) dz$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz + \lim_{r \rightarrow 0} M \pi \cdot r \quad \text{jvf. lemma 6.10}$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{\pi} \frac{1}{2re^{it}} r i e^{it} dt = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{\pi} \frac{i}{2} dt = i\pi \frac{1}{2} = i\pi \text{res}(f, 0)$$

$$\forall z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} z \geq 0; z = x + iy \quad (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_+)$$

$$|f(z)| \leq \frac{|1 + iz - e^{iz}|}{|z|^3} \leq \frac{1}{|z|^3} + \frac{1}{|z|^2} + \frac{e^{-y}}{|z|^3} \leq \frac{2}{|z|^3} + \frac{1}{|z|^2} \quad (*)$$

$$\left| \int_{H_r} f \right| \leq \left(\frac{2}{r^3} + \frac{1}{r^2} \right) \pi r \xrightarrow{\text{lemma 6.10}} 0 \quad \text{for } r \rightarrow \infty$$

$$\text{Dus.} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{H_r} f = 0$$

c)

Lad $0 < \varepsilon < r$

Af sætn. 12.1 følger

$$\int_{H_r + [E, r, -\varepsilon] + H_\varepsilon + [E, \varepsilon]} f = 0 \quad (*)$$

Her skal bemærkes at vi gennemløber $H_r + [E, r, -\varepsilon] + H_\varepsilon + [E, \varepsilon]$ mod uret og at f kun har en singularitet og dermed er kun et residue relevant (nemlig $\operatorname{res}(f, 0)$)

Af b) og (*) følger

$$P \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = i\pi \operatorname{res}(f, 0) = \frac{i\pi}{2}$$

Dus.

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^3} dx = 0 \quad \text{og} \quad P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^3} dx = \frac{\pi}{2} \quad (\neq)$$

Juf. L' Hopital $\frac{x - \sin x}{x^3} \rightarrow \frac{1}{6}, x \rightarrow 0$

og $x \geq 1$: $\left| \frac{x - \sin x}{x^3} \right| \leq \frac{2}{|x|^2}$

heraf kan vi konkludere at $\int_0^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^3} dx$ eksisterer

da $x \geq 0$: $\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{-x - \sin(-x)}{(-x)^3}$ følger at

$$2 \int_0^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^3} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^3} dx \quad \text{af (*) følger derfor}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^3} dx = \frac{\pi}{4}$$

Vinter 2000-2001 opg. 2

a)

Jvf. def. på exp. s. 82 + (12)-(13) s. 16 i ST følger at
 $\forall z \in \mathbb{C}: \overline{e^z} = e^{\bar{z}}$

Af (12)-(13) s. 16 i ST følger

$$\forall z \in \mathbb{C}: \overline{f_k(z)} = \overline{e^z - 3z^k} = e^{\bar{z}} - 3\bar{z}^k = f_k(\bar{z}), \quad k \geq 1$$

b)

Antag modstridsvis at $\exists z_0 \in \mathbb{C}: f_k(z_0) = f'_k(z_0) = 0, \quad k \geq 1$

Vi får $e^{z_0} - 3z_0^k = e^{z_0} - 3kz_0^{k-1} \Rightarrow z_0 = k \in \mathbb{N}$
($z_0 \neq 0$)

men $\forall x \in \mathbb{N}: e^x - 3x^k \neq 0$ idet e^x er irrationel og $3x^k$ er et naturligt tal $\leadsto$

Dvs. alle f_k 's nulpunkter er af orden 1.

c)

Def. $g_k: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z \in \mathbb{C}: g_k(z) = -3z^k, \quad k \geq 1$

$$z \in \partial\Omega: |g_k(z) - f_k(z)| = |e^z| \underset{z \in \partial\Omega}{\leq} e < 3 \underset{z \in \partial\Omega}{\leq} | -3z^k |$$

Da g_k har præcis k nulpkt. i Ω følger af sætn. 12.6 at f_k har præcis k nulpkt. i Ω .

d)

$$f_k(-1) = e^{-1} - 3(-1)^k = e^{-1} + 3 > 0$$

kulige

$$f_k(1) = e - 3 < 0$$

Da f_k er kont. (som fkt. i en reel variabel)

følger af mellemverdisætn. at $\exists x \in (-1, 1) : f_k(x) = 0$

Dvs. mindst et af nulpunkterne for f_k i Ω er reelt.

Sommeren 2001 opg. 2

A

Antag modstridsvis at f er analytisk på $\mathbb{C}$

Def. $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \in \mathbb{C} : g(z) = z^3$ (Bm. $g \in C^\infty(\mathbb{C})$)

Da $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}$ og $g(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}$ følger idet $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \in \mathbb{C}$ af sætn. 10.11 at $f \equiv g$ på $\mathbb{C}$, men $\forall n \geq 1: f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3} \neq -\frac{1}{n^3} = g(-\frac{1}{n})$ $\leadsto$

Dvs. f er ikke analytisk på $\mathbb{C}$.

B

Antag modstridsvis at g ikke er konstant

Af sætn. 10.14 følger $\forall z \in \mathbb{C} : |z| < 1 : |g(z)| < 5$

idet $\forall z \in \mathbb{C} : |z| < 1 : |g(z)| \leq 5$, men $|g(0)| = |4-3i| = 5$ $\leadsto$

Dvs. g er konstant.

Kompleks Funktionsteori

Ugeseddel nr. 9

Ved forelæsningerne 13/11 beviser vi, at homografien $z \rightarrow \frac{1}{z}$ svarer til en drejning på 180° om ξ -aksen på Riemann-sfæren. Dette knyttes til at bevise PS sætning 24.3. Derefter studeres homografien

$$\phi(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

(I P.S. noter rettes på s. 138 l. -6 og -3 1 til i)
Derefter gennemgås PS afsnit 25.

Ved forelæsningen 15/11 gennemgås S-T 13.4. Derefter påbegyndes kap. 14.

Opgaver til øvelserne i ugen 19. - 23. november:

Bevis sætning 24.4

Bestem billederne ved ϕ af kurvesystemerne (A), (B), (C) i PS s. 133
PS 95, 96

Eksamen: Vinteren 1999-2000 , opgave 4
Sommeren 2000, opgave 2

Afleveringsopgave til ugen 19. - 23. november:

Eksamensopgave: Sommer 2000, opgave 3.

Med venlig hilsen

Erik Balslev

a)

Vi ser $\varphi(z) = -i \Phi(-iz)$, $z \in D$ Φ def. på s. 132 i PS

Af PS s. 132-133 følger, at φ afbilder D på H , idet $w \rightarrow -iw$ er en bijektion af D på D .

b)

Af prop. 4.3 følger, at $f \circ \varphi : D \rightarrow D$ er holomorf

og $D[f \circ \varphi] = (f' \circ \varphi) \cdot \varphi' \quad (*) \quad \left(\varphi'(z) = i \frac{(1-z)(1+i)}{(1-z)^2} = \frac{2i}{(1-z)^2} \right)$
prop. 4.2 iv)

Vi ser at $f \circ \varphi(0) = f(\varphi(0)) = f(i) = 0$

Af PS sætn. 25.2 følger at

$$|f'(\varphi(0)) \varphi'(0)| = |f'(i)| \cdot 2 \leq 1 \implies |f'(i)| \leq 1/2 \quad \text{og}$$

$$|f(\varphi(1/3))| = |f(2i)| \leq 1/3$$

c)

En sådan holomorf fkt. opfylder jvf b) at

$$|D[g \circ \varphi]_{z=0}| = |g'(\varphi(0)) \varphi'(0)| = |g'(i)| \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Dus, af PS sætn. 25.2 følger at $\exists a \in \mathbb{C}$:

$$g \circ \varphi(z) = a \cdot z, \quad z \in D$$

Sæt $\varphi(z) = w$, $z \in D$

$$g(w) = a \varphi^{-1}(w) = a \frac{w-i}{w+i} \quad (\text{jvf. PS s. 130})$$

g er def. på H jvf. a) og $g^{-1}(w) = a \frac{w+i-w+i}{(w+i)^2} = a \frac{2i}{(w+i)^2}$

$$\frac{1}{2} = g^{-1}(i) = a \frac{1}{2i} \implies a = i$$

Dus, $g: H \rightarrow D$, $z \in H$: $g(z) = i \frac{z-i}{z+i}$ er funktionen vi søger

(g er holomorf på H og $g(i) = 0$, $g'(i) = 1/2$)

Vinter 1999-2000 opg. 4

a)

$z \in D$:

$$\varphi_{-a}(\varphi_a(z)) = \frac{\frac{z-a}{1-\bar{a}z} + a}{1 + \bar{a} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}} = (z-a+a-|a|^2z)/(1-\bar{a}z+\bar{a}z-|a|^2) = z$$

b)

Da $\forall \alpha \in D$:

$$|\varphi_\alpha(1)| = \left| \frac{1-\alpha}{1-\bar{\alpha}} \right| = 1, \quad |\varphi_\alpha(-1)| = \left| \frac{-1-\alpha}{1+\bar{\alpha}} \right| = 1, \quad |\varphi(i)| = \left| \frac{i-\alpha}{1-i\bar{\alpha}} \right| = \left| \frac{1+i\alpha}{1-i\bar{\alpha}} \right| = 1$$

$\varphi_\alpha(0) = -\alpha$ følger (idit φ_α er diff. på $D \setminus \{1/\bar{\alpha}\}$) af sætn. 24.3

at $\varphi_{-a}, \varphi_{f(a)}$ er analytiske afb. fra D på D (*)

Da $1 - \overline{f(a)} f(\varphi_{-a}(z)) \neq 0$ på hele D er g veldef., jvf (*) følger af prop. 4.3 at g er analytisk

$$g(0) = \varphi_{f(a)}(f(\varphi_{-a}(0))) = \varphi_{f(a)}(f(a)) = 0$$

$$g'(z) \stackrel{\text{prop. 4.3}}{=} \varphi'_{f(a)}(f(\varphi_{-a}(z))) f'(\varphi_{-a}(z)) \varphi'_{-a}(z)$$

$$\stackrel{\text{prop. 4.2}}{=} \frac{1 - |f(a)|^2}{(1 - \overline{f(a)} f(\varphi_{-a}(z)))^2} f'(\varphi_{-a}(z)) \frac{1 - |a|^2}{(1 - \bar{a}z)^2}$$

$$\varphi_{-a}(0) = a$$

$$\text{Dvs. } g'(0) = \frac{1 - |f(a)|^2}{(1 - \overline{f(a)} f(a))^2} f'(a) \cdot (1 - |a|^2) = \frac{1 - |a|^2}{1 - |f(a)|^2} f'(a)$$

c)

$\forall z \in D \exists w \in D : \varphi_{-a}(w) = z$ jvf. sætn. 24.1 $\exists \varphi_{-a}^{-1}$

og vi har $\varphi_{-a}^{-1}(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ (*)

Af sætn. 25.2 følger jvf b) at

$$|g(w)| \leq |w|, \quad \forall w \in D$$

$$\Downarrow * \quad z = \varphi_{-a}(w)$$

$$|\varphi_{f(a)}(f(z))| \leq |\varphi_{-a}^{-1}(z)|, \quad \forall z \in D$$

$$\Downarrow *$$

$$\left| \frac{f(z) - f(a)}{1 - \overline{f(a)} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right|, \quad \forall z \in D$$

Desuden har vi (sætn. 25.2)

$$|g'(0)| \leq 1$$

$$\Downarrow b)$$

$$|f'(a)| \leq \frac{1 - |f(a)|^2}{1 - |a|^2}$$

Sommer 2000 opg. 2

A

$$\forall z \in \mathbb{C}: e^{f(z) - kg(z)} = e^{\operatorname{Re} f(z) - k \cdot \operatorname{Re} g(z)} \cdot e^{i(\operatorname{Im} f(z) - k \cdot \operatorname{Im} g(z))}$$

$\Downarrow$

$$|e^{f(z) - kg(z)}| = e^{\operatorname{Re} f(z) - k \cdot \operatorname{Re} g(z)} \leq 1$$

Antag modstridslvis at $f(z) - k \cdot g(z)$ ikke er konstant

Af satn. 10.14 følger at

$$M: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+ : t \in [0, \infty) : M(t) = \sup_{|z|=t} |e^{f(z) - kg(z)}|$$

er strengt voksende (Vi husker at $e^{f(z) - kg(z)}$ er analytisk på $\mathbb{C}$)

men det må betyde at $\exists t \geq 0 : |e^{f(z) - kg(z)}| > 1 \quad \rightsquigarrow$

$$\text{Dvs. } \exists c \in \mathbb{C} : f(z) = k \cdot g(z) + c, z \in \mathbb{C}$$

B

Da g er analytisk og ikke identisk nul i en omegn af z_0 medfører at der findes $\{a_n\}_{n \geq 0} \in \mathbb{C}, \varepsilon_1 > 0 : g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

$z \in N_{\varepsilon_1}(z_0)$ og $\exists k \geq 0 : a_k \neq 0$

Tilsvarende findes da f analytisk med en væsentlig isoleret singularitet i z_0 $\{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}, \varepsilon_2 > 0 : f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$

$z \in N_{\varepsilon_2}(z_0)$ og uendeligt mange $\{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ er forskellige fra nul

$$z \in N_{\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}(z_0) = N_{\varepsilon}(z_0)$$

$$f(z)g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i b_{n+i} \right) (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Da $f \cdot g$ er analytisk på $N_{\varepsilon}(z_0) \setminus \{z_0\}$ jf. prop. 4.2 er

alle de involverede rækker konvergente og veldefinerede jf. satn. 11.1
+ ST s. 199-200

Hvis f, g ikke har en væsentlig isoleret singularitet i z_0

$$\exists N \geq 1 \forall n \geq N: \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_{n+i} = 0$$

$\Downarrow$

$g \equiv 0$ i $N_\varepsilon(z_0)$ eller f ikke har en væsentlig isoleret singularitet i z_0 $\square$

Kompleks Funktionsteori

Ugeseddel nr. 8

Ved forelæsningerne 1/11 gennemgik vi Rouché's Sætning (Theorem 12.6), algebraens fundamentalsætning og fra Palle Schmidts noter sætning 16.3.

Ved forelæsningerne 6/11 og 8/11 vil vi gennemgå PS sætningerne 16.4, 16.5, 16.6 samt afsnit 17.

Derefter påbegyndes Stewart & Tall kap 13.

Opgaver til øvelserne i ugen 12. - 16. november:

Eksamen: vin. 98-99 opg. 2
som. 99 opg. 2
som. 99 opg. 3
vin. 99-2000 opg. 2

Afleveringsopgave til ugen 12. - 16. november:

Eksamensopgave: sommer 99 opgave 4.

Rettelse til ugeseddel 7: sommer 98-99 rettes til vinter 98-99.

Med venlig hilsen

Erik Balslev

a)

Antag modstridsvis at $b=0$: $|a| = |a-b| < |a| + |b| = |a|$ $\frac{1}{2}$

Dvs. $b \neq 0$ (Hlsvarende ses $a \neq 0$)

Bm. a/b er veldefineret da $b \neq 0$

$a/b \neq 0$ (da $a \neq 0$)

Antag modstridsvis at $a/b \in (-\infty, 0)$

Dvs. $\arg(a/b) = \pi$, dvs. $\arg(a) = \pi + \arg(b)$, dvs. $|a-b| = |a| + |b|$

men $|a-b| < |a| + |b|$ $\frac{1}{2}$

Rigtigt, men Forklar!

Dvs. $a/b \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

b)

Det er klart at $(-\infty, 0] \subseteq U(\gamma)$ (notation ST s.133) og dermed

har vi $w(\gamma, 0) = 0$
 Ikke helt nok. Brug istedet $w(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$
 og at $\frac{1}{z}$ har en stamfunktion i området!

Bm. : Vi har benyttet at $(\gamma^*)^c$'s komponenter er kurvesammenhængende.

c)

Beriset forløber præcis som i ST s.232-233 blot bemærker vi

(med notationen fra ST) at $\Gamma^* \subseteq \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ idet $|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$

$\Rightarrow \frac{g(z)}{f(z)} \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ jvf a), hvilket jvf. b) medfører at

$$\int_{\gamma} F(z)/f(z) dz = w(\Gamma, 0) = 0$$

Rigtigt, men lige lovligt køjlet

Kompleks Funktionsteori TØ nr. 10

Vinter 98/99 opg. 2

a)

Lad $s, t \in [0, 1)$ være givet således $s \leq t$

Hvis f er konstant gælder trivielt at $M(s) \leq M(t)$

Antag at f ikke er konstant

$\bar{N}_t(0)$ er en kompakt mængde og $\bar{N}_s(0) \subseteq \bar{N}_t(0)$

Af sætn. 10.14 følger at $|f|$ antager sit maksimum på randen af $\bar{N}_t(0)$, hvoraf fås $\sup_{|z|=s} |f(z)| \leq \sup_{|z|=t} |f(z)|$, dvs. $M(s) \leq M(t)$.

b)

Jvf ST s. 186 $\exists g' \in C^\infty(D, \mathbb{C})$: $f(z) = (z-a)^2 g'(z)$ $z \in D$.

g' har (jvf nulreglen) et nulpkt. af orden 2 i $-a$,
dvs. jvf. ST s. 186 $\exists g \in C^\infty(D, \mathbb{C})$: $g'(z) = (z+a)^2 g(z)$ $z \in D$

Alt i alt kan vi konkludere

$$z \in D : f(z) = (z-a)^2 g'(z) = (z-a)^2 (z+a)^2 g(z) = (z^2 - a^2)^2 g(z)$$

hvor g er en analytisk fkt.

c)

Lad g være valgt som i b), dvs. $g(z) = \frac{f(z)}{(z^2 - a^2)^2}$, $z \in D$
hvor $a \in (0, 1)$. ($g \in C^\infty(D, \mathbb{C})$)

Lad $s, t \in [0, 1)$ være givet således $s < t$, $a < t$

Af a) følger

$$\sup_{|z|=s} \left| \frac{f(z)}{(z^2-a^2)^2} \right| \leq \sup_{|z|=t} \left| \frac{f(z)}{(z^2-a^2)^2} \right|$$

$$\text{Idet } |z^2 - a^2| \leq |z^2| + |a^2| = s^2 + a^2 \quad |z|=s$$

$$\text{og } |z^2 - a^2| \geq ||z^2| - |a^2|| = t^2 - a^2 \quad |z|=t \text{ g\u00e4lde}$$

$$\frac{M(s)}{(s^2+a^2)^2} \leq \frac{M(t)}{(t^2-a^2)^2} \Rightarrow M(s) \leq \left(\frac{s^2+a^2}{t^2-a^2} \right)^2 M(t)$$

Sommer 1999 opg. 2

a)

$$z \in \mathbb{C} : |z| = r : |bz+c| \leq |b||z| + |c| = |b|r + |c|$$

$$\leq |b|r + (1-|b|)r = r$$

$|b| < 1$
 $r \geq |c|/(1-|b|)$

Dus. $bz+c \in D(r)$

b)

$$r_1 \geq |c|/(1-|b|) \quad r_2 \geq |d|/(1-|b|)$$

Før $r = \max(r_1, r_2) : bz+c, \beta z+\gamma \in D(r)$ juf. a)

Antag at f konstant $\neq 0$

$$\text{Da } \forall z \in \mathbb{C} \ |z| = r : |f(z)| \stackrel{(*)}{=} (|a|+|a|) |f(z)| < |f(z)| \quad \text{ny}$$

$|a|+|a| < 1$

Dus. hvis f konstant gælder $f \equiv 0$

Antag at f ikke er konstant

Da f er diff og $\overline{D(r)}$ er en kompakt mængde følger af sætn. 10.14 at $\exists z_0 \in \mathbb{C} \ |z_0| = r \ \forall z \in D(r) : |f(z)| \leq |f(z_0)|$

Da $bz+c, \beta z+\gamma \in D(r)$ følger

$$|f(z_0)| \leq |a| |f(bz+c)| + |a| |f(\beta z+\gamma)| \leq (|a|+|a|) |f(z_0)| < |f(z_0)| \quad \text{ny}$$

$|a|+|a| < 1$

Dus. f er konstant.

Alt i alt kan vi konkludere at for $|a|+|a| < 1$ gælder $f \equiv 0$

c)

Lad r være valgt som i b)

$$z \in \mathbb{C} : |z| = r : D^n[f(z)] = \alpha b^n f^{(n)}(bz+c) + \alpha B^n f^{(n)}(Bz+\gamma)$$

$$\text{Da } |b|, |B| < 1 \exists N \geq 1 \forall n \geq N : |ab^n| + |\alpha B^n| < 1$$

$$\text{Af b) følger at } \exists N \geq 1 \forall n \geq N : f^{(n)} \equiv 0 \quad (1)$$

Da f er analytisk på $\mathbb{C}$ har vi jvf sætn. 10.3 og (1)

$$z \in \mathbb{C} : f(z) = f(z_0+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n, z \in \mathbb{C}$$

Dvs. f er et polynomium

Sommer 1999 opg. 3

a)

$$h_1: D \rightarrow \mathbb{C} \quad h_1(z) = f'(z)g(z), z \in D; \quad h_2: D \rightarrow \mathbb{C} \quad h_2(z) = f(z)g'(z), z \in D$$

Da f, g er analytiske på D er h_1, h_2 analytiske på D

$\forall n \geq 1: h_1(z_n) = h_2(z_n)$ af sætn. 10.11 følger, idet $(z_n)_{n \geq 1}$ har et kontaktunkt i D , at $h_1 \equiv h_2$ på D , dvs

$$\forall z \in D: f'(z)g(z) = f(z)g'(z)$$

b)

Hvis g er konstant gælder

$g \neq 0$: Af a) følger at $f'(z) = 0 \quad \forall z \in D$ dvs. f konstant jvf. sætn. 4.7

da er det trivielt at $\exists a, b \in \mathbb{C}: ag(z) = bf(z) \quad \forall z \in D$ (valg f.eks. $a = \frac{1}{g(z)}, b = \frac{1}{f(z)}$)

$g \equiv 0$: $\exists a, b \in \mathbb{C}: ag(z) = bf(z)$ (for a vilkårlig og $b = 0$)

Antag g ikke konstant

Da D er åben og g analytisk på D $\exists z_0 \in D, \epsilon > 0 \quad \forall z \in N_\epsilon(z_0): g(z) \neq 0$,
dvs. på $N_\epsilon(z_0)$ er $z \mapsto f(z)/g(z)$ veldef. og analytisk (da f, g analytiske).

Af a) følger $D[f(z)/g(z)] = (f'(z)g(z) - f(z)g'(z))/g(z)^2 = 0 \quad z \in N_\epsilon(z_0)$

Af sætn. 4.7 følger $\exists c \in \mathbb{C} \quad f(z) = cg(z)$ på $N_\epsilon(z_0)$

Af sætn. 10.11 følger $\forall z \in D \quad f(z) = cg(z)$, dvs. $\exists a, b \in \mathbb{C}: ag(z) = bf(z)$

(idet vi sætter $a = c, b = 1$)

Alt i alt kan vi konkludere at $\exists a, b \in \mathbb{C} (a \neq 0 \vee b \neq 0)$:

$$ag(z) = bf(z) \quad \forall z \in D.$$

Vinter 1999/2000 opg. 2

a)

$$w \in \mathbb{C} : |w| < |a|$$

$$w - a \neq 0 \quad (\text{antag } w - a = 0 \Rightarrow w = a \Rightarrow |w| = |a| \text{ } \text{m}_2)$$

Antag modstridvis at $w - a \in \mathbb{C}_{\arg a}$

Da $w - a \neq 0$ må gælde $\arg(w - a) = \arg(a)$, dvs $\exists k \in \mathbb{R}_+ : k(w - a) = a$

$$\text{Dvs. } kw = (1+k)a \Rightarrow |w| = \frac{1+k}{k} |a| > |a| \text{ } \text{m}_2$$

Alt i alt kan vi konkludere at $w - a \notin \mathbb{C}_{\arg a}$

b)

Lad $z_0 \in \partial\Omega$ være vilkårlig

$$|a| - |f(z_0)| \geq |a| - M > 0$$

Da f er analytisk^(†) i en omegn $N_\delta(z_0)$ af z_0 har vi

$$\exists \delta : 0 < \delta < \delta \forall z \in N_\delta(z_0) : |a| - |f(z)| > 0 \quad (\text{dvs. } |a| > |f(z)|)$$

Af a) følger $z \in N_\delta(z_0) : f(z) - a \in \mathbb{C}_{\arg a}$

Juf. prop. 4.3 og ST s. 126 er $z \mapsto \log_{\arg a} (f(z) - a)$ analytisk på $N_\delta(z_0)$

z_0 var vilkårlig dermed har vi vist at $z \mapsto \log_{\arg a} (f(z) - a)$ er analytisk i en omegn af $\partial\Omega$, D (1)

$$\text{Bm at } \frac{d}{dz} \log_{\arg a} (f(z) - a) = \frac{\frac{d}{dz} (f(z) - a)}{f(z) - a}, \quad z \in D \quad (2)$$

prop. 4.3
ST s. 126

(†) Dermed specielt kontinuert

c)

Antallet af gange som f antager værdien a på Ω er antallet af nulpkt. for $f(z)-a$ på Ω , N (talt med multiplisitet)

Lad P betegne antallet af f 's poler i Ω talt med multiplisitet.

Der følger af b) og sætn. 12.4 at $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{\frac{d}{dz}(f(z)-a)}{f(z)-a} dz = N - P$,

Men jvf. b) (1)+(2) følger af sætn. 6.11 at $\int_{\partial\Omega} \frac{\frac{d}{dz}(f(z)-a)}{f(z)-a} dz = 0$

Dvs. $N = P$

Kompleks Funktionsteori

Ugeseddel nr. 7

Ved forelæsningerne den 30/10 og 2/11 gennemgås 12.3 (vi), 12.4 og 12.5 med Rouché's sætning. Derefter påbegyndes kap. 13.

Opgaver til øvelserne i ugen 5. - 9. november:

Ex. 12: 17 (i)
21.
22

Eksamensopgaver: ~~sommer~~ ^{vinter} 98-99 opg. 1, sommer 99 opg. 1, sommer 2000 opg. 1.

Afleveringsopgave til ugen 5. - 9. november:

Eksamensopgave: vinter 98/99 opgave 4.

Med venlig hilsen

Erik Balslev

a)

$$q: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \in \mathbb{C} : q(z) = a_k z^k \quad \text{pr. antagelse}$$

$$|z| = R : |p(z) - q(z)| \leq \sum_{i \neq k} |a_i| R^i < |a_k| R^k = |q(z)| \quad \checkmark$$

Da $q(z)$ har præcis k nulpladser på cirkelskiven $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ følger af sætn. 12.6 at $p(z)$ har præcis k nulpladser på $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$. (idet vi vælger δ til at være den sædvanlige parametrisering af cirklen med centrum i 0 og radius R)

b)

Idet $13 \cdot 2^3 > 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 9 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^4$ ^(†) følger af a) at ligningen

har præcis 2 løsninger i området $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 13\}$ $\checkmark$

Du må gerne bruge $\varepsilon = 1$. Det skal jo være på cirklen $\gamma(t) = e^{it}$ din vurdering skal gælde. Hvor beklager. Jeg så ikke at du havde $|z| \leq 1$. Så her der.

$$\text{Idet } 9 \cdot 2^3 = 72 > 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 13 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^4 = 71$$

følger af a) at ligningen har præcis 3 løsninger i området $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$ $\checkmark$

Alt i alt kan vi konkludere at ligning har præcis en løsning i området $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ $\checkmark$ (1)

$$f(t) : [-2, -1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(t) = t^4 + 9t^3 + 13t^2 + t + 1 \quad t \in [-2, -1]$$

$$f(-2) = -5, \quad f(-1) = 5, \text{ dvs. da } f \text{ er kont. på } [-2, -1]$$

$$\text{at } \exists t_0 \in (-2, -1) : t_0^4 + 9t_0^3 + 13t_0^2 + t_0 + 1 = 0$$

Dvs. den ene løsning omtalt i (1) er reel. $\checkmark$

Udmærket Godt nok 14/11 = 2007 (5)

(†)

Der eksisterer et $\varepsilon > 1$ således at ligningen holder

idet $\varepsilon \rightarrow 1 \cdot \varepsilon^0 + 1 \cdot \varepsilon^1 + 9 \cdot \varepsilon^2 + 1 \cdot \varepsilon^4$ er kontinuert og er lig 12 i $\varepsilon = 1$ og idet $12 < 13$.

Kompleks Funktionsteori nr. 9

Ex. 12.17

i)

$$z+a \neq 0 \text{ når } z \neq -a, \quad a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$$

$$f: \mathbb{C} \setminus \{-a\} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{-a\} \quad f(z) = (z+a)^{-2}$$

Vi ser at f er diff. på hele $\mathbb{C}$ (undregnet $\mathbb{Z}$) p. n. punkt $-a$.

$$\text{I } -a \text{ har vi: } \lim_{z \rightarrow -a} (z+a)^2 \frac{\cot(\pi z)}{(z+a)^2} = \cot(\pi a) \neq 0$$

Dus. jvf. proposition 11.4 er $-a$ en dobbelt pol for $f(z)\cot(\pi z)$

$$\text{res}(f(z)\cot(\pi z), -a) = \lim_{\substack{z \rightarrow -a \\ \text{lemma 12.3}}} \left\{ \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} (z+a)^2 \cdot \frac{\cot(\pi z)}{(z+a)^2} \right\} = -\frac{\pi}{\sin^2(\pi a)}$$

Jvf ST s. 228 er de restværende singulariteter for $f(z)\cot(\pi z)$ simple poler i pkt. ene n , $n \in \mathbb{Z}$ og $\text{res}(f(z)\cot(\pi z), n) = \frac{1}{\pi(n+a)^2}$

$$\text{Da } \sqrt{|f(z)|} = \frac{1}{|z+a|} \leq \frac{1}{|z|-|a|} \leq \frac{2}{|z|}, \quad |z| \geq 2|a| \Rightarrow |f(z)| \leq \frac{4}{|z|^2} \quad |z| \geq 2|a|$$

gælder jvf. ST s. 230, at ...

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(n+a)^2} - \frac{\pi}{\sin^2(\pi a)} = 0 \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)}$$

Ex. 12.21

Påstand: For $|a| > e$ har ligningen $e^z = az^n$ n rødder på enhedsdisken, dvs. for $|z| < 1$

Beris:

$$f(z) = -az^n$$

$$g(z) = e^z - az^n$$

$$D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$$

f og g er diff. på D

$$\forall z \in D: |z| = 1:$$

$$|f(z) - g(z)| = |-az^n - e^z + az^n| = |e^z| \stackrel{*}{\leq} e^{|z|} = e < |a| = |f(z)|$$

$$*: \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$$

Af Rouché's sætning, følger at f og g har samme antal nulpkt. på enhedsdisken dvs. $e^z = az^n$ har n rødder på enhedsdisken.

□

Ex. 12.22

$$P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$$

Påstand: $\exists j \in \{0, 1, \dots, n\} : |a_j| > \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n |a_i|$ da har $P(z)$ j nulpkt. på enhedsdisken.

Beweis:

$$g(z) = a_j z^j$$

$$|P(z) - g(z)| = \left| \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n a_i z^i \right| \leq \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n |a_i| < |a_j| = |g(z)| \text{ for } |z|=1$$

Da $g(z)$ har j nulpkt. på enhedsdisken følger af Rouchés sætning at $P(z)$ har j nulpkt. på enhedsdisken. $\square$

Af ovenstående følger, at $z^9 - 2z^8 + z^2 - 8z - 2$ har 1 nulpkt. på enhedsdisken, $2z^5 - z^3 + 3z - z + 8$ har 0 nulpkt. på enhedsdisken og $z^7 - 5z + 1$ har 1 nulpkt. på enhedsdisken.

Vinter 98/99 opg. 1

a)

$$z = it, t \in \mathbb{R}$$

$$f'(z) = \underset{\substack{\text{ST 5.68} \\ (+)}}{\frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{d}{dt} \arctan t = \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-z^2}$$

Dvs. på mængden $M := \{z \in \mathbb{C} \mid \exists t \in \mathbb{R} : z = it\}$ er

$f'(z) = \frac{1}{1-z^2}$; da $z \rightarrow \frac{1}{1-z^2}$ og $f'(z)^{(\#)}$ begge er diff. fkt. på Ω og da M indholder et kontaktpkt (o.feks.) følger af sætning 10.11 at $f'(z) = \frac{1}{1-z^2}$ på hele Ω

b)

$$\gamma^* \subseteq \Omega \quad \text{og} \quad f'(z) = \frac{1}{1-z^2} \quad \text{på } \Omega \quad \text{jvf a)}$$

Dvs. f er en stamfunktion til $\frac{1}{1-z^2}$ på Ω og jvf. sætn 6.7 følger derfor at $\int_{\gamma} \frac{1}{1-z^2} dz = f(\gamma(1)) - f(\gamma(-1)) = f(1) - f(-1)$
 $= i \cdot (\arctan(1) - \arctan(-1)) = i\pi/2$

c)

$$(1-z^2) = (z+1)(z-1)$$

Dvs. $z \rightarrow \frac{1}{1-z^2}$ er analytisk på $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ (1)

Jvf. proposition 11.4 har $z \rightarrow \frac{1}{1-z^2}$ simple poler i -1 og 1

$$\text{Res}(z \rightarrow \frac{1}{1-z^2}, 1) = \lim_{\substack{\uparrow \\ z \rightarrow 1}} (z-1) \frac{1}{(1-z^2)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

lemma 12.2

(+) vi benytter notationen u, v fra ST

(#) f diff på $\Omega \Rightarrow f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ jvf. sætn. 10.3

$$(\delta - \gamma)^* \subseteq \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \text{ og } w(\delta - \gamma, 1) = 1$$

Af (1) følger derfor jef. sætn. 12.1, at

$$\int_{\delta} \frac{1}{1-z^2} dz - \int_{\gamma} \frac{1}{1-z^2} dz = \int_{\delta-\gamma} \frac{1}{1-z^2} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i$$

$\Downarrow$

$$\int_{\delta} \frac{1}{1-z^2} dz = \pi i + \int_{\gamma} \frac{1}{1-z^2} dz \stackrel{b)}{=} \pi i + i\pi/2 = 3\pi i/2$$

Sommeren 1999 opg. 1

a)

$z \in \mathbb{C} \setminus L: z+i \in C_\pi$ (notation ST s. 122)

Jf ST s. 126 er Log diff på C_π , dvs. $z \rightarrow \text{Log}(z+i)$ er diff. på $\mathbb{C} \setminus L$

$(z^2+1) = (z+i)(z-i)$, dvs. $z \rightarrow \frac{1}{z^2+1}$ er diff. på $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ med simple poler i $-i$ og i jf. prop. 11.4

Alt i alt kan vi jf. ST prop. 4.2 og prop. 11.4 konkludere at $z \rightarrow \frac{\text{Log}(z+i)}{z^2+1}$ er diff. på $\mathbb{C} \setminus (L \cup \{-i, i\})$ med simple poler i $-i$ og i . Dvs. jf ST s. 208 at $z \rightarrow \frac{\text{Log}(z+i)}{z^2+1}$ er meromorf ^{Alt.} på $\mathbb{C} \setminus L$, som vi vil betegne f .

b)

Jf a) har f to simple poler nemlig $-i$ og i præcis en af disse poler ligger i det øvre halvplan (nemlig i)

Af lemma 12.2 følger at

$$\begin{aligned} \text{res}(f, i) &= \lim_{z \rightarrow i} (z-i) f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{\text{Log}(z+i)}{z+i} = \frac{\text{Log}(2i)}{2i} \\ &\stackrel{\text{ST s. 126}}{=} \frac{1}{2i} (\log |2i| + i \cdot \arg 2i) = \frac{\log 2}{2i} + \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{4} - i \frac{\log 2}{2} \end{aligned}$$

c)

$$r > 1$$

Af satn. 12.1 og a) + b) følger

$$\int_{\gamma_r} f(z) dz = 2\pi i \cdot \left(\frac{\pi}{4} - i \frac{\log 2}{2} \right) = \frac{\pi^2 i}{2} + \pi \log 2 \quad (1)$$

$$\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \in [0, \pi] \quad \gamma(t) = re^{it} \quad (\text{Vi har at } \gamma_r = [r, r] + \gamma)$$

$$|z| = r:$$

$$\left| \frac{\log(z+i)}{z^2+1} \right| = \frac{|\log|z+i| + i \arg(z+i)|}{|z^2+1|} \leq \frac{\sqrt{|z+1|} + i \cdot \pi}{|z|^2} \leq \frac{\sqrt{|z|+1} + i \pi}{|z|^2} = \frac{\sqrt{r+1} + i \pi}{r^2}, \text{ da } \frac{\sqrt{r+1} + i \pi}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \text{ har vi vist at}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists R \in \mathbb{R}_+ \forall r > R, |z| = r: \left| \frac{\log(z+i)}{z^2+1} \right| r < \varepsilon$$

$$\text{Dvs. } \forall \varepsilon > 0 \exists R \in \mathbb{R}_+ \forall r > R:$$

$$\left| \int_{\gamma} \frac{\log(z+i)}{z^2+1} dz \right| \leq \pi \varepsilon \quad \text{Derved har vi vist } \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma} \frac{\log(z+i)}{z^2+1} dz = 0 \quad (2)$$

↑
lemme 6.10

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_r, r>2} f(z) dz &= \int_{-r}^r \frac{\log(x+i)}{x^2+1} dx = \int_{-r}^r \left(\frac{\log \sqrt{x^2+1}}{x^2+1} + i \frac{\arg(x+i)}{x^2+1} \right) dx \\ &= 2 \int_0^r \frac{1}{2} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1} dx + i \int_{-r}^r \frac{\arg(x+i)}{x^2+1} dx \\ &= \int_0^r \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1} dx + i \int_{-r}^r \frac{\arg(x+i)}{x^2+1} dx \quad (3) \end{aligned}$$

Vi bem. at $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{\arg(x+i)}{x^2+1} dx$ eksisterer idet

$$\left| \frac{\arg(x+i)}{x^2+1} \right| \leq \frac{\pi}{x^2+1} \quad \text{og} \quad \int_0^{\infty} \frac{\pi}{x^2+1} dx = \frac{\pi^2}{2} \quad (4)$$

Af (1), (2), (3) og (4) følger (idet vi ser på realdelen af grænseværdien)

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1} dx = \pi \cdot \log 2 \quad (+)$$

Mer præcist har vi, at ...

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = \frac{\pi^2 i}{2} + \pi \cdot \log 2 \quad \text{jvf. (2)}$$

$$\text{og } \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^r \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1} dx + i \int_{-r}^r \frac{\arg(x+i)}{x^2+1} dx \right\}$$

jvf. (2) og (3) - (+) følger herefter af (4)

a)

$$Q: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \in \mathbb{C} \quad Q(z) = 8z''$$

$Q(z)$ har 11 nulpkt. på enhedsskiven $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

$$|z|=1: \quad |P(z) - Q(z)| \leq 7 < 8 = |Q(z)|$$

Af Rouches sætn. og algebraens fundamentalteorem følger at $P(z)$'s nulpunkter ligger på enhedsskiven.

b)

Lad $P_1(z)$ betegne et polynomium af grad n og $P_2(z)$ et polynomium af grad $k \leq n-2$

$$\exists A, B \in \mathbb{R}_+ : |P_2(z)/P_1(z)| \leq A/|z|^2 \text{ for } |z| \geq B, \text{ dvs.}$$

$$\left| \int_{\gamma_R} P_2(z)/P_1(z) dz \right| \leq \frac{A}{R^2} \cdot 2\pi R = \frac{2\pi A}{R} \text{ for } R \geq B \text{ jvf. lemma 6.10}$$

$$\text{Dvs. } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} P_2(z)/P_1(z) dz = 0 \quad (1)$$

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^{10}}{8z''} dz = \int_0^1 \frac{R^{10} e^{20\pi i t}}{8R'' e^{22\pi i t}} R 2\pi i e^{2\pi i t} dt = \frac{\pi i}{4} \quad (2)$$

$$R \geq 1:$$

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz - \int_{\gamma_R} \frac{z^{10}}{8z''} dz = \int_{\gamma_R} \frac{8z''(z^{10} - 4z^7 + z - 3) - z^{10}P(z)}{8z''P(z)} dz$$

$$= \int_{\delta_R} P_2(z)/P_1(z) dz \quad \text{hvor } P_1(z) \text{ har grad } 22$$

og $P_2(z)$ har grad 19 af (1) følger

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\delta_R} f(z) dz - \int_{\delta_R} \frac{z^{19}}{z^{22}} dz \right\} = 0$$

$$\text{Af (2) følger } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\delta_R} f(z) dz = \frac{\pi i}{4}$$

c)

Da $P(z)$'s nulpkt. er f 's singulariteter

følger af a) og sætn. 12.1 at

$$\forall R \geq 1: \int_{\delta_R} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{z_0: P(z_0)=0} \text{res}(f(z), z_0) = \text{konstant}$$

$$\text{Af b) følger specielt at } \int_{\delta_1} f(z) dz = \frac{\pi i}{4}$$