

Kompleks Funktionsteori

Ugeseddel nr. 6

Forelæsningerne den 23. og 25. oktober omhandler kap. 12.

Opgaver til øvelserne i ugen 29. oktober - 2. november:

Ex. 12	5 (ii), (iv)
	8 (i)
	10 (ii)
	11
	13

Afleveringsopgave til ugen 29. oktober - 2. november:
Eksamen Vinteren 98/99 opgave 3.

Med venlig hilsen

Erik Balslev

a)

Ja! Hvooper?
 f er diff. på $\mathbb{C} \setminus \{-3, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2\}$ derfor jvf. sætn. 10.3 analytisk på $\mathbb{C} \setminus \{-3, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2\}$

b)

Jvf. proposition 11.4 har f simple poler i $-3, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2$ og residuerne i $-\frac{1}{3}$ og $\frac{1}{2}$ er hh.

$$\frac{-\frac{1}{3}}{(-\frac{1}{3}-2)(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2})(-\frac{1}{3}+3)} = -\frac{1}{11340} \quad \text{og} \quad \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})(\frac{1}{2}+3)} = -\frac{1}{560}$$

= -2
 $(-2-12)(-2-3)(-2+18) = \frac{1}{560}$ - hm det rigtige svar er $-\frac{9}{140}$

c)

Sæt $z = e^{i\theta}$, da fås jvf. ST s. 218

$$4 \cos \theta - 5 = 4 \frac{1}{2} (z + \frac{1}{z}) - 5 = 2z + \frac{2}{z} - 5$$

$$z \cdot (2z + \frac{2}{z} - 5) = 2z^2 - 5z + 2 = 2(z-2)(z-\frac{1}{2})$$

$$3 \cos \theta + 5 = 3 \frac{1}{2} (z + \frac{1}{z}) + 5 = \frac{3}{2}z + \frac{3}{2z} + 5$$

$$z(\frac{3}{2}z + \frac{3}{2z} + 5) = \frac{3}{2}z^2 + 5z + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(z+\frac{1}{3})(z+3)$$

Dus,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(4 \cos \theta - 5)(3 \cos \theta + 5)} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{2i\theta} \cdot \frac{1}{3}}{(e^{i\theta}-2)(e^{i\theta}-\frac{1}{2})(e^{i\theta}+\frac{1}{3})(e^{i\theta}+3)} d\theta$$

$$= \frac{1}{13} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} \cdot ie^{it}}{(e^{it}-2)(e^{it}-\frac{1}{2})(e^{it}+\frac{1}{3})(e^{it}+3)} dt$$

$$= \frac{1}{13} \oint_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{13} 2\pi i \left(-\frac{1}{11340} - \frac{1}{560} \right) = \frac{1.17\pi}{3.4536} = \frac{17\pi}{13608}$$

Din fremgangsmåde er OK men du regner forkert. (7)
 Godt nok 14/11-2002

Kompleks Funktionsteori Ø nr. 8

Ex. 12.5

ii)

Påstand: $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

Beweis:

$$z \in \mathbb{C}: 1+z^4 = (z + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i)(z - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i)(z + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)(z - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) \quad (*)$$

Dvs. $z \rightarrow 1/(1+z^4)$ har 4 simple poler jvf. prop. 11.4, hvoraf de to $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ligger i det øvre halvplan.

Vi bemærker også at $z \rightarrow 1/(1+z^4)$ er diff. i det øvre halvplan pga. i de to simple poler. (i)

$$\text{res}(1/(1+z^4), -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = \lim_{z \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i} (z + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i)(1/(1+z^4))$$

$$\stackrel{(*)}{=} 1/((- \sqrt{2})\sqrt{2}i(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i)) = 1/(2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i) = \frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8}i \quad (1)$$

$$\text{res}(1/(1+z^4), \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = \lim_{z \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i} (z - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i)(1/(1+z^4))$$

$$\stackrel{(*)}{=} 1/\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)\sqrt{2}i = 1/(-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i) = -\frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8}i \quad (2)$$

$$|z| \geq 1: \quad \left| \frac{1}{1+z^4} \right| \leq \frac{1}{|z|^4} \leq \frac{1}{|z|^2} \quad (ii)$$

Jvf ST s. 220m og (i) (ii):

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx \stackrel{(i)+(2)}{=} \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \left(\frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8}i - \frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8}i \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

□

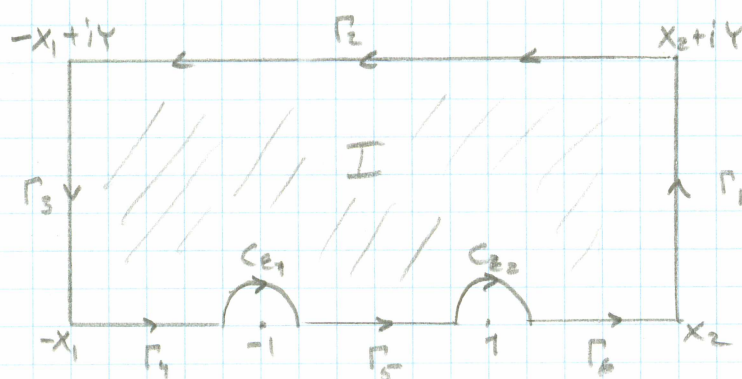
iv)

Påstand: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot \sin(\pi x)}{1-x^2} dx = \pi$

Beris:

$z \in \mathbb{C} : 1-z^2 = -(z-1)(z+1)$

Dvs. $z \rightarrow \frac{z}{1-z^2}$ har 2 simple poler i hh. $-1, 1$ jvf. prop 11.4



$x_1, x_2, Y \in \mathbb{R}_+$

$\epsilon_1, \epsilon_2 \leq 1$

$f: \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \quad f(z) = \frac{z}{1-z^2} \quad (f \in C^\infty(\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}, \mathbb{C}))$ (i)

$|z| \geq \sqrt{2} : \left| \frac{z}{1-z^2} \right| \leq \frac{2}{|z|} \quad (ii)$

$\Gamma_1: [0, Y] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \in [0, Y] \quad \Gamma_1(t) = x_2 + it$

$\left| \int_{\Gamma_1} f(z) e^{i\pi z} dz \right| \leq \int_0^Y \left| \frac{x_2 + it}{1-(x_2 + it)^2} \right| |e^{i\pi(x_2 + it)}| |i| dt$

$\stackrel{(ii)}{\leq} \int_0^Y \frac{2}{|x_2 + it|} e^{-\pi t} dt \leq \int_0^Y \frac{2}{|x_2|} e^{-\pi t} dt \leq \frac{2}{\pi x_2} \quad (1)$

Tilsvarende fås $\left| \int_{\Gamma_3} f(z) e^{i\pi z} dz \right| \leq \frac{2}{\pi x_1} \quad (2)$

$$\Gamma_2: [-x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \in [-x_1, x_2] \quad \Gamma_2(t) = x_2 - x_1 - t + iY$$

$$\left| \int_{\Gamma_2} f(z) e^{i\pi z} dz \right| \stackrel{(ii)}{\leq} \int_{-x_1}^{x_2} \frac{2}{|x_2 - x_1 - t + iY|} e^{-\pi Y} dt \leq \int_{-x_1}^{x_2} \frac{2}{Y} e^{-\pi Y} = \frac{2e^{-\pi Y}}{Y} (x_2 + x_1)$$

$$\text{Sæt } Y = x_2 + x_1, \text{ da fås } \left| \int_{\Gamma_2} f(z) e^{i\pi z} dz \right| \leq 2e^{-\pi(x_2+x_1)} \quad (3)$$

Da $2\pi i \sum_{\substack{p \in \mathbb{I} \\ p \neq z}} \text{res}(f(z)e^{i\pi z}, z) = 0$ og pga. (i) følger af sætn. 12.1 og (1), (2) og (3) at

$$\lim_{x_1, x_2 \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\Gamma_4 + C_{\epsilon_1} + \Gamma_5 + C_{\epsilon_2} + \Gamma_6} f(z) e^{i\pi z} dz \right\} = 0 \quad (4)$$

$f(z)e^{i\pi z} = \frac{z}{z+1} \frac{e^{i\pi z}}{1-z} = \frac{1}{z+1} g(z)$, hvor $g(z) = \frac{ze^{i\pi z}}{1-z}$ er diff i en omegn af -1 . Af 10.3 følger $\exists (a_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{C} : g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+1)^n$ hvor $a_0 = -e^{-i\pi}/2 = 1/2$

Dvs. $f(z)e^{i\pi z} = \frac{1}{2(z+1)} + \varphi(z)^{(*)}$ hvor φ er diff. i en omegn af -1
 $\exists \epsilon \leq 1$ således at $*$ gælder på C_{ϵ_1} , $\epsilon_1 \leq \epsilon$ og $\exists M \in \mathbb{R}_+ : |\varphi(z)| \leq M$ på C_{ϵ_1} , $\epsilon_1 \leq \epsilon$ (da φ diff. og derved specielt kont)

$$C_{\epsilon_1}: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \in [0, \pi] \quad C_{\epsilon_1}(t) = -1 + \epsilon_1 e^{i(\pi-t)}$$

$$\left| \int_{C_{\epsilon_1}} \varphi(z) dz \right| \leq M \epsilon_1 \pi \quad (5) \quad \text{Jvf. lemma 6.10}$$

$$\int_{C_{\epsilon_1}} -\frac{1}{2(z+1)} dz = -\int_0^\pi \frac{\epsilon_1 i e^{i(\pi-t)}}{2 \epsilon_1 e^{i(\pi-t)}} dt = -\frac{i\pi}{2} \quad (6)$$

$$\text{Af (5), (6) og } (*) \text{ følger } \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \int_{C_{\epsilon_1}} f(z) e^{i\pi z} dz = -\frac{i\pi}{2} \quad (7)$$

$$\text{Tilsvarende ses } \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0} \int_{C_{\epsilon_2}} f(z) e^{i\pi z} dz = -\frac{i\pi}{2} \quad (8)$$

Ved at lade $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ følger af (4), (7) og (8) at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z e^{i\pi z}}{1-z^2} dz = i\pi$$

Dvs. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot \sin \pi x}{1-x^2} dx = \pi$ $\square$

Ex. 12. 8

$$Q: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \quad (x, y) \in \mathbb{C}^2 \quad Q(x, y) = x^4 + y^4$$

$$(6) \text{ s. 218 i ST} = \frac{1}{i\bar{z}} \frac{1}{16} \left(\left(z + \frac{1}{z} \right)^4 + \left(z - \frac{1}{z} \right)^4 \right) \\ = -i/8 \cdot z^{-5} - i3/4 \cdot z^{-1} - i/8 \cdot z^3 \quad (*)$$

Udtrykket (*) som fkt. af z har en pol indenfor enhedscirklen med residue $-i3/4$ af ST s. 217-18 fås

$$\int_0^{2\pi} (\cos^4(t) + \sin^4(t)) dt = 2\pi i \cdot (-i3/4) = 3\pi/2$$

Ex. 12.10

ii)

Vi ønsker at udregne $\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+a^2} dx$ $a, m \in \mathbb{R}_+$

$$\text{Bm. } \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+a^2} \quad (\text{begge integraler eksisterer}) \quad (1)$$

hvilket ses gennem overvejelser som involverer $x \rightarrow 1/x^2$

$z^2+a^2 = (z+ia)(z-ia)$ heraf ses ifølge prop. 11.4 at $z \rightarrow \frac{e^{imz}}{z^2+a^2}$ er meromorf med simple poler i $-ia$ og ia (i)

Af lemma 12.2 følger at det til ia hørende residue er

$$\lim_{z \rightarrow ia} (z-ia) \frac{e^{imz}}{z^2+a^2} = \frac{e^{-ma}}{2ia} \quad (2)$$

$$|z| > 1 : \left| \frac{1}{z^2+a^2} \right| \leq \left| \frac{1}{z^2} \right| = \frac{1}{|z|^2} \quad (ii)$$

Af ST s. 222-223 (med en lille udvidelse) følger pga. (i), (ii) og (2), at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imz}}{z^2+a^2} dz = 2\pi i \left(\frac{e^{-ma}}{2ia} \right) = \pi e^{-ma}$$

Dette medfører $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-ma}$ og altså jvf (1) at

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ma}$$

Ex. 12.11

Påstand: $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3} dx = \pi/16a^3$, $a \in \mathbb{R}_+$

Bevís:

$z \in \mathbb{C}$: $(z^2 + a^2)^3 = (z+ia)^3(z-ia)^3$ heraf ses iflg. prop. 11.4 at $z \rightarrow \frac{z^2}{(z^2+a^2)^3}$ er meromorf med poler af 3. orden i $-ia$ og ia . (i)

Af lemma 12.3 følger at det til ia hørende residue er $\lim_{z \rightarrow ia} \left(\frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} (z-ia)^3 \frac{z^2}{(z^2+a^2)^3} \right) = \lim_{z \rightarrow ia} \frac{z^2 - 4aiz - a^2}{(z+ia)^5} = \frac{2a^2}{(2ia)^5} = \frac{1}{16a^3 i}$ (1)

$|z| > 1$: $\left| \frac{z^2}{(z^2+a^2)^3} \right| \leq \left| \frac{z^2}{z^6} \right| \leq \frac{1}{|z|^2}$ (ii)

If (i), (ii) og (1) følger af ST s. 220 at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3} dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{16a^3 i} = \pi/8a^3$$

Det ønskede følger, da $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3} dx = 1/2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3} dx$ $\square$

Ex. 12.13

Påstand: $\int_0^{\infty} t^{a-1} (t+1)^{-1} dt = \frac{\pi}{\sin \pi a} \quad a \in (0,1)$

Beris

$$\int_0^{\infty} t^{a-1} (t+1)^{-1} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{substitution} \\ t=e^x}}{e^{ax} \cdot e^{-x} (e^x+1)^{-1} e^x dx} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax} / (e^x+1) dx \quad (1)$$

$z \rightarrow e^{az} / e^z + 1$ har isolerede singulariteter i $z_n = (2n\pi + \pi) \cdot i, n \in \mathbb{Z}$

$$\left. \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{az}}{e^z + 1} \right) \right|_{z=i\pi} = \left. \frac{e^{(a+1)z} (1-a)}{e^{2az}} \right|_{i\pi} = e^{(1-a)z} (1-a) \Big|_{i\pi} = e^{(1-a)i\pi} (1-a) \neq 0$$

hvorimod $\frac{e^{i\pi} + 1}{e^{a i \pi}} = 0$

Af korollar 11.5 følger at $z \rightarrow e^{az} / e^z + 1$ har en simpel pol i $i\pi$ og det tilhørende residue er jvf. lemma 12.2 d, hvor

$$\lim_{z \rightarrow i\pi} (z - i\pi) \frac{e^{az}}{e^z + 1} = l$$

$$\lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{z - i\pi}{e^z + 1} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{e^{i\pi + r}} = -1, \text{ jvf. L'Hopital, dvs. } l = -e^{a i \pi}$$

Af ST s. 226-227 følger

$$(1 - e^{2\pi a i}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax} / (e^x + 1) dx = 2\pi i \cdot (-e^{a i \pi})$$

$\Downarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax} / (e^x + 1) dx = \frac{-2\pi i}{e^{-a i \pi} - e^{a i \pi}} = \pi \cdot \left(\frac{z^i}{e^{a i \pi} - e^{-a i \pi}} \right) = \pi / \sin(\pi a)$$

□

Kompleks Funktionsteori

Ugeseddel nr. 5

Vi har gennemgået kap. 11, 1 og 2 samt 3 Lemma 11.2.

Ved forelæsningerne den 9. og 11. oktober gennemgås resten af kap. 11 og en del af kap. 12.

I ugen 15.-19. okt. er der efterårsferie.

I ugen 22.-26. okt. afsluttes kap. 12, og vi går videre med kap. 13.

Opgaver til øvelserne i ugen 22. - 26. oktober:

- | | |
|--------|--------------------------|
| Ex. 11 | 1 (ii), (v), (vi), (vii) |
| | 2 (iii), (iv), (vi) |
| | 8 |
| | 9 (i), (ii), (v) |
| | 14 (i), (v) |
| | 15 |
| | 18 (i), (iii), (iv) |

Afleveringsopgave til ugen 22. - 26. oktober:
Kap. 11, 17.

Med venlig hilsen

Erik Balslev

had f være meromorf på $\mathbb{C}$.

Vise: f har ^{højest} endeligt mange poler i $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$

Bevis:

Antag at der er uendeligt mange $\{z_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$.

Da $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ er kompakt her følger z_n en konvergent delfølge (Jeg ved ikke hvad du ved om kompaktthed men dette er jf. i Klaus Thomsens Mat II noter F99 s. 43)

Kald den konvergente delfølge $\tilde{z}_n$ had z være grænsen.

Antag z er en pol. $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ så $B_\varepsilon(z)$ kun indeholder polen z , eftersom poler er isolerede. Det er i modstrid med $\tilde{z}_n \rightarrow z$ for $n \rightarrow \infty$

Antag f er differentiable i z .^{*} Så eksisterer der en omegn $B_\varepsilon(z)$ så f er differentiable i z . Men dette er i modstrid med at $\tilde{z}_n \rightarrow z$ for $n \rightarrow \infty$.

Men dermed kan der ikke være uendeligt mange poler i $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ $\square$

Bemærk: Steward+Talls definition af meromorfe funktioner er (næsten) forkert. Den rigtige er følgende. (Hvis man tænker sig godt om er de ækvivalente)

Def: had $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ hvor Ω er et område!
Funktionen f kaldes meromorf hvis der for alle $z_0 \in \Omega$ $\exists \varepsilon > 0$ så $B(z_0, \varepsilon) \subseteq \Omega$ og (f er differentiable i $B(z_0, \varepsilon)$) eller (f er differentiable i $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ og z_0 er en pol.)

$$f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad f(z) = (z + 1 + 1/z)^{-1}$$

$f \in C^\infty(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{C})$ altså har f jvf. ST s. 201 en isoleret singularitet i 0. ✓

Da $f(z) = z / (z^2 + z + 1) \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0$ gælder jvf. Lemma 11.2 at f har en hævelig isoleret singularitet i 0. ✓

Altså $\exists (a_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{C}$ jvf. ST s. 201 således $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ for $|z| < R$, $R \in \mathbb{R}_+$

Der må gælde

$$f(z) = z / (z^2 + z + 1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

⇓

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^{n+2} + z^{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

⇓ (*)

$$a_0 = 0, a_1 = 1 - a_0 = 1, a_2 = -a_0 - a_1 = -1$$

$$a_n = -a_{n-2} - a_{n-1}, n \geq 2 \quad (+)$$

} Forklar mere udførligt.

Pr. induktion følger jvf (+) at

$$\exists q \in \mathbb{N}_0 : n = 3 \cdot q \text{ så gælder } a_n = 0$$

$$\exists q \in \mathbb{N}_0 : n = 3 \cdot q + 1 \text{ så gælder } a_n = 1$$

$$\exists q \in \mathbb{N}_0 : n = 3 \cdot q + 2 \text{ så gælder } a_n = -1$$

(*) Vi benytter at $(z^n)_{n \geq 1}$ er en 'basis' for det komplekse vektorrum bestående af alle polynomier. *Hvorfor er det rigtigt og i hvilken forstand.* ✓

Vi kan altså skrive $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, hvor

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, \dots\} \text{ for } |z| < R$$

Luf. sætn. 3.8 i ST gælder $1/R = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} |a_m|^{1/m} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$, dvs. $R = 1$

Godmundt dK 14/11-2002 (6)

Komplex Funktionstheorie: TD nr. 7

Ex. 11.1

ii)

$$f: \mathbb{C} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad a \in \mathbb{C} \quad f(z) = (z-a)^k \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{a\} \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$a=0:$$

$$f(z) = \frac{1}{z^k}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$a \neq 0:$$

$$|z| < |a|$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!} \left((-1)^n \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!} a^{-k-n} \right) = (-1)^n \binom{n+k-1}{n} a^{-k-n}$$

$$|z| > |a|$$

$$f(z) = \frac{1}{z^k} \frac{1}{(1-a/z)^k} = \frac{1}{z^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{z^{n+k}}$$

v)

$$f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; \quad f(z) = z^3 e^{1/z}$$

$$f(z) = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^{n-3} = z^3 + z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{6} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n+3)!} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

vi)

$$f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; \quad f(z) = \exp(z + 1/z)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z + 1/z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} z^{n-i} \left(\frac{1}{z}\right)^i \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} z^{n-2i} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!(n-i)!} z^{n-2i}$$

el.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m+k=n} \frac{z^m}{m!} \frac{z^{-k}}{k!} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\substack{(m,k) \in \mathbb{N}^2 \\ m-k=l}} \frac{1}{m!} \frac{1}{k!} \right) z^l$$

vii)

$$f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; \quad f(z) = \cos 1/z$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} \left(\frac{1}{z}\right)^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} \cdot \left(\frac{1}{z^{2n}}\right)$$

Ex. 11.2

iii)

$$2 < |z|$$

$$f(z) = (z-1)^{-2} (z-2)^{-1}$$

Luf. Ex. 11.1 har vi

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1/z^{n+2}) \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n (1/z^{n+1}) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n (-1)^i (1/z^{i+2}) (-2)^{n-i} (1/z^{n-i+1}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n (-1)^i (2)^{n-i} (1/z^{n+3}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\sum_{i=0}^n (2)^{n-i} \right) z^{-n-3} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1-2^{n+1}}{1-2} z^{-n-3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (1-2^{n+1}) z^{-n-3} \end{aligned}$$

eller

$$f(z) = \text{setn. 11.1}$$

iv)

$$f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad f(z) = \exp(-z^{-2})$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-z^{-2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n z^{-2n}$$

v)

$$|z| > 1$$

$$f(z) = \exp z \cdot (z^2 + 1)^{-1} = \exp z \cdot (1/z^2) (1 + 1/z^2)^{-1}$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) (1/z^2) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1/z^2)^n \right)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1/z^{2n+1}) \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} ?$$

$$f(z) = \text{satn. 11.2}$$

Ex. 11.8

i)

$$z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$$

$$D := \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$$

$$f: D \rightarrow \mathbb{C} \quad z \in D: f(z) = (z^2 + 1)^{-1}$$

Vi ser, at $f \in C^\infty(D, \mathbb{C})$ med isolerede singulariteter i $i, -i$,

$$(z - i) f(z) = (z + i)^{-1} \rightarrow -1/2i, \quad z \rightarrow i$$

$$(z + i) f(z) = (z - i)^{-1} \rightarrow 1/2i, \quad z \rightarrow -i$$

Af proposition 11.4 følger at f s isolerede singulariteter er simple poler.

ii)

$$z^4 + 16 = (z + \sqrt{2} + \sqrt{2}i)(z + \sqrt{2} - \sqrt{2}i)(z - \sqrt{2} + \sqrt{2}i)(z - \sqrt{2} - \sqrt{2}i)$$

$$D := \mathbb{C} \setminus \{\sqrt{2} + \sqrt{2}i, \sqrt{2} + \sqrt{2}i, \sqrt{2} - \sqrt{2}i, -\sqrt{2} - \sqrt{2}i\}$$

$$f: D \rightarrow \mathbb{C} \quad z \in D: f(z) = (z^4 + 16)^{-1}$$

Vi ser, at $f \in C^\infty(D, \mathbb{C})$ med isolerede singulariteter i $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i, -\sqrt{2} + \sqrt{2}i, \sqrt{2} - \sqrt{2}i, \sqrt{2} + \sqrt{2}i$,

$$(z + \sqrt{2} + \sqrt{2}i) f(z) \rightarrow z_0, \quad z \rightarrow -\sqrt{2} - \sqrt{2}i \quad \text{hvor } z_0 \neq 0$$

$$(z + \sqrt{2} - \sqrt{2}i) f(z) \rightarrow z_1, \quad z \rightarrow -\sqrt{2} + \sqrt{2}i \quad \text{hvor } z_1 \neq 0$$

$$(z - \sqrt{2} + \sqrt{2}i) f(z) \rightarrow z_2, \quad z \rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{2}i \quad \text{hvor } z_2 \neq 0$$

$$(z - \sqrt{2} - \sqrt{2}i) f(z) \rightarrow z_3, \quad z \rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{2}i \quad \text{hvor } z_3 \neq 0$$

Af proposition 11.4 følger at f s isolerede singulariteter er simple poler

iii)

$$z^4 + 2z^2 + 1 = (z-i)^2 (z+i)^2$$

$$D := \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$$

$$f: D \rightarrow \mathbb{C} \quad z \in D: f(z) = (z^4 + 2z^2 + 1)^{-1}$$

Vi ser, at $f \in C^\infty(D, \mathbb{C})$ med isolerede singulariteter i $i, -i$.

$$(z-i)^2 f(z) = (z+i)^{-2} \rightarrow (2i)^{-2} = -1/4 \quad z \rightarrow i$$

$$(z+i)^2 f(z) = (z-i)^{-2} \rightarrow (-2i)^{-2} = -1/4 \quad z \rightarrow -i$$

Af proposition 11.4 følger at f 's isolerede singulariteter er dobbelt poler.

iv)

$$z^2 + z - 1 = \left(z + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \left(z - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

$$D := \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$$

$$f: D \rightarrow \mathbb{C} \quad z \in D: f(z) = (z^2 + z - 1)^{-1}$$

Vi ser at $f \in C^\infty(D, \mathbb{C})$ med isolerede singulariteter i $-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ og $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$$\left(z + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) f(z) = \left(z - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{-1} \rightarrow (-\sqrt{5}-1)^{-1}, \quad z \rightarrow -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\left(z - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) f(z) = \left(z + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{-1} \rightarrow (\sqrt{5}+1)^{-1}, \quad z \rightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Af proposition 11.4 følger at f 's isolerede singulariteter er simple poler

Ek. 11.9

i)

$$f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad f(z) = \sin(1/z) \quad f \in C^\infty(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{C})$$

$$\text{Juf. ST s. 84: } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n / (2n+1)! \cdot (1/z)^{2n+1}$$

Vi ser jf. ST s. 202 at $f(z)$ har en essentiel isoleret singularitet i 0.

ii)

$$f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad f(z) = z^{-3} \cdot \sin^2 z, \quad f \in C^\infty(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{C})$$

$$\begin{aligned} \text{Juf. ST s. 84: } f(z) &= z^{-3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n / (2n+1)! \cdot z^{2n+1} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n / (2n+1)! \cdot z^{2n+1} \right) \\ &= z^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \text{ hvor } (a_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{C} \end{aligned}$$

$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1, \text{ dvs. } f(z) = \frac{a_2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+3} z^n$$

Af ST s. 202 følger at $f(z)$ har en simpel pol i 0.

v)

$$f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2} \quad f \in C^\infty(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{C})$$

$$\text{Juf. ST s. 84: } f(z) = \frac{1}{z^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n / (2n)! \cdot z^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n / (2n)! \cdot z^{2n-2}$$

Juf. ST s. 201 har vi, at f har en hævelig singularitet i 0.

Ex. 11.14

i)

$$z - z^3 = (z+1)(z-0)(z-1) = (z+1)z(z-1)$$

$$D := \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$$

$$f: D \rightarrow \mathbb{C} \quad z \in D: f(z) = (z - z^3)^{-1}$$

Vi ser at $f \in C^\infty(D, \mathbb{C})$ med isolerede singulariteter i $-1, 0, 1$

$$(z+1)f(z) = (z(z-1))^{-1} \rightarrow 1/z, \quad z \rightarrow -1$$

$$zf(z) = ((z+1)(z-1))^{-1} \rightarrow -1, \quad z \rightarrow 0$$

$$(z-1)f(z) = ((z+1)z)^{-1} \rightarrow 1/z, \quad z \rightarrow 1$$

Af proposition 11.4 følger at f 's isolerede singulariteter ($i\mathbb{C}$) er simple poler.

$$|z| < 1:$$

$$f(z) = 1/z \cdot \left(\frac{1}{1-z^2} \right) = 1/z \sum_{n=0}^{\infty} (z^2)^n = 1/z + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1} \quad (*)$$

$f \in C^\infty(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}, \mathbb{C})$ Jvf. ST s. 207 har f dermed en isoleret singularitet i ∞ . For $|z| > 1$ følger, at

da $f(1/z) \stackrel{(*)}{=} z + \sum_{n=0}^{\infty} z^{-2n-1}$ har vi jvf. ST s. 202 at (+) f har en essentiell isoleret singularitet i ∞ .

v)

$$f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad f(z) = \cos z / z^2$$

$f \in C^\infty(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{C})$ og har således jvf. ST s. 201 en isoleret singularitet i 0 og jvf. ST. s. 207 en isoleret singularitet i ∞ .

$$\begin{aligned} \text{Jvf. ST s. 84 : } f(z) &= \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n / (2n)! \cdot z^{2n} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n / (2n)! \cdot z^{2(n-1)} \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} / (2n+2)! \cdot z^{2n} \end{aligned}$$

Jvf. ST s. 201 ser vi at f har en hævdig isoleret singularitet i 0

Da $f'(1/z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} / (2n+2)! \cdot z^{-2n}$ har vi jvf. ST s. 202 at f har en essentiell isoleret singularitet i ∞ .

Ex. 11.15

Ifølge Needham 'Visual Complex Analysis' s. 141-142

afbildes en cirkel i $\mathbb{C}$ over i en cirkel på S^2

og en linie i $\mathbb{C}$ afbildes over i en cirkel på S^2 gennem $(0,0,1)$

Kompleks Funktionsteori

Ugeseddel nr. 4

Vi har afsluttet beviset for Cauchy's integralsætning (kap. 8). Kap. 9 overspringes.

Cauchy's integralformel (Lemma 10.1) og Lemma 10.2 er bevist.

I ugen 1. - 5. oktober gennemgås resten af kap. 10 og kap. 11 påbegyndes. I ugen 8. - 12. oktober gennemgås resten af kap. 11 og kap. 12.

Opgaver til øvelserne i ugen 8. - 12. oktober:

Ex. 7; 15

Ex. 8; 4

Ex. 10; 12, 14, 17, 19

Afleveringsopgave til ugen 8. - 12. oktober:

Ex. 10; 3 (i), (ii), (iii), (v).

Med venlig hilsen

Erik Balslev

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

i)

$$z \in \mathbb{C} : f(z) = \sin^2(z) \quad (\text{Bm. } f \in C^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \text{ jvf. satn. 10.3})$$

$$D[\sin^2(z)]|_{z=0} = 2 \cos z \cdot \sin z|_{z=0} = 0$$

$$D[\cos z \cdot \sin z]|_{z=0} = \cos^2 z - \sin^2 z|_{z=0} = 1$$

$$D[\cos^2 z - \sin^2 z]|_{z=0} = -2 \cos z \sin z - 2 \cos z \sin z|_{z=0} = -4 \cos z \cdot \sin z|_{z=0} = 0$$

Vi ser, at $f^{(n)}(0) = 0$ n ulige $f^{(n)}(0) = 2(-4)^{n/2-1}$ n lige
 Det kræver meget mere argument. har et induktionsbevis

Da f er diff. på hele $\mathbb{C}$ fås af satn. 10.3 at f 's Taylorudvikling er lig f på hele $\mathbb{C}$ (dvs. konvergensradius $= \infty$).

$$z \in \mathbb{C} : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} z^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-4)^{n-1}}{(2n)!} z^{2n}$$

Vi bm. at f 's Taylorrække har konvergensradius $R = \infty$.

Bemærk at $\sin^2 z = \frac{1}{2}(1 - \cos(2z))$

vis det!

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{2} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} \cdot z^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} \cdot z^{2n} \end{aligned}$$

(7) p. 84

På denne måde slipper du udenom at lave det induktions-argument du ikke gider lave

ii)

$$z \in D_1 = \mathbb{C} \setminus \{-2\} : f(z) = z^2 (z+2)^{-2} = (z/2)^2 (z/2+1)^{-2} \quad (f \in C^\infty(D, \mathbb{C}))$$

Af sætn. 10.3 følger at den største disk med centrum i (0,0) hvorpå f er lig sin Taylorrække (og hvor Taylorrækken konv.) er $|z| < 2$

$$\text{For } |z| < 2 \text{ gælder } (z/2 + 1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z/2)^n$$

$$\text{Jof. sætn. 4.12 gælder } -1/2 (z/2 + 1)^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n/2 \cdot (z/2)^{n-1}$$

og dermed har vi

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 (z+2)^{-2} = (-2(z/2)^2) (-1/2 (z/2+1)^{-2}) \\ &= (-z^2/2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n/2 \cdot (z/2)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \cdot (z/2)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) (z/2)^{n+2} \quad (*) \end{aligned}$$

Rækken (*) er f 's Taylorrække (med konvergensradius $R=2$)

(At (*) må være f 's Taylorrække følger af korollar 4.14)

iii)

$$a, b \in \mathbb{C}, b \neq 0 \quad z \in D := \mathbb{C} \setminus \{-b/a\} \quad f(z) = (az+b)^{-1} = \frac{1}{b} \left(\frac{a}{b}z + 1 \right)^{-1} \quad (b \neq 0)$$

$$f \in C^\infty(D, \mathbb{C})$$

Af sætn. 10.3 følger at den største disk med centrum i 0, hvorpå f er lig sin Taylorrække (og hvor Taylorrækken konv.) er $|z| < |b/a| = |b/a|$ ✓

$$\text{For } |z| < |b/a| \text{ gælder } \left(\frac{a}{b}z + 1 \right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{a}{b}z \right)^n$$

$$\begin{aligned} \text{Dvs. } f(z) &= \frac{1}{b} \left(\frac{a}{b}z + 1 \right)^{-1} = \frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{a}{b}z \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{b} \left(\frac{a}{b}z \right)^n \quad (*) \end{aligned}$$

(*) er f 's Taylorrække (med konv. radius $R = |b/a|$) (Jvf. bun i ii) ✓

v)

$$z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \begin{cases} \sin z/z, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

$$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; \quad \frac{\sin z}{z} \underset{\substack{5,84 \\ 1,57}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$\text{Da } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} \Big|_{z=0} = 1, \text{ dvs. } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} \quad (+) \quad \checkmark$$

og da $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} \in C^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ jvf. korollar 4.13 følger

af sætn. 10.3 at f 's Taylorrække eksisterer og konvergerer mod f på hele $\mathbb{C}$ ✓

Rækken (+) er f 's Taylorrække (med konv. radius $R = \infty$)

Udmærket! Godkendt! 14/11-2007 (4) ✓

Kompleks funktions teori

Aflæringsopgaver 10.3

i) Husk at $\sin^2 z = \frac{1}{2}(1 - \cos 2z)$.
(eller vis det hvis du ikke kan huske det!)

Brug nu (7) p. 84.

ii) Bemærk at $\frac{z^2}{(z+2)^2} = \frac{\frac{1}{2}z^2}{(1+\frac{z}{2})^2}$
Brug en velkendt række for $\frac{1}{1+z}$ og Cauchy-multiplikation (der thm. 3.9)

iii) Bemærk at $(az+b)^{-1} = b^{-1} \left(\frac{1}{1+(\frac{az}{b})} \right)$
Brug så en velkendt række for $\frac{1}{1+z}$.

v) Tag et kig på s. 84.

Dette er hints til 'en måde at løse opgaven på. Der er selvfølgelig masser af andre

PS: Husk at $\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}$ for $|x| < 1$

Kompleks Funktionsteori TØ nr. 6

Ex. 7.15

Juf. ST s. 126_m : $D[\operatorname{Log}(1+z)] = 1/(z+1)$, $|z| < 1$

(Men $\operatorname{Log}(1+z)$ er ikke veldefineret for $z=x$, $x \leq -1$)

Af sætn. 10.3 følger, at $f \in C^\infty(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}, \mathbb{C})$ og at f 's Taylorrække konvergerer mod f på $|z| < 1$ og er givet ved.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! / n! z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} / n \cdot z^n$$

(hvilket stemmer overens med den reelle $\log$ -Taylorrækkeudvikling omkring $z_0=1$)

I ovenstående er benyttet at $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$

Ex. 8.4

Se TØ nr. 5

Ex. 10.12

$$r \in \mathbb{R}_+, z_0 \in \mathbb{C}$$

$$f: D \rightarrow \mathbb{C}, D \subseteq \mathbb{C} \text{ domene } N_r(z_0) \subseteq D \quad f \text{ analytisk}$$

Definer en 'middelværdi' for f på $\partial N_r(z_0)$ som $2\pi \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$

Påstand: ovenstående 'middelværdi' er lig $f(z_0)$

Beweis:

$$2\pi \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt = 2\pi i \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} i re^{it} dt = 2\pi i \int \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0)$$

Jvf. Lemma 10.1 (f analytisk $\Rightarrow f$ diff.)

□

Ex. 10.14

$$f, g: D \rightarrow \mathbb{C}, D = \{z \in \mathbb{C} \mid -2 < \operatorname{Im} z < 2\} \quad f, g \text{ analytiske på hele } D$$

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 0,013\} \subseteq D \quad f|_{D_1} = g|_{D_1}$$

Påstand: $f \equiv g$

Beweis:

En konsekvens af sætn. 10.11, da $\{0,01 \cdot 1/n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D_1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} 0,01 \cdot 1/n = 0 \in D$

□

Ex. 10.17

Påstand:

$$x^2 + y^2 \leq a^2, a \in \mathbb{R}_+ \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Da gælder at $(1+x)^2 + y^2$ antager sit maksimum i $x=a, y=0$

Beweis:

Mængden $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ svarer til $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq a\}$ *

Udtrykket $(1+x)^2 + y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ svarer til $(1+z)(1+\bar{z}) = |1+z|^2$, $z \in \mathbb{C}$

Da $z \rightarrow 1+z$ er en diff. ikke-konstant fkt. på * følger af sætn. 10.14, at $|1+z|$ antager sit maksimum i et randpkt. til mængd. *,

Skriver vi nu $z_{\max} = x_{\max} + iy_{\max}$, $x_{\max}, y_{\max} \in \mathbb{R}$ fås

$$(1+x_{\max})^2 + y_{\max}^2 = 1 + 2x_{\max} + a^2 \quad \text{hvilket medfører at}$$

$$x_{\max} = a \Rightarrow y_{\max} = 0 \quad (\text{idet vi benytter } |z_{\max}|^2 = a^2)$$

□

Ex. 10.19

$D \subseteq \mathbb{C}$ domæne

$f: D \rightarrow \mathbb{C}$ diff. (dvs. $f \in C^\infty(D, \mathbb{C})$ if. sætn. 10.3)

$z_0 \in D: f(z_0) = 0$ (dvs. z_0 er et nul)

Påstand: z_0 er enten af endelig orden eller $f \equiv 0$

Beweis:

Hvis z_0 ikke er af endelig orden gælder $\forall n \in \mathbb{N}: f^{(n)}(z_0) = 0$,
af sætn. 10.3 følger (da D domæne f diff.) at $\exists \varepsilon > 0: N_\varepsilon(z_0) \subseteq D$

$f|_{N_\varepsilon(z_0)} \equiv 0$. Af sætn. 10.11 følger at $f \equiv 0$

□

Kompleks Funktionsteori

Ugeseddel nr. 3

Forelæsningerne 25/9 og 27/9 omhandler afslutningen af kap. 7, kap. 8 og 9. Ved øvelserne 24/9 - 28/9 gennemgås opgaverne fra sidste uge. Ved øvelserne 1/10-5/10 gennemgås flg. opgaver:

Ex. 6: 6, 10

Ex. 7: 5, 7, 13, 19, 20

Ex. 8: 2, 4.

Afleveringsopgave til ugen 1/10-5/10: Ex. 7, 13

Med venlig hilsen

Erik Balslev

$$f_1, f_2, f_3: \mathbb{C}_* \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \in \mathbb{C}_*: f_1(z) = z^{1/2}, f_2(z) = z^{1/3}, f_3(z) = z^i \quad (\text{se def. s. 126 n})$$

Lad $z \in \mathbb{C}_*$ være givet

$$r = |z|, \theta = \arg z, \text{ dvs. } z = re^{i\theta}$$

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

$$f_1(z) = \exp\left(\frac{1}{2} \log z\right) = \exp\left(\frac{1}{2} \ln r + i\theta/2\right) = \sqrt{r} e^{i\theta/2} \quad \checkmark$$

$$f_2(z) = \exp\left(\frac{1}{3} \log z\right) = \exp\left(\frac{1}{3} \ln r + i\theta/3\right) = \sqrt[3]{r} e^{i\theta/3} \quad \checkmark$$

$$f_3(z) = \exp(i \cdot \log z) = e^{-\theta} e^{i \ln r} \quad \checkmark$$

Lad $\bar{e}$ betegne enhedsvektoren i det komplekse plan fra $(0,0)$ til $(1,0)$
dvs. $\bar{e} = 1$

Billedet af z under f_1 fås ved at dreje $\bar{e}$ $\theta/2$ grader mod uret
og forlænge $\bar{e}$ med en faktor $\sqrt{r}$. $\checkmark$

Billedet af z under f_2 fås ved at dreje $\bar{e}$ $\theta/3$ grader mod uret
og forlænge $\bar{e}$ med en faktor $\sqrt[3]{r}$. $\checkmark$

Billedet af z under f_3 fås ved at dreje $\bar{e}$ $\ln r$ grader mod uret
og forlænge $\bar{e}$ med en faktor $e^{-\theta}$. $\checkmark$

Gødhust skole 3/10-2001 (3)

Kompleks Funktionsteori TØ nr. 5

Ex. 6.6

$$\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{C}), \sigma \in C^1([c, d], \mathbb{C})$$

Antag $\exists \varphi: [a, b] \rightarrow [c, d]$, $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$ $\gamma = \sigma \circ \varphi^*$ ($\forall \gamma \in C^1$)

Vi siger, at γ kan fås udfra σ med et differentiabelt skift i parameter. Geometrisk svarer det til at gennemløbe $\gamma[a, b]$ udfra følgende sæt af regler: $\varphi' = 0$ står vi stille i et øjeblik.
 $\varphi' < 0$ går vi baglæns mod $\gamma(a)$ og er $\varphi' > 0$ går vi forlæns mod $\gamma(b)$.

$$f \in C^0(D, \mathbb{C})$$

Antag $\sigma([c, d]) \subseteq D$

Dvs at det tilsvarende gælder $\gamma([a, b]) \subseteq D$

$$\text{Påstand: } \int_{\gamma} f = \int_{\sigma} f$$

Beweis:

En umiddelbar konsekvens af sætn. 3a i Tage Gutarmanus note s. IV 4.2, idet $\varphi([a, b]) = [c, d]$ og $\varphi(a) = c$ $\varphi(b) = d$ samt * idet sætn. 3a generaliserer til tilfældet $\mathbb{C}$.

□

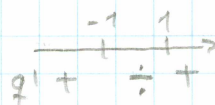
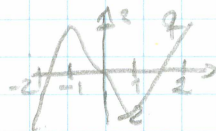
Ex. 6.10

$$\sigma \in C^1([-2, 2])$$

$$q: [-2, 2] \rightarrow [-2, 2] \quad t \in [-2, 2] : q(t) = t^3 - 3t$$

$$\gamma := \sigma \circ q$$

$$L(\gamma) = \int_{-2}^2 |\sigma'(q(t)) q'(t)| dt$$



$$= \int_{-2}^{-1} |\sigma'(q(t)) q'(t)| dt + \int_{-1}^1 |\sigma'(q(t)) q'(t)| dt + \int_1^2 |\sigma'(q(t)) q'(t)| dt$$

$$= \int_{-2}^{-1} |\sigma'(q(t))| |q'(t)| dt - \int_{-1}^1 |\sigma'(q(t))| |q'(t)| dt + \int_1^2 |\sigma'(q(t))| |q'(t)| dt$$

$$= \int_{-2}^2 |\sigma'(s)| ds - \int_{-2}^2 |\sigma'(s)| ds + \int_{-2}^2 |\sigma'(s)| ds = 3 L(\sigma)$$

Ex. 7.5

Bernoulli Paradoxet

$$(-z)^2 = z^2 \xrightarrow[(1)]{?} 2 \operatorname{Log}(-z) = 2 \operatorname{Log}(z) \xrightarrow[(2)]{?} \operatorname{Log}(-z) = \operatorname{Log}(z)$$

Problemet i paradoxet ligger i (1)

$$(-z)^2 = z^2 \Rightarrow \operatorname{Log}((-z)^2) = \operatorname{Log}(z^2)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\ln |z|^2 + i \arg((-z)^2)}_{\alpha} = \underbrace{\ln |z|^2 + i \arg(z^2)}_{\beta}$$

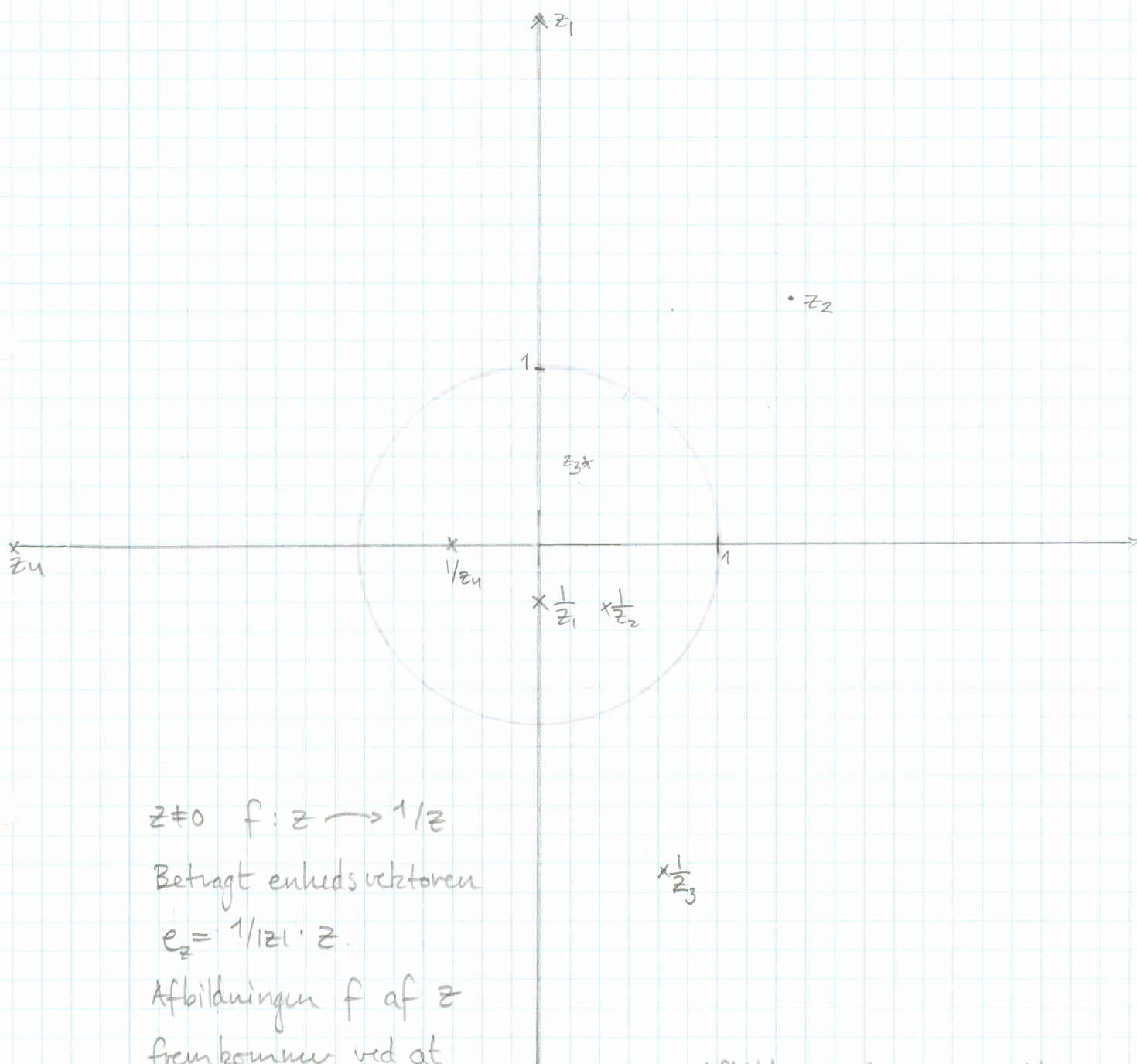
$$\alpha = 2 \ln |z| + i \cdot (2 \arg(-z) + 2n\pi)$$

$$\beta = 2 \ln |z| + i \cdot (2 \arg(z) + 2n'\pi)$$

(1) gælder kun hvis $n=n'$, men dette er langt fra altid tilfældet...
 $\arg z = \pi/4$, $n=1$, $n'=0$ (se desuden Ex. 7.4)

Ex. 7.7

$$z_1 = 3e^{i\pi/2}, z_2 = 2e^{i\pi/4}, z_3 = \frac{1}{2}e^{i\pi/3}, z_4 = 3e^{i(-\pi)}$$



$$z \neq 0 \quad f: z \mapsto 1/z$$

Betrakt enhedsvektoren

$$e_z = 1/|z| \cdot z$$

Afbildningen f af z

fremkommer ved at spejle e_z i z -aksen og ændre længden af e_z med en faktor $1/|z|$

(Vi betragter i ovenstående de komplekse tal som stivektorer)

$$1/z_3$$

Afbildning f svarer altså lidt mere præcist formuleret til at ændre fortegnet på z 's argument og multiplicere z 's længde med $1/|z|^2$

Ex. 7.19

i)

Jvf. (4) s. 127 og sætn. 7.1 er alle kont. valg af arg.-fkt. på formen $\theta(t) = t + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ $t \in [0, 4\pi]$

ii)

$$\theta(t) = \tan^{-1}\left(\frac{1-t}{t}\right) + 2n\pi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{t}-1\right) + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \quad t \in (0, 1]$$

$$\theta(0) = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

iii)

$$\theta(t) = \pi/2 + \tan^{-1}\left(\frac{t^2}{1-t}\right) + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \quad t \in [-1, 1), \quad \theta(1) = \pi/2 + 2n\pi$$

iv)

$$\theta(t) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{t}-1\right) + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \quad t \in [0, 1)$$

$$\theta(t) = \sin^{-1}\left((t-1)/\sqrt{1^2+(t-1)^2}\right) + 2n\pi = \sin^{-1}\left((t-1)/\sqrt{t^2-2t+2}\right) + 2n\pi \quad t \in [1, 2]$$

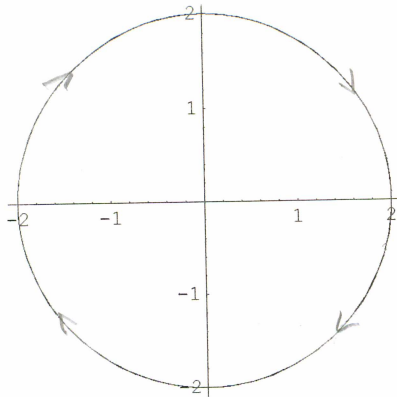
$$\omega(\gamma_1, 0) = -2$$

$$\omega(\gamma_2, 0) = \frac{\theta(1) - \theta(0)}{2\pi} = \frac{0 - \pi/2}{2\pi} = -1/4$$

$$\omega(\gamma_3, 0) = \frac{\theta(1) - \theta(-1)}{2\pi} = \frac{\pi/2 - \pi/2 - \tan^{-1}(-1/2)}{2\pi} = -\frac{\tan^{-1}(-1/2)}{2\pi} \approx 0,04698$$

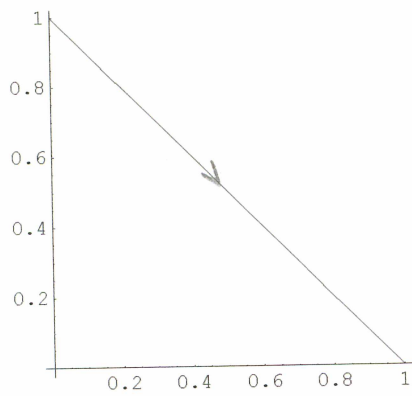
$$\omega(\gamma_4, 0) = \frac{\theta(2) - \theta(0)}{2\pi} = \frac{\pi/4 - \pi/2}{2\pi} = -1/8$$

```
In[11]:= ParametricPlot[{2 * Cos[t], 2 * Sin[t]}, {t, 0, 4 * Pi},  
  AspectRatio -> Automatic]
```



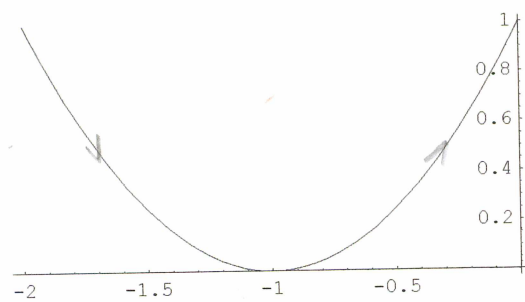
Out[11]= - Graphics -

```
In[8]:= ParametricPlot[{t, 1 - t}, {t, 0, 1}, AspectRatio -> Automatic]
```



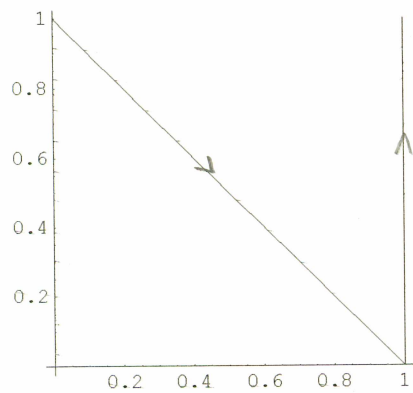
Out[8]= - Graphics -

```
In[9]:= ParametricPlot[{t - 1, t^2}, {t, -1, 1}, AspectRatio -> Automatic]
```



Out[9]= - Graphics -

```
In[10]:= ParametricPlot[{{t, 1 - t}, {1, t}}, {t, 0, 1},  
  AspectRatio -> Automatic]
```



```
Out[10]= - Graphics -
```


Ex. 7.20

i)

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \in [0, 2\pi] \quad \gamma(t) = 2e^{-it}, \quad z_0 = 1 \quad z_1 = 3i$$

$$w(\gamma, z_0) = w(\gamma - z_0, 0) = \frac{\theta(2\pi) - \theta(0)}{2\pi} = \frac{-2\pi}{2\pi} = -1$$

notation
s. 129_n

$$w(\gamma, z_1) = w(\gamma - z_1, 0) = \frac{\theta(2\pi) - \theta(0)}{2\pi} = \frac{\theta(0) - \theta(0)}{2\pi} = 0$$

ii)

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \in [0, 1] \quad \gamma(t) = t + i(1-t), \quad z_0 = 1+i, \quad z_1 = -i, \quad z_2 = 10i$$

$$w(\gamma, z_0) = w(\gamma - z_0, 0) = \frac{\theta(1) - \theta(0)}{2\pi} = \frac{-\pi/2 - (-\pi)}{2\pi} = \frac{\pi/2}{2\pi} = 1/4$$

$$w(\gamma, z_1) = w(\gamma - z_1, 0) = \frac{\theta(1) - \theta(0)}{2\pi} = \frac{\pi/4 - \pi/2}{2\pi} = \frac{-\pi/4}{2\pi} = -1/8$$

$$w(\gamma, z_2) = w(\gamma - z_2, 0) = \frac{\theta(1) - \theta(0)}{2\pi} = \frac{\tan^{-1}(1/10) - \pi/2 - (-\pi/2)}{2\pi} = \frac{\tan^{-1}(1/10)}{2\pi}$$

$\approx 0,15863$

Ex 8.4

$$D := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq \pm 1\}$$

Påstand: D er ikke simpelt sammenhengende

Beris:

Vi skal vise $\neg (\forall \gamma$ lukkede stier i $D, z_0 \in D, w(\gamma, z_0) = 0)$

$$\equiv (\exists \gamma \text{ lukket sti i } D, z_0 \in D, w(\gamma, z_0) \neq 0)$$

Definer $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow D, t \in [0, 2\pi], \gamma(t) = 1 + e^{it}$

Jvf. s. 131 (6):

$$w(\gamma, 1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+e^{it}-1} (ie^{it}) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} i dt = 1 \neq 0 \quad \square$$

$$L_1 := \{x+iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{R}, y=0, x \leq -1\}$$

$$L_2 := \{x+iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{R}, y=0, x \geq 1\}$$

$$D_0 = D \setminus (L_1 \cup L_2)$$

D_0 er stjerneformet (stjerne-centrum f.eks. $z_0=0$)

Påstand: D_0 er simpelt sammenhengende

Beris:

Jvf. sætn. 8.11 skal vi vise, at for et vilkårlig f diff. i D og en vilk. lukket sti γ i D er $\int_{\gamma} f = 0$

Lad f diff. i D , γ lukket sti være vilk.

Da D_0 er stjerneformet har f jf. sætn. 8.2 en stamfunksjon af sætn. 6.11 følger, at $\int_{\gamma} f = 0$ □

$$f: D \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \in D \quad f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$$

f har ikke en stamfkt. på D :

Lad γ være stien i beviset for den første påstand (se forrige side)
 γ er en lukket sti i D men $\oint_{\gamma} f \neq 0$, hvilket jvf. sætn. 6.11
medfører, at f ikke har en stamfunktion på D .

f har en stamfkt. på D_0 :

Da f er diff. på D_0 og D_0 er stjerneformet er dette en
umiddelbar konsekvens af sætn. 8.2.

Kompleks Funktionsteori

Ugeseddel nr. 1

De første to uger afholdes forelæsningerne ved Steffen Bentzen.

UGEN 3-7/9

Forelæsninger:

Der gennemgås dele af kap. 2-3, idet kap. 1 forudsættes i stort omfang kendt fra Mat 11, og dele af kap. 2-3 er umiddelbare generalisationer af det reelle tilfælde. Det anbefales, at I selv også læser kap. 1 og resten af kap. 2-3. Specielt gennemgås af kap. 2: 1, 3 prop. 2.4 og cor. 2.5; 4, 5, 6. Kap. 3 er også i det væsentlige kendt fra Mat 11. Vi minder om sammenligningskriteriet, kvotientkriteriet, konvergens radius. Theorem 3.9 bevises (appendix) og 4 gennemgås.

Opgaver til øvelserne: Ex. 1: 8, 14, 15
Ex. 2: 7, 9, 11
Ex. 3: 5, 7

Afleveringsopgave til ugen 10-14/9: Ex. 1, 16

UGEN 10-14/9

Forelæsningerne: Kap. 4 og 5 gennemgås. Kap. 6 påbegyndes. Afsnit 6,2 gennemgås. Beviset for prop. 6.5 udelades.

Opgaver til øvelserne: Ex. 4: 6, 7 (i)-(iii)
Ex. 5: 8, 11, 14, 16

Afleveringsopgave til ugen 17-21/9: Ex. 4, 15

UGEN 17-21/9 → 24-28/9

Forelæsninger: Resten af kap. 6 og kap. 7 gennemgås

Opgaver til øvelserne: Ex. 6: 4, 5, 15, 16
Ex. 7: 2, 3, 4, 6, 8

Afleveringsopgave til ugen 24-28/9: Ex. 6, 14

Med venlig hilsen

Erik Balslev

Afleveringsopgave nr. 3, Kompleks Funktionsteori, Gunnar Hellmund, 19960312

$f, g \in C^\infty(D, \mathbb{C})$ (egentlig kun C^1 men $C^1 \Rightarrow C^\infty$ i komplekse ft.)
men det ved vi ikke endnu! Eller hvad?

$\gamma \in C^\infty([a, b], D)$ $a, b \in \mathbb{R}$ $\gamma(a) = z_1$ $\gamma(b) = z_2$

Påstand: $\int_\gamma f g' = f(z_2)g(z_2) - f(z_1)g(z_1) - \int_\gamma f' g$ (*)

Bevis:

? Henvisning

Da $D[fg] \doteq f'g + fg'$ er fg stamfkt. til $f'g + fg'$

Af sætn. 6.7 følger, at $\int_\gamma (f'g + fg') = f(z_2)g(z_2) - f(z_1)g(z_1)$ ✓

$$\Rightarrow \int_\gamma f g' = f(z_2)g(z_2) - f(z_1)g(z_1) - \int_\gamma f' g$$

□

i)

$$\begin{aligned} \int_\gamma z \cdot \sin z \, dz &= z_1 \cos(z_1) - z_2 \cos(z_2) + \int_\gamma \cos z \, dz \\ &= z_1 \cos(z_1) - z_2 \cos(z_2) + \sin(z_2) - \sin(z_1) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \int_\gamma z \cdot \cos z \, dz &= z_2 \sin(z_2) - z_1 \sin(z_1) - \int_\gamma \sin z \, dz \\ &= z_2 \sin(z_2) + \cos(z_2) - z_1 \sin(z_1) - \cos(z_1) \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} \int_\gamma z e^{iz} \, dz &= z_1 i e^{iz_1} - z_2 i e^{iz_2} + \int_\gamma i e^{iz} \, dz \\ &= z_1 i e^{iz_1} - z_2 i e^{iz_2} + e^{iz_2} - e^{iz_1} \\ &= (z_1 i - 1) e^{iz_1} + (1 - z_2 i) e^{iz_2} \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^2 \sin z \, dz &= z_1^2 \cos(z_1) - z_2^2 \cos(z_2) + \int_{\gamma} 2z \cos z \, dz \\ &= z_1^2 \cos(z_1) - z_2^2 \cos(z_2) + 2(z_2 \sin(z_2) + \cos(z_2) - z_1 \sin(z_1) - \cos(z_1)) \\ &= (z_1^2 - 2) \cos(z_1) - (z_2^2 - 2) \cos(z_2) + 2z_2 \sin(z_2) - 2z_1 \sin(z_1) \end{aligned}$$

For $\gamma: [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{C}$ $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, \pi/2]$ fix

da $e^{i0} = 1$, $e^{i\pi/2} = i$ (dus. $z_1 = 1$, $z_2 = i$)

$$i) = 1 \cdot \cos 1 - i \cdot \cos i + \sin i - \sin 1 = \cos 1 - i \cdot \cos i + \sin i - \sin 1$$

$$ii) = i \cdot \sin i + \cos i - 1 \cdot \sin 1 - \cos 1 = i \sin i + \cos i - \sin 1 - \cos 1$$

$$iii) = (1 \cdot i - 1) e^{i1} + (1 - i i) e^{ii} = (i - 1) e^i + 2e^{-1}$$

$$\begin{aligned} iv) &= (1 - 2) \cos 1 - (i^2 - 2) \cdot \cos i + 2 \cdot i \sin i - 2 \cdot 1 \cdot \sin 1 \\ &= -\cos 1 + 3 \cos i + 2i \sin i - 2 \sin 1 \end{aligned}$$

Godheul dkk 26/9-2007 (2)

Kompleks Funktionsteori, TØ nr. 4

Ex. 6.4

$$n \geq 1, \quad z_0 \in \mathbb{C}, \quad r \in \mathbb{R}_+$$

$$\gamma: [0, 2n\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma(t) = z_0 + re^{it} \quad t \in [0, 2n\pi], \gamma \in C^1([0, 2n\pi], \mathbb{C})$$

γ beskriver cirklen med centrum i z_0 , radius r gennemløbet n gange mod uret med start i $z_0 + r$

$-\gamma$ beskriver den samme cirkel og har samme startpkt. men løber n gange med uret.

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz \stackrel{\text{def. s. 105}}{=} \int_0^{2n\pi} \frac{1}{z_0 + re^{it} - z_0} (ire^{it}) dt = \int_0^{2n\pi} i dt = n2\pi i$$

$$\int_{-\gamma} \frac{1}{z - z_0} d\bar{z} \stackrel{\text{def. s. 105}}{=} \int_0^{2n\pi} \frac{1}{z_0 + re^{-it} - z_0} (-ire^{-it}) dt = \int_0^{2n\pi} -i dt = -n2\pi i$$

Ex 6.5

$$\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = e^{it} \quad t \in [0, \pi], \quad \gamma \in C^1([0, \pi], \mathbb{C})$$

$$f: D \rightarrow \mathbb{C}, \quad F: D \rightarrow \mathbb{C}, \quad F \in C^\infty(D, \mathbb{C}) \quad \frac{d}{dz} F(z) = f(z)$$

	i	ii	iii	iv	v	vi
f	$1/z^2$	$1/z$	$\cos z$	$\sinh z$	$\tan z$	$(\exp z)^3$
D	$\mathbb{C} \setminus \{0\}$	$\mathbb{C} \setminus \{0\}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$
F	$-1/z$	////	$\sin z$	$\cosh z$	////	$\frac{1}{3}(\exp z)^3$

Af sætn. 6.7 og da $e^{i0} = 1$, $e^{i\pi} = -1$ følger

$$\int_{\gamma} f_i = -1/1 - -1/1 = 2$$

$$\int_{\gamma} f_{iii} = \sin(-1) - \sin(1) = -2\sin(1)$$

$$\int_{\gamma} f_{iv} = \cosh(-1) - \cosh(1) = 0$$

$$\int_{\gamma} f_{vi} = \frac{1}{3}(\exp(-1))^3 - \frac{1}{3}(\exp(1))^3 = \frac{1}{3e^3} - \frac{1}{3}e^3 = \frac{1-e^6}{3e^3} = \frac{1/e^3 - 1}{3}$$

$$\int_{\gamma} f_{ii} \stackrel{\text{def. 105}}{=} \int_0^{\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = \int_0^{\pi} i dt = \pi i$$

eller $F = \text{Log}_{\alpha}(z)$, hvor α f.eks. er $3\pi/2 \Rightarrow \int_{\gamma} f_{ii} \stackrel{\text{sætn. 6.7}}{=} \text{Log}_{\alpha}(-1) - \text{Log}_{\alpha}(1) = i \arg(-1) = \pi i$

Benyt Log_{α} , $\alpha = -\pi/2$, da ses at på $\mathbb{C} \setminus \{e^{i\alpha} z \mid z \in \mathbb{R}_+\}$ gælder

$$F'(z) = f_v(z), \quad \text{hvor } F(z) = -\text{Log}_{\alpha}(\cos z), \text{ dvs.}$$

$$\int_{\gamma} f_v \stackrel{\text{sætn. 6.7}}{=} -\text{Log}_{\alpha}(\cos(-1)) - -\text{Log}_{\alpha}(\cos(1)) = 0$$

Ex. 6.15

$C_r \in C^1([0, 2\pi], \mathbb{C}) \quad t \in [0, 2\pi] \quad C_r(t) = z_0 + re^{it} \quad r \in \mathbb{R}_+, z_0 \in \mathbb{C}$

D betegner et domæne $z_0 \in D$ (*)

$\forall n \geq 1: r_n \leq 1/n$ - af (*) følger $\exists N' \geq 1 \forall n \geq N': C_{r_n} \subseteq D$ (*)

$f \in C^0(D, \mathbb{C})$

Påstand: $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = 0$

Beris

$f \in C^0(D, \mathbb{C}) \Rightarrow |f| \in C^0(D, \mathbb{R}) \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1 \forall n \geq N: |z - z_0| < r_n \Rightarrow ||f(z)| - |f(z_0)|| \leq \varepsilon \Rightarrow 0 \leq |f(z)| \leq |f(z_0)| + \varepsilon$

Dvs. $\exists N \geq 1, M \in \mathbb{R}_+ \forall z \in B_{1/N}(z_0): |f(z)| \leq M$

Lad $n \geq N$ være givet $C_{r_n} \subseteq B_{1/N}(z_0)$ da $r_n \leq 1/n \leq 1/N$

Længden af C_{r_n} er $2\pi r_n$

Af Lemma 6.10 følger $|\int_{C_{r_n}} f(z) dz| \leq M \cdot 2\pi r_n \leq M 2\pi/n$ (*)

Lad $\varepsilon > 0$ være givet

Vælg $N > M 2\pi/\varepsilon: \forall n \geq N: |\int_{C_{r_n}} f(z) dz| < \varepsilon$

Ved at vælge passende delfølger af vilk., følger som konvergerer mod 0 er betingelsen i (*) opfyldt og vi har dermed vist $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = 0$

□

Påstand: $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) / (z - z_0) dz = 2\pi i f(z_0)$

Bevis:

I Ex. 6.4 viste vi, at $\int_{C_r} 1/(z - z_0) dz = 2\pi i$

Dvs. $\int_{C_r} f(z_0) / (z - z_0) dz = 2\pi i f(z_0)$

Vi har derfor gennemført beviset, hvis vi kan vise, at

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

Lad $\varepsilon > 0$ være givet

$$f \in C^0(D, \mathbb{C}) \Rightarrow \exists N \geq 1 \forall n \geq N : |z - z_0| < r_n \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Af lemma 6.10 følger $\left| \int_{C_{r_n}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{\varepsilon}{r_n} 2\pi r_n = 2\pi \varepsilon$

□

Ex. 6.16

$f: D \rightarrow \mathbb{C}$, $F \in C^\infty(D, \mathbb{C})$ $\frac{d}{dz} F(z) = f(z)$ (F eksisterer måske ikke, ...)

	i	ii	iii	iv	v	vi
f	z^2	$1/z^2$	$1/z$	$z \cdot \sin z$	$ z ^2$	$\bar{z}$
D	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C} \setminus \{0\}$	$\mathbb{C} \setminus \{0\}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$
F	$\frac{1}{3} z^3$	$-1/z$	//////	$\sin z - z \cos z$	//////	//////

Tilfældet iii)

En stamfunktion F til f kan ikke eksisterer...

Antag at f har en stamfkt. og lad γ være som i

Ex. 6.4 med $r=1$, $z_0=0$

Af Ex 6.4 følger, at $\int_\gamma f = 2\pi i n \neq 0$

Af sætn. 6.11 følger, at $\int_\gamma f \neq 0$ $\nexists$

Tilfældet v) + vi)

Antag at F eksisterer og $F' = f$

Da F er diff. følger af sætn. 10.3 at f' eksisterer,

det medfører at hh. $|z|^2$ og $\bar{z}$ er diff., men det er i modstrid med Ex. 4.6, hvor vi så, at koordinatfkt.

for $|z|^2$, $\bar{z}$ ikke opfyldt Cauchy-Riemann ligningerne, og

derfor, jvf. prop. 4.4, ikke er diff.

Ex 7.2

$z \in \mathbb{C}$, $\arg z$ betegner hovedargumentet til z

$x, y \in \mathbb{R}$

Påstand: $\lim_{y \rightarrow 0} \arg(x+iy) = \pi$, $\lim_{y \rightarrow 0} \arg(x-iy) = -\pi$, $x < 0$

Bewis

Af s. 123 følger

$$\cos(\arg(x+iy)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \rightarrow -1, y \rightarrow 0 \text{ da } x < 0 \quad (1)$$

des. jvf. s. 124 at

$$\arg(x+iy) \rightarrow \cos^{-1}(-1) = \pi, y \rightarrow 0$$

Af s. 123 følger

$$\cos(\arg(x-iy)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \rightarrow -1, y \rightarrow 0 \text{ da } x < 0 \quad (2)$$

des. jvf. s. 124 at

$$\arg(x-iy) \rightarrow -\cos^{-1}(-1) = -\pi, y \rightarrow 0$$

□

$x = 0$

$$\cos(\arg(x+iy)) \stackrel{(1)}{=} 0, \sin(\arg(x+iy)) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{s. 123}}}{=} \frac{|y|}{\sqrt{|y|^2}} = 1$$

Des. $\arg(x+iy) = \pi/2$ (jvf. s. 124) specielt $\lim_{y \rightarrow 0} \arg(x+iy) = \pi/2$

$$\cos(\arg(x-iy)) = 0, \sin(\arg(x-iy)) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{s. 123}}}{=} \frac{-|y|}{\sqrt{|y|^2}} = -1$$

Des. $\arg(x-iy) = -\pi/2$ (jvf. s. 124) specielt $\lim_{y \rightarrow 0} \arg(x-iy) = -\pi/2$

$$x > 0$$

Af s. 123 følger

$$\sin(\arg(x + iy)) = \frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow 0, y \rightarrow 0$$

$$\text{Juf. s. 124: } \arg(x + iy) \rightarrow \sin^{-1}(0) = 0, y \rightarrow 0$$

Af s. 123 følger tilsvarende

$$\sin(\arg(x - iy)) = \frac{-|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow 0, y \rightarrow 0$$

$$\text{Juf. s. 124: } \arg(x - iy) \rightarrow \sin^{-1}(0) = 0, y \rightarrow 0$$

Bm. vi har bekræftet kont. af de trigonometriske fkt.

Ex 7.3

$$\operatorname{Log}(3i) = \log |3i| + i \operatorname{Arg}(3i) = \log 3 + i \pi/2$$

$$\operatorname{Log}(-2i) = \log 2 - i \pi/2$$

$$\operatorname{Log}(1+i) = \log \sqrt{2} + i \pi/4$$

$$\operatorname{Log}(-1) = \log 1 + i \pi = i \pi$$

$$\operatorname{Log}((2e^{i\pi/3})^{19}) = 10 \cdot \log 2 - i \frac{2}{3} \pi$$

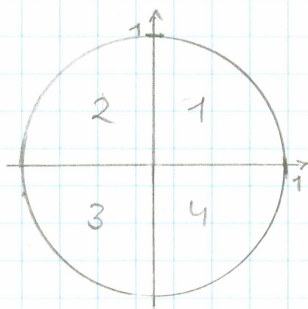
$$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$x > 0 \quad \operatorname{Log}(x) = \log(x) \quad x < 0 \quad \operatorname{Log}(x) = \log(x) + i \pi$$

Ex 7.4

$$z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\begin{aligned} \log(z_1 z_2) &= \log|z_1 z_2| + i \arg(z_1 z_2) = \log|z_1| + \log|z_2| + i \arg(z_1 z_2) \\ &= \log|z_1| + \log|z_2| + i \arg(z_1 z_2) \\ &= \log|z_1| + \log|z_2| + i \arg(z_1) + i \arg(z_2) + i 2n\pi, n \in \{-1, 0, 1\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \arg(z_1) + \arg(z_2) &> \pi \quad n=1 \\ \arg(z_1) + \arg(z_2) &\leq -\pi \quad n=-1 \\ n=0 \text{ ellers} \end{aligned}$$

(*)

$$= \log z_1 + \log z_2 + i 2n\pi, n \in \{-1, 0, 1\}$$

$$\begin{aligned} \log z_1 &= \log|z_1| + i(\arg z_1 + 2n_1\pi), n_1 \in \mathbb{Z} \\ \log z_2 &= \log|z_2| + i(\arg z_2 + 2n_2\pi), n_2 \in \mathbb{Z} \\ \log z_1 z_2 &= \log|z_1 z_2| + i(\arg z_1 z_2 + 2n_3\pi), n_3 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\arg(z_1) + \arg(z_2) \in (-\pi, \pi] :$$

Sæt $n_1 = n_2 = n_3 = 0$, da gælder

$$\begin{aligned} \log z_1 z_2 &= \log|z_1 z_2| + i \arg(z_1 z_2) = \log|z_1| + i \arg(z_1) + \log|z_2| + i \arg(z_2) \\ &= \log z_1 + \log z_2 \end{aligned}$$

$$\arg(z_1) + \arg(z_2) > \pi$$

Sæt $n_1 = n_2 = 0, n_3 = 1$, da gælder

$$\log z_1 z_2 = \log|z_1| + \log|z_2| + i \arg(z_1 z_2) + i 2\pi = \log z_1 + \log z_2$$

(*)

Tilsvarende for $\arg(z_1) + \arg(z_2) \leq -\pi$, sæt $n_1 = n_2 = 0, n_3 = -1$, da ses $\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$

Ex 7.6

$$f \in C^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \quad f(z) = z e^{i\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R} \quad (z \in \mathbb{C})$$

Påstand: f drejer et vilk. pkt. i $\mathbb{C}$ θ radian (*)

Beweis:

Lad $z \in \mathbb{C}$ være vilk.

$$r = |z|, \quad \arg z = \varphi \quad \text{da gælder } z = r e^{i\varphi}$$

$$f(z) = z e^{i\theta} = r e^{i\varphi} e^{i\theta} = r e^{i(\varphi + \theta)}$$

Vi ser $|f(z)| = r$ og $\arg f(z) = \varphi + \theta + 2n\pi$ (n valgt således $f(z) \in (-\pi, \pi]$)

Detta fortæller det ønskede

□

$$i = e^{i\pi/2} \xrightarrow{*} f(z) = iz \text{ drejer et vilk. pkt i } \mathbb{C} \pi/2 \text{ radian } (90^\circ)$$

$$-1 = e^{i\pi}, \quad -i = e^{-i\pi/2} \xrightarrow{*} f_1(z) = -z \text{ drejer et vilk. pkt i } \mathbb{C} \pi \text{ radian } (180^\circ)$$

$$f_2(z) = -iz \text{ drejer et vilk. pkt i } \mathbb{C} -\pi/2 \text{ radian } (-90^\circ)$$

$$\lambda = r e^{i\theta}, \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

$f(z) = \lambda z$ transformerer z over i komplekst tal med norm $r|z|$

og argument $\arg z + \arg \theta + 2\pi n$ (n valgt således $\arg \lambda z \in (-\pi, \pi]$)

Dvs en skalering r og en rotation θ .

Ex. 7.8

$$n \geq 1$$

$w \in \mathbb{C}$ siges at være en n 'te enhedsrod, hvis $w^n = 1$

i)

$$w \in \mathbb{C}, w^n = 1, w = r e^{i\theta}, r \in \mathbb{R}_+, \theta \in \mathbb{R} \quad (r = |w|, \theta = \arg w)$$

$$1 = |w^n| = |w|^n \Rightarrow r = |w| = 1$$

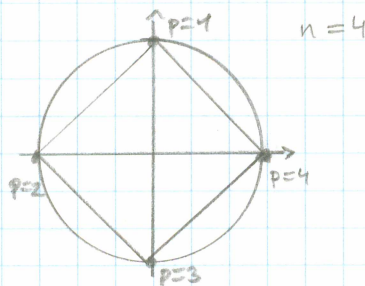
$$n \cdot \arg w = \arg w^n = \arg 1 + p \cdot 2\pi = p \cdot 2\pi, p \in \mathbb{Z}$$

$\Updownarrow$

$$\arg w = p \cdot \frac{2\pi}{n}, p \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Dvs. } w = e^{ip \frac{2\pi}{n}}, p \in \mathbb{Z}$$

Vi ser, at der er n forskellige n 'te enhedsrodder nemlig $w = e^{ip \frac{2\pi}{n}}, p \in \{1, \dots, n\}$



Tegnet ind på enhedscirklen vil de n 'te enhedsrodder udgøre hjørnerne i en regulær n -kant med et hjørne i $(1,0)$

ii)

$$n=2$$

$$\{\omega \in \mathbb{C} \mid \omega^2 = 1\} = \{e^{i\pi}, e^{i2\pi}\} = \{-1, 1\}$$

$$n=3$$

$$\{\omega \in \mathbb{C} \mid \omega^3 = 1\} = \{e^{i2\pi/3}, e^{i4\pi/3}, e^{i2\pi}\} = \{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, 1\}$$

$$n=4$$

$$\{\omega \in \mathbb{C} \mid \omega^4 = 1\} = \{e^{i\pi/2}, e^{i\pi}, e^{i3\pi/2}, e^{i2\pi}\} = \{i, -1, -i, 1\}$$

iii)

$$\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}, \omega_1^n = 1, \omega_2^n = 1$$

$$(\omega_1^m)^n = (\omega_1^n)^m = 1^m = 1$$

$$(\omega_1 \omega_2)^n = \omega_1^n \omega_2^n = 1 \cdot 1 = 1$$

$$(\omega_1 / \omega_2)^n = \omega_1^n / \omega_2^n = 1 / 1 = 1$$

iv)

$$r \in \mathbb{R}_+, \theta \in \mathbb{R}$$

$$z \in \mathbb{C} : z^n = r e^{i\theta}$$

$$|z|^n = |z^n| = |r e^{i\theta}| = r \Rightarrow |z| = \sqrt[n]{r}$$

$$n \arg z = \arg z^n = \arg r e^{i\theta} = \theta + p \cdot 2\pi \Rightarrow \arg z = \frac{\theta + p \cdot 2\pi}{n}$$

$$\text{Dus, } z = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta + p \cdot 2\pi}{n}}$$

v)

$$z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad z_1^n = z_2^n$$

$$\text{Påstand: } \exists w \in \mathbb{C} \quad w^n = 1 : z_1 = w z_2$$

Bevis

$z_1 = 0 \vee z_2 = 0 \Rightarrow z_1 = z_2 = 0$ da kan w vælges vilkårligt blandt de n 'te enhedsvædder.

$$\text{Antag } z_1, z_2 \neq 0$$

$$z_1^n = z_2^n \Rightarrow (z_1/z_2)^n = 1, \text{ dus, } w = z_1/z_2 \text{ er en } n\text{'te enhedsvædd}$$

$$w z_2 = (z_1/z_2) z_2 = z_1$$

□

Kompleks funktionsteori

Ugeseddel 2

Øvelserne:

Opgaverne stillet til denne uge, 17-21. september, gennemgås **ikke** i denne uge. De samme opgaver stilles i stedet for til næste uge, 24-28. september. Afleveringsopgaven til næste uge bibeholdes.

Ved øvelserne i denne uge gennemgås gamle opgaver I ikke har nået, eventuelt afleveringsopgaver og stoffet indtil nu diskuteres.

Forelæsningerne 18. og 20. september omhandler kapitel 6 og 7.

Mvh

Erik Balslev

TØ nr. 3 : Ex 2.8, 3.11-iii, 3.101-ii, 4.5
17-21/9

Kompleks Funktionsteori, TØ nr. 3

Ex. 2.8

$S \subseteq \mathbb{C}$, S kurvesammenhængende

$f \in C^0(S, \mathbb{C})$

Påstand: $f(S)$ er kurvesammenhængende

Beweis:

Lad $y, y' \in f(S)$ være vilk.

Da S er kurvesammenhængende gælder (se def. på kurve S, 330)

$\exists \gamma \in C^0([a, b] \subseteq \mathbb{R}, S) : \gamma(a) = a', \gamma(b) = b'$, hvor $f(a') = y$ $f(b') = y'$

If. resultat om sammensætning af kontinuerte funktioner

$f \circ \gamma \in C^0([a, b], f(S))$ og $f(\gamma(a)) = y$, $f(\gamma(b)) = y'$

og $f \circ \gamma$ er en kurve mellem y, y' .

y, y' vilkårlige altså er $f(S)$ kurvesammenhængende $\square$

Ex. 3.1

$$(a_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{C}$$

i)

$$\forall n \geq 1: a_n = (1+i)^n$$

Da $|a_n| = \sqrt{2}^n \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty$, kan $(a_n)_{n \geq 1}$ ikke være konvergent

ii)

$$\forall n \geq 1: a_n = \frac{(1+i)^n}{n}$$

$$|a_n| = \frac{\sqrt{2}^n}{n}$$

$$\text{Af L'Hôpital's regel fås } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}^n}{n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2) \cdot 2^{x/2}}{2} = \infty$$

Dvs. $|a_n| \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty$ kan $(a_n)_{n \geq 1}$ ikke være konvergent

iii)

$$\forall n \geq 1: a_n = \frac{(1+i)^n}{n!}$$

$$|a_n| = \frac{\sqrt{2}^n}{n!} = \frac{\sqrt{2}}{1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dots \cdot \frac{\sqrt{2}}{n-1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{n} \leq \frac{\sqrt{2}}{1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

Dvs. $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ og dermed $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Ex. 3.10

$$(a_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{C}$$

Antag at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ har konvergensradius $R \in \mathbb{R}_+$

$$C := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$$

i)

Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ har konvergensradius $R = (\limsup (1/n)^{1/n})^{-1} = (\lim \frac{1}{n})^{-1} = (0^0)^{-1} = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1)^n = \infty \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{n-1} = -\ln 2$$

Denne række er altså et mod eksempel til påstanden, at hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ konvergerer i et pkt $z \in C$, konvergerer den på hele C .

ii)

Påstand: Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ konvergerer absolut i et pkt på C , da konvergerer den absolut på hele C .

Beweis:

$$\exists z \in C: \sum_{n=1}^{\infty} |a_n z^n| \text{ konvergent}$$

Da $\forall z \in C: |z| = R$ fås desuden

$$\forall z \in C: |a_n z^n| = |a_n| |z|^n \leq |a_n| |z'|^n = |a_n z'^n|$$

Det ønskede følger nu af sammenligningstesten s.55 $\square$

Ex. 4.5

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ betegner et polynomium

Dvs. $\exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C}: f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$

$g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}: g(z) = \overline{f(\bar{z})}$

Påstand: $g \in C^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C})$

Beweis:

$$z \in \mathbb{C}: g(z) = \bar{a}_n \bar{z}^n + \bar{a}_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 \bar{z} + \bar{a}_0$$

Betrægt g som en række (sæt $a_{n+k} = 0 \ k \geq 1$), denne har konvergensradius $R = \infty$ og det ønskede følger derfor af korollar 4.13

□

$h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}: h(z) = \overline{f(z)}$

Påstand: h diff. i $z_0 = 0 \iff f'(0) = 0$

Beweis

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\bar{a}_n \bar{z}^n + \dots + \bar{a}_1 \bar{z}}{z} = \bar{a}_n \bar{z}^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 \bar{z}^{-1} \quad (*)$$

$$\left| \frac{\bar{z}^n}{z} \right| = |z|^{n-1} \text{ for } n \geq 2 \text{ betyder dette at } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}^n}{z} = 0$$

For $\bar{z}/z$ har vi, at den tilhørende vektor i det komplekse plan befinder sig på enhedscirklen, men har vinkel $-2 \arg z$, dvs. $\lim_{z \rightarrow 0} \bar{z}/z$ eksisterer ikke, altså eksisterer grænsen af $*$ for $z \rightarrow 0$ kun hvis $\bar{a}_1 = 0$, dvs $a_1 = 0$, men da $f'(0) = a_1^{(*)}$ gælder dette hvis og kun hvis $f'(0) = 0$.

(*) se evt. s. 75_n

□

Afløeringsopgave nr. 2, Kompleks Funktionsteori, Gerner Helmsund, 199603-12

$$J_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad n \geq 0: J_n(z) := \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (\frac{1}{2}z)^{n+2r}}{r!(n+r)!}$$

Lad $z \in \mathbb{C}$ være vilk.

$$\left| \frac{(-1)^r (\frac{1}{2}z)^{n+2r}}{r!(n+r)!} \right| / \left| \frac{(-1)^{r-1} (\frac{1}{2}z)^{n+2r-1}}{(r-1)!(n+r-1)!} \right| = \frac{1}{2r(n+r)} |z| \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

Af Ratiotesten s. 55 i ST følger, at $J_n(z)$ er konvergent på hele $\mathbb{C}$

Af korollar 4.13 følger

$$\begin{aligned} J_n'(z) &= n \cdot \frac{(\frac{1}{2}z)^n z^{n-1}}{n!} + \sum_{r=1}^{\infty} (n+2r) \frac{(-1)^r (\frac{1}{2}z)^{n+2r} z^{n+2r-1}}{r!(n+r)!} \\ &= \frac{n}{z} \frac{(\frac{1}{2}z)^n}{n!} + \frac{n}{z} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r (\frac{1}{2}z)^{n+2r}}{r!(n+r)!} - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1} (\frac{1}{2}z)^{n+2r-1}}{(r-1)!(n+r)!} \\ &= \frac{n}{z} J_n(z) - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1} (\frac{1}{2}z)^{n+1+2(r-1)}}{(r-1)!(n+1+(r-1))!} = \frac{n}{z} J_n(z) - J_{n+1}(z) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_n''(z) &= \frac{n}{z} J_n'(z) - \frac{n}{z^2} J_n(z) - J_{n+1}'(z) \\ &= \frac{n}{z} \left(\frac{n}{z} J_n(z) - J_{n+1}(z) \right) - \frac{n}{z^2} J_n(z) - \frac{n+1}{z} J_{n+1} + J_{n+2}(z) \\ &= J_{n+2}(z) - \frac{2n+1}{z} J_{n+1}(z) + \frac{n}{z} \frac{(n-1)}{z} J_n(z) \quad (2) \end{aligned}$$

(*) Vi benyttede gennem hele opg. at rækkerne er abs. konvergente på $\mathbb{C}$; idet vi implicit benyttede række-regnearbejde for konvergente rækker. $\frac{1}{3}$

$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) \stackrel{(1)}{=} J_{n-1}(z) + \frac{n}{z} J_n(z) - J_n'(z)$$

$$= \frac{n}{z} J_n(z) + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{1}{z} z\right)^{n-1+2r}}{r! (n-1+r)!} - \frac{n}{z} \frac{\left(\frac{1}{z} z\right)^n}{n!} - \sum_{r=1}^{\infty} (n+2r) \frac{(-1)^r \left(\frac{1}{z} z\right)^{n+2r}}{r! (n+r)!}$$

$$= \frac{n}{z} J_n(z) + \frac{n}{z} \frac{\left(\frac{1}{z} z\right)^n}{n!} + \sum_{r=1}^{\infty} \left((n+r) \frac{z}{z} - (n+2r) \frac{1}{z} \right) \frac{(-1)^r \left(\frac{1}{z} z\right)^{n+2r}}{r! (n+r)!}$$

$$= \frac{n}{z} J_n(z) + \frac{n}{z} \left(\frac{\left(\frac{1}{z} z\right)^n}{n!} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{1}{z} z\right)^{n+2r}}{r! (n+r)!} \right) = \frac{zn}{z} J_n(z) \quad (3)$$

$$z^2 J_n''(z) + z J_n'(z) + (z^2 - n^2) J_n(z)$$

$$\stackrel{(1)+(2)}{=} z^2 J_{n+2}(z) - z(2n+1) J_{n+1}(z) + n(n-1) J_n(z) + n J_n(z) - z J_{n+1}(z) + (z^2 - n^2) J_n(z)$$

$$= z^2 J_{n+2}(z) - 2z(n+1) J_{n+1}(z) + z^2 J_n(z)$$

$$\stackrel{(3)}{=} z^2 J_{n+2}(z) - (z^2 J_{n+2}(z) + z^2 J_n(z) + z^2 J_n(z)) = 0$$

Dus, $J_n(z)$ opfyldt (er en løsning) til $z^2 \frac{d^2}{dz^2} y + z \frac{d}{dz} y + (z^2 - n^2) y = 0$

$$(3) \Rightarrow i) \quad (1) \Rightarrow ii)$$

iii):

$$J_n'(z) \stackrel{(1)}{=} \frac{n}{z} J_n(z) - J_{n+1}(z) \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{z} (J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z)) - J_{n+1}(z) \\ = \frac{1}{z} (J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z))$$

iv):

$$\begin{aligned} J_n'(z) &\stackrel{ii)}{=} \frac{1}{z} (J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)) \stackrel{i)}{=} \frac{1}{z} (J_{n-1}(z) - \frac{2n}{z} J_n(z) + J_{n+1}(z)) \\ &= J_{n-1}(z) - \frac{n}{z} J_n(z) \end{aligned}$$

v):

$$\frac{d}{dz} (z^n J_n(z)) = z^n J_n'(z) + n z^{n-1} J_n(z)$$

$$\stackrel{iv)}{=} z^n J_{n-1}(z) - n z^{n-1} J_n(z) + n z^{n-1} J_n(z) = z^n J_{n-1}(z)$$

vi):

$$\begin{aligned} 2 J_0''(z) &\stackrel{(2)}{=} 2 J_2(z) - \frac{2}{z} J_1(z) \stackrel{(3)}{=} 2 J_2(z) - J_0(z) - J_2(z) \\ &= J_2(z) - J_0(z) \end{aligned}$$

Fin bewerde

Godkval okk 18/9-2007 (1)

Kompleks Funktionsteori TB nr. 2

Ex. 4.6

$$f: D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\forall z \in D \exists x, y \in \mathbb{R} : z = x + iy$$

$$\exists u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

i)

$$f(z) = \frac{1}{z}, D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{-y}{x^2+y^2} = u(x, y) + i v(x, y)$$

$$\text{hvor } u(x, y) = x/(x^2+y^2) \quad v(x, y) = -y/(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2+y^2 - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2 - y^2 - (-y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-(-y)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{-x \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Vi ser u, v opfylder Cauchy-Riemann ligningerne på hele D .

ii)

$$f(z) = |z|, D = \mathbb{C}$$

$$f(z) = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = u(x, y) + i v(x, y), \text{ hvor } u(x, y) = \sqrt{x^2+y^2} \quad v(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq 0 = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{ikke diff. i } (x, y) = (0, 0)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \neq -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{ikke diff. i } (x, y) = (0, 0)$$

Dvs. u, v opfylder ikke Cauchy-Riemann ligningerne i noget pkt. i D

iii)

$$f(z) = \bar{z}, \quad D = \mathbb{C}$$

$$f(z) = \bar{z} = x - iy = x + i(-y) = u(x,y) + i v(x,y), \text{ hvor } u(x,y) = x$$

$$\text{og } v(x,y) = -y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (*)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \neq -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Vi ser at begge Cauchy-Riemann ligninger (*) ikke er opfyldt i D .

Ex 4.7

$u, v: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ if and only $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ (*)

i)

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$$

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$$

(*) ✓ for $D = \mathbb{R}^2$

ii)

$$u(x, y) = \sin x \cdot \cosh y, \quad v(x, y) = \cos x \cdot \sinh y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cdot \cosh y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \cdot \sinh y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \cdot \sinh y \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \cos x \cdot \cosh(y)$$

Idet $D[\sin x] = \cos x$ $D[\cos x] = -\sin x$ og

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow D[\sinh] = \cosh \quad D[\cosh] = \sinh$$

(*) ✓ for $D = \mathbb{R}^2$

iii)

$$u(x,y) = x/(x^2+y^2) \quad v(x,y) = -y/(x^2+y^2) \quad D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Uf. Ex. 4.6 i) fås at (*) ✓ på D

Ex. 5.8

i)

Pöstand: $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

Bewis:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\begin{aligned} \cosh^2 z - \sinh^2 z &= \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z} - e^{2z} + 2 - e^{-2z}}{4} = 1 \end{aligned}$$

□

ii)

Pöstand: $\sinh(z - z') = \sinh z \cosh z' - \cosh z \sinh z'$

Bewis:

$$\begin{aligned} &\sinh z \cosh z' - \cosh z \sinh z' \\ &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \cdot \frac{e^{z'} + e^{-z'}}{2} - \frac{e^z + e^{-z}}{2} \cdot \frac{e^{z'} - e^{-z'}}{2} \\ &= \frac{e^{z+z'} + e^{z-z'} - e^{z'-z} - e^{-(z+z')} - e^{z+z'} + e^{z-z'} - e^{z'-z} + e^{-(z+z')}}{4} \\ &= \frac{2e^{z-z'} - 2e^{-(z-z')}}{4} = \frac{e^{z-z'} - e^{-(z-z')}}{2} = \sinh(z - z') \end{aligned}$$

□

iii)

Påstand: $\cosh(z+z') = \cosh z \cdot \cosh z' + \sinh z \sinh z'$

Bewis:

$$\cosh z \cdot \cosh z' + \sinh z \cdot \sinh z'$$

$$= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \cdot \frac{e^{z'} + e^{-z'}}{2} + \frac{e^z - e^{-z}}{2} \cdot \frac{e^{z'} - e^{-z'}}{2}$$

$$= \frac{e^{z+z'} + \cancel{e^{z-z'}} + \cancel{e^{z'-z}} + e^{-(z+z')} + e^{z+z'} - \cancel{e^{z-z'}} - \cancel{e^{z'-z}} + e^{-(z+z')}}{4}$$

$$= \frac{2e^{z+z'} + 2e^{-(z+z')}}{4} = \frac{e^{z+z'} + e^{-(z+z')}}{2} = \cosh(z+z')$$

□

Osbornes regel bygger på at $\cos iz = \cosh z$ $\sin iz = i \cdot \sinh z$ (*)

Har vi en sin-cos formel, der gælder for vilk. komplekse tal (z)

f.eks. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ må formelen også gælde for vilk.

komplekse tal multipliceret med i (da dette igen giver

komplekse tal, dvs. der gælder f.eks. $\cos^2 iz + \sin^2 iz = 1$

nu benyttes formelen * og vi får det ønskede.

$$(\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1)$$

Ex. 5.11

$z \in \mathbb{C} \exists x, y \in \mathbb{R} : z = x + iy$

i)

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \stackrel{(5)}{=} \frac{e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^y}{2i} = \frac{i(e^{-ix}e^y - e^{ix}e^{-y})}{2}$$

$$= \frac{i}{2}e^y(\cos(-x) + i\sin(-x)) - \frac{i}{2}e^{-y}(\cos x + i\sin x)$$

$$= \frac{e^y}{2}(i\cos x + \sin x) - \frac{e^{-y}}{2}(i\cos x - \sin x)$$

$$= \frac{\sin x}{2}(e^y + e^{-y}) + i\frac{\cos x}{2}(e^y - e^{-y})$$

$$= \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y$$

ii)

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^y}{2}$$

$$= \frac{e^{-y}}{2}(\cos x + i\sin x) + \frac{e^y}{2}(\cos(-x) + i\sin(-x))$$

$$= \frac{\cos x}{2}(e^y + e^{-y}) - i\frac{\sin x}{2}(e^y - e^{-y})$$

$$= \cos x \cosh y - i\sin x \sinh y$$

iii)

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

iv)

$$\begin{aligned}\sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{e^x e^{iy} - e^{-x} e^{-iy}}{2} \\&= \frac{e^x}{2} (\cos y + i \sin y) - \frac{e^{-x}}{2} (\cos(-y) + i \sin(-y)) \\&= \frac{\cos y}{2} (e^x - e^{-x}) + i \frac{\sin y}{2} (e^x + e^{-x}) \\&= \cos y \sinh x + i \sin y \cdot \cosh x\end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned}\cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^x e^{iy} + e^{-x} e^{-iy}}{2} \\&= \frac{e^x}{2} (\cos y + i \sin y) + \frac{e^{-x}}{2} (\cos(-y) + i \sin(-y)) \\&= \frac{\cos y}{2} (e^x + e^{-x}) + i \frac{\sin y}{2} (e^x - e^{-x}) \\&= \cos y \cosh x + i \sin y \cdot \sinh x\end{aligned}$$

Af ovenstående ses $f(u,v): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

i) $\sin z = u(x,y) + i v(x,y)$

$$u(x,y) = \sin x \cosh y \quad v(x,y) = \cos x \sinh y$$

ii)

$$\cos z = u(x,y) + i v(x,y)$$

$$u(x,y) = \cos x \cosh y \quad v(x,y) = -\sin x \sinh y$$

iii)

$$e^z = u(x,y) + i v(x,y)$$

$$u(x,y) = e^x \cos y \quad v(x,y) = e^x \sin y$$

iv)

$$\sinh z = u(x,y) + i v(x,y)$$

$$u(x,y) = \cosh y \sinh x \quad v(x,y) = \sinh y \cosh x$$

v)

$$\cosh z = u(x,y) + i v(x,y)$$

$$u(x,y) = \cosh y \cosh x \quad v(x,y) = \sinh y \sinh x$$

Spørgsmålet er nu om u, v opfylder Cauchy-Riemann ligningerne:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (*)$$

i)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cosh y \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \cos x \cosh y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \sinh y \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = -\sin x \sinh y \quad (*) \checkmark \quad (\text{se Ex. 4.7 ii})$$

ii)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin x \cosh y \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\sin x \cosh y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\cos x \sinh y \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = -\cos x \sinh y \quad (*) \checkmark$$

iii)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x(-\sin y) = e^x \sin y \quad (*) \checkmark$$

iv)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos y \cosh x \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \cos y \cosh x$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \sin y \sinh x \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = -(-\sin y) \sinh x = \sin y \sinh x \quad (*) \checkmark$$

1)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos y \sinh x$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \cos y \sinh x$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \sin y \cosh x$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = -(-\sin y) \cosh x = \sin y \cosh x \quad (*) \checkmark$$

Ex. 5.14

$z \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$: $z = x + iy$, i det følgende benytter vi Ex. 5.11 (*)

$$\begin{aligned}\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(\exp z) = 0\} &\stackrel{*}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid e^x \sin y = 0\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} \mid \sin y = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = \pi \cdot p, p \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\exp z) = 0\} &\stackrel{*}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid e^x \cdot \cos y = 0\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} \mid \cos y = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = \pi/2 + \pi p, p \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(\cos z) = 0\} &\stackrel{*}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid -\sin x \cdot \sinh y = 0\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} \mid \sin x = 0 \text{ el. } y = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \pi \cdot p, p \in \mathbb{Z} \text{ el. } \operatorname{Im}(z) = 0\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\cos z) = 0\} &\stackrel{*}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid \cos x \cosh y = 0\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} \mid \cos x = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \pi/2 + \pi \cdot p, p \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(\sin z) = 0\} &\stackrel{*}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid \cos x \cdot \sinh y = 0\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} \mid \cos x = 0 \text{ el. } y = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \pi/2 + \pi p, p \in \mathbb{Z} \text{ el. } \operatorname{Im}(z) = 0\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\sin z) = 0\} &\stackrel{*}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid \sin x \cosh y = 0\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} \mid \sin x = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \pi \cdot p, p \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(\cosh z) = 0\} &\stackrel{*}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid \sin y \cdot \sinh x = 0\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} \mid \sin y = 0 \text{ el. } x = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = \pi \cdot p, p \in \mathbb{Z} \text{ el. } \operatorname{Re}(z) = 0\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\cosh z) = 0\} &\stackrel{*}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid \cos y \cdot \cosh x = 0\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} \mid \cos y = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = \pi/2 + \pi \cdot p, p \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(\sinh z) = 0\} &\stackrel{*}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid \sin y \cosh x = 0\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} \mid \sin y = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = \pi \cdot p, p \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\sinh z) = 0\} &\stackrel{*}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid \cos y \sinh x = 0\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} \mid \cos y = 0 \text{ el. } x = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = \pi/2 + \pi p, p \in \mathbb{Z} \text{ el. } \operatorname{Re}(z) = 0\}\end{aligned}$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad \frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac-bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{a+ib}{c+id}\right) = 0 \iff ac = bd$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{a+ib}{c+id}\right) = 0 \iff bc = ad$$

} (+)

$$\{z \in \mathbb{D} \mid \operatorname{Im}(\tan z) = 0\} = \{z \in \mathbb{D} \mid \operatorname{Im}(\sin z / \cos z) = 0\}$$

$$= \{z \in \mathbb{D} \mid \cos x \sinh y \cos x \cosh y = \sin x \cosh y (\pm \sin x) \sinh y\}$$

(+)

$$* = \{z \in \mathbb{D} \mid (\cos^2 x + \sin^2 x) \cosh y \sinh y = 0\}$$

$$= \{z \in \mathbb{D} \mid \sinh y = 0\} = \{z \in \mathbb{D} \mid \operatorname{Im}(z) = 0\}$$

$$\{z \in \mathbb{D} \mid \operatorname{Re}(\tan z) = 0\} = \{z \in \mathbb{D} \mid \operatorname{Re}(\sin z / \cos z) = 0\}$$

$$= \{z \in \mathbb{D} \mid \sin x \cosh y \cos x \cosh y = \cos x \sinh y (-\sin x) \sinh y\}$$

(+)

$$* = \{z \in \mathbb{D} \mid \sin x \cos x (\cosh^2 y + \sinh^2 y) = 0\}$$

$$= \{z \in \mathbb{D} \mid \sin x = 0 \text{ el. } \cos x = 0\} = \{z \in \mathbb{D} \mid \operatorname{Re}(z) = \pi/2 \cdot p, p \in \mathbb{Z}\}$$

Bm. $\tan z$ er jf. udregningerne på den foregående side

kun veldef. på $\mathbb{D} = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \pi/2 + \pi p, p \in \mathbb{Z} \wedge \operatorname{Im}(z) = 0\}$

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(\tanh z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(\sinh z / \cosh z) = 0\}$$

$$\stackrel{(+)}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid \sinh y \cosh x \cosh y \cosh x = \cosh y \sinh x \sinh y \sinh x\}$$

(+)

$$* = \{z \in \mathbb{C} \mid \cosh y \sinh y = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \cosh y = 0 \text{ el. } \sinh y = 0\}$$

$$= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = \pi/2 \cdot p, p \in \mathbb{Z}\}$$

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\tanh z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\sinh z / \cosh z) = 0\}$$

$$= \{z \in \mathbb{C} \mid \cosh y \sinh x \cosh y \cosh x = \sinh y \cosh x \sinh y \sinh x\}$$

$$= \{z \in \mathbb{C} \mid \cosh x \sinh x (\cosh^2 y - \sinh^2 y) = 0\}$$

$$= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 0 \text{ el. } \operatorname{Im}(y) = \pi/4 + \pi/2 \cdot p, p \in \mathbb{Z}\}$$

Ex. 5.16

$$x, y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad t \in \mathbb{R}: z(t) = x(t) + iy(t)$$

$$\lambda_0, k_0, \omega \in \mathbb{R}$$

$$\text{Antag at } z \text{ er en løsning til } \frac{d^2 z}{dt^2} + \lambda z = k_0 e^{i\omega t} \quad (*)$$

$$\text{Påstand: } x \text{ er en løsning til } \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda x = k_0 \cos \quad (+)$$

Beris:

$$* \Rightarrow_{z=x+iy} \frac{d^2 x}{dt^2} + i \frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda x + i \lambda y = k_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

Vi samler real-dile og imaginær-dile og får

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda x = k_0 \cos \omega t \quad \text{samt} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda y = k_0 \sin \omega t$$

□

$$\text{Lad } z(t) = k e^{i\omega t} \quad z''(t) = -k\omega^2 e^{i\omega t} \quad , k \in \mathbb{R}$$

$$z''(t) + \lambda z(t) = k(\lambda - \omega^2) e^{i\omega t} = k_0 e^{i\omega t}$$

Dvs. $z(t) = k e^{i\omega t}$ er en løsn. til (*) hvis $k_0 = k(\lambda - \omega^2)$

$\text{Re}(z(t)) = k \cdot \cos \omega t$ som jvf. ovenstående påstand er en løsn. til (+) (under forudsætning, at $k_0 = k(\lambda - \omega^2)$)

Antag $k_0 \in \mathbb{C}$, dvs. $\exists \epsilon, k_1 \in \mathbb{R}: k_0 = k_1 e^{i\epsilon}$ men $\lambda, \omega \in \mathbb{R}$

Da bliver (*) ækvivalent med $\frac{d^2 z}{dt^2} + \lambda z = k_1 e^{i(\omega t + \epsilon)}$

Splitter vi op i real-dile og imaginær-dile får

$$\underbrace{\frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda x}_x = k_1 \cdot \cos(\omega t + \epsilon) \quad \text{og} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda y = k_1 \cdot \sin(\omega t + \epsilon)$$

Påstand: En løsn. til a er $x(t) = \frac{k_1}{\lambda - \omega^2} \cos(\omega t + \varepsilon)$

Beris:

$$x''(t) = -\frac{k_1}{\lambda - \omega^2} \cdot \omega^2 \cos(\omega t + \varepsilon)$$

$$x''(t) + \lambda x(t) = k_1 \left(\frac{1}{\lambda - \omega^2} - \frac{\omega^2}{\lambda - \omega^2} \right) \cos(\omega t + \varepsilon)$$

$$= k_1 \cos(\omega t + \varepsilon)$$

□

Påstand: φ er en veldefineret bijektion

Bevis:

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-\delta/\gamma\} : \gamma z + \beta \neq 0, \text{ dvs. } \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \text{ veldef.}$$

$$\exists z \in \mathbb{C} \setminus \{-\delta/\gamma\} : \varphi(z) = \alpha/\gamma; \text{ idet} \quad (*)$$

$$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \alpha/\gamma \Rightarrow \alpha z + \beta = \alpha z + \frac{\alpha \delta}{\gamma} \Rightarrow \alpha \delta - \beta \gamma = 0 \quad \checkmark$$

$$w \in \mathbb{C} \setminus \{-\delta/\gamma\}, z \in \mathbb{C} \setminus \{-\alpha/\gamma\}$$

$$\frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta} = z \quad \Leftrightarrow_{w \neq -\delta/\gamma} \alpha w + \beta = \gamma z w + \delta z \quad \Leftrightarrow_{z \neq \alpha/\gamma} w = \frac{\delta z - \beta}{-\gamma z + \alpha}$$

Dvs. $\varphi^{-1}: \mathbb{C} \setminus \{-\alpha/\gamma\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{-\delta/\gamma\}$ er veldefineret

$$z \in \mathbb{C} \setminus \{-\alpha/\gamma\} : \varphi^{-1}(z) = \frac{\delta z - \beta}{-\gamma z + \alpha}$$

□

Aflæringsopgave 1 Kompleks funktions teori

Morten Skarsholm Rissager

lad $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ hvor $\gamma \neq 0$ $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$

Vi definerer

$$\phi: \mathbb{C} \setminus \{-\delta/\gamma\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{\alpha/\gamma\}$$
$$z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

Vi bemærker at for $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\delta/\gamma\}$ er $\gamma z + \delta \neq 0$, og

at $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \neq \alpha/\gamma$. Hvis $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma}$ skulle $\alpha z + \beta = \alpha z + \frac{\alpha}{\gamma}\delta$ hvilket strider mod antagelsen $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Vi har altså vist at ϕ er veldefineret.

Prop: $\phi: \mathbb{C} \setminus \{-\delta/\gamma\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{\alpha/\gamma\}$ er en bijektion.

Bevis: Injektiv: Hvis $\frac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma z_1 + \delta} = \frac{\alpha z_2 + \beta}{\gamma z_2 + \delta}$ er

$$\Downarrow (\alpha z_1 + \beta)(\gamma z_2 + \delta) = (\alpha z_2 + \beta)(\gamma z_1 + \delta)$$

$$\Downarrow \alpha\delta z_1 + \beta\gamma z_2 = \alpha\delta z_2 + \beta\gamma z_1$$

$$\Downarrow (\alpha\delta - \beta\gamma)(z_1 - z_2) = 0$$

$$\Downarrow z_1 - z_2 = 0. \text{ Altså er } z_1 = z_2 \text{ og } \phi \text{ er injektiv}$$

Surjektiv: lad $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha/\gamma\}$. Vi vil finde $w \in \mathbb{C} \setminus \{-\delta/\gamma\}$

$$\text{så } \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta} = z_0$$

Vi regner lidt:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta} &= z_0 \\ \Leftrightarrow \alpha w + \beta &= z_0(\gamma w + \delta) \\ \Leftrightarrow (\alpha - z_0 \gamma) w &= \delta z_0 - \beta \\ \Leftrightarrow w &= \frac{\delta z_0 - \beta}{-\gamma z_0 + \alpha} \end{aligned}$$

Bemærk at dobbeltimplikationerne er rigtige eftersom $z_0 \neq \frac{\alpha}{\gamma}$ og w defineret ved den nederste linie er $\neq -\frac{\delta}{\gamma}$ iflg bemærkningen på side 1 ang. veldefinerethed $\square$

Bemærk: Vi så i beviset at $\phi^{-1}(z) = \frac{\delta z - \beta}{-\gamma z + \alpha}$.

Da ϕ^{-1} er på samme form som ϕ er begge bijektive

og $\phi^{-1}(\phi(z)) = z$ $\phi^{-1}: \mathbb{C} \setminus \{\alpha/\gamma\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{-\delta/\gamma\}$

Vise: ϕ afbilder cirkler C_1 i cirkler C_2 hvis $-\frac{\delta}{\gamma} \notin C_1$

Bevis: Vi betragter cirklen C_1 med centrum i B og radius R
 Lad $z \in C_1$
 $R^2 = |z - B|^2 = (z - B)(\overline{z - B}) = z \cdot \overline{z} - \overline{B}z - B\overline{z} + B \cdot \overline{B} = *$

Vi lader for notationens skyld $w = \phi(z)$. Så er

$$z = \phi^{-1}(w) = \frac{\delta w - \beta}{-\gamma w + \alpha} \quad \text{hvis } z \neq -\frac{\delta}{\gamma}$$

$$* = \frac{(\delta w - \beta)(\overline{\delta w - \beta})}{(-\gamma w + \alpha)(-\overline{\gamma w + \alpha})} - \overline{B} \frac{(\delta w - \beta)}{(-\gamma w + \alpha)} - B \frac{(\overline{\delta w - \beta})}{(-\overline{\gamma w + \alpha})} + B \cdot \overline{B}$$

Vi ganger igennem med $(-\gamma w + \alpha)(-\bar{\gamma}\bar{w} + \bar{\alpha})$ og får

$$\begin{aligned} (-\gamma w + \alpha)(-\bar{\gamma}\bar{w} + \bar{\alpha})R^2 &= (\delta w - \beta)(\bar{\delta}\bar{w} - \bar{\beta}) - \bar{B}(\delta w - \beta)(-\bar{\gamma}\bar{w} + \bar{\alpha}) \\ &\quad - B(\bar{\delta}\bar{w} - \bar{\beta})(-\gamma w + \alpha) \\ &\quad + B\bar{B}(-\gamma w + \alpha)(-\bar{\gamma}\bar{w} + \bar{\alpha}) \end{aligned}$$

Vi reducerer og finder

$$\begin{aligned} &w\bar{w}(\gamma\bar{\gamma}R^2 - \delta\bar{\delta} - \bar{B}\delta\bar{\gamma} - B\bar{\delta}\gamma - B\bar{B}\gamma\bar{\gamma}) \\ &+ w(-\gamma\bar{\alpha}R^2 + \delta\bar{\beta} + \bar{B}\delta\bar{\alpha} + B\bar{\beta}\gamma + B\bar{B}\gamma\bar{\alpha}) \\ &+ \bar{w}(-\alpha\bar{\gamma}R^2 + \bar{\delta}\beta + \bar{B}\beta\bar{\gamma} + B\bar{\delta}\alpha + B\bar{B}\alpha\bar{\gamma}) \\ &+ (\alpha\bar{\alpha}R^2 - \beta\bar{\beta} - \bar{B}\beta\bar{\alpha} - B\bar{\beta}\alpha - B\bar{B}\alpha\bar{\alpha}) = 0 \end{aligned}$$

Vi har altså noget på formen

$$Mw\bar{w} + N\bar{w} + \bar{N}w + P = 0$$

$$\text{hvor } M, P \in \mathbb{R} \\ N \in \mathbb{C}$$

Bemærk at $\Rightarrow M=0$

$$\Leftrightarrow R^2 = \frac{\delta}{\gamma} \left(\frac{\bar{\delta}}{\bar{\gamma}} \right) + \bar{B} \cdot \frac{\delta}{\gamma} + B \left(\frac{\bar{\delta}}{\bar{\gamma}} \right) + B\bar{B} \quad (\text{husk at } \gamma\bar{\gamma} \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow R^2 = \left(\frac{-\delta}{\gamma} \right) \left(\frac{-\bar{\delta}}{\bar{\gamma}} \right) - \bar{B} \left(\frac{-\delta}{\gamma} \right) - B \left(\frac{-\bar{\delta}}{\bar{\gamma}} \right) + B\bar{B}$$

$$\Leftrightarrow R^2 = \left| \frac{-\delta}{\gamma} - B \right|^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\delta}{\gamma} \text{ ligger på cirklen } |z - B|^2 = R^2$$

$\forall i$ kan altså konkludere at $M \neq 0$ i det tilfælde vi betragte
 $\forall i$ kan derfor lave følgende bemærkning:

$$M \cdot w \bar{w} + N \bar{w} + \bar{N} w + P = 0$$

$$\Leftrightarrow w \bar{w} + \frac{N}{M} \bar{w} + \left(\frac{\bar{N}}{M}\right) w + \frac{P}{M} = 0$$

$$\Leftrightarrow w \bar{w} + \frac{N}{M} \bar{w} + \left(\frac{\bar{N}}{M}\right) w + \frac{N \cdot \bar{N}}{M \cdot M} = -\frac{P}{M} + \frac{N \cdot \bar{N}}{M^2}$$

$$\Leftrightarrow \left| w - -\frac{N}{M} \right|^2 = \frac{|N|^2}{M^2} - \frac{P}{M}$$

Dette er den tomme mængde hvis $\frac{|N|^2}{M^2} - \frac{P}{M} < 0$ og cirklen med centrum i $-\frac{N}{M}$ og radius $\sqrt{\frac{|N|^2}{M^2} - \frac{P}{M}}$ hvis $\frac{|N|^2}{M^2} - \frac{P}{M} \geq 0$. Da $w = \phi(z)$ ligger i mængden $\Leftrightarrow \frac{|N|^2}{M^2} - \frac{P}{M} \geq 0$. (Injektiviteten giver at $\frac{|N|^2}{M^2} - \frac{P}{M} > 0$)

$\forall i$ her nu vist at $\phi(C_1) \subseteq C_{-\frac{N}{M}}\left(\sqrt{\frac{|N|^2}{M^2} - \frac{P}{M}}\right)$ = cirklen med centrum i $-\frac{N}{M}$ og radius $\sqrt{\frac{|N|^2}{M^2} - \frac{P}{M}}$.

lad nu $w \in C_{-\frac{N}{M}}\left(\sqrt{\frac{|N|^2}{M^2} - \frac{P}{M}}\right)$ $\forall i$ kan så gå baglæns i alle udregningene (overvej!) og slutte at der eksisterer et $z \in C_1$ så $\phi(z) = w$. $\forall i$ her dermed vist at

$$\phi(C_1) = C_{-\frac{N}{M}}\left(\sqrt{\frac{|N|^2}{M^2} - \frac{P}{M}}\right).$$

□

Hvad sker der hvis $-\frac{\delta}{\gamma} \in C_1$?

Vores udregninger fra før er OK indtil vi dividerer med M
øverst på forrige side. Vi får istedet en ligning

$$N\bar{w} + \bar{N}w + P = 0$$

hvis $N = a + ib$

$$P = c + id$$

$w = x + iy$ er dette ligningen

$$\begin{aligned} 0 &= (a+ib)(x-iy) + (a-ib)(x+iy) + c + id \\ &= 2ax + 2by + c + id \end{aligned}$$

hvilket er en ret linie.

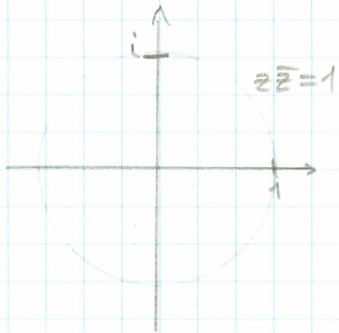
Komplex Funktionstheorie, TA nr. 1

Ex. 1.8

$$z \in \mathbb{C} \quad x, y \in \mathbb{R} : z = x + iy$$

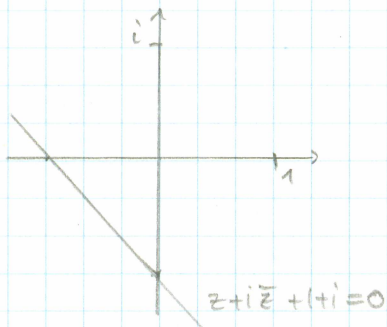
i)

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid x^2 + y^2 = 1\}$$



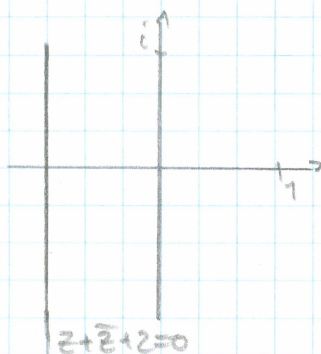
ii)

$$\begin{aligned} \{z \in \mathbb{C} \mid z + i\bar{z} + 1 + i = 0\} &= \{z \in \mathbb{C} \mid (x + iy + 1) + i(x - iy + 1) = 0\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} \mid y = -1 - x\} \end{aligned}$$



iii)

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z + \bar{z} + 2 = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 2x + 2 = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid x = -1\}$$



iv)

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z + \bar{z} + 2i = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 2x + 2i = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid x = -i\} = \emptyset$$

Ex. 1.14

Påstand: $(\cos \theta + i \sin \theta)^p = \cos p\theta + i \sin p\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$

Bevis:

Juf. s. 83 : gælder $(e^{i\theta})^p = e^{ip\theta}$

Eulers formel s. 85 (ii) giver

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^p = \cos p\theta + i \sin p\theta \quad \square$$

Ex. 1.15

$$z \in \mathbb{C} \quad r \in \mathbb{R}_+ \quad \theta \in \mathbb{R} : z = re^{i\theta} = r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Antag $w \in \mathbb{C}$ og opfylder $w^k = z$, $k \in \mathbb{N}$, dvs. w er en k 'te rod af z .

$$r = |z| = |w^k| = |w|^k \Rightarrow |w| = \sqrt[k]{r}$$

$$\arg(w^k) = \theta + 2\pi p, p \in \mathbb{Z} \xRightarrow{\text{Ex. 1.14}} k \cdot \arg w = \theta + 2\pi p, p \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow \arg w = \frac{\theta + 2\pi p}{k}, p \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Dvs. } w = \sqrt[k]{r} e^{i(\frac{\theta + 2\pi p}{k})} = \sqrt[k]{r} \cdot (\cos(\frac{\theta + 2\pi p}{k}) + i \sin(\frac{\theta + 2\pi p}{k}))$$

hvor $p = 0, 1, \dots, k-1$

Ex. 2.7

$$S \subseteq \mathbb{C}$$

$z, w \in S : z \sim w \iff$ der eksisterer en sti mellem z og w

$\forall z \in S : z \sim z$ (stien fra z til z er trivial)

$\forall z, w \in S : z \sim w \implies w \sim z$ (γ sti fra z til $w \xRightarrow{s.36} \neg \gamma$ sti fra w til z)

$\forall z, w, v \in S : z \sim w \wedge w \sim v \implies z \sim v$

(γ_1 sti fra z til w , γ_2 sti fra w til $v \xRightarrow{s.36} \gamma_1 + \gamma_2$ sti fra z til v)

Dvs. $\sim$ er refleksiv, symmetrisk og transitiv og dermed en ækvivalensrelation på S . Dermed giver $\sim$ (jvf. resultater fra algebra) anledning til en opsplitning af S i disjunkte ækvivalensklasser, kaldet komponenter.

Påstand: S åben ikke-tom $\implies S$ komponenter er åbne og kurvesmh.

Beweis:

Lad $z \in S$ (eksisterer da S ikke-tom) være vilk.

Det er klart at $[z]_{\sim}$ er kurvesammenhængende udfra definitionen på $\sim$.

Lad $w \in [z]_{\sim}$ være vilk.

$w \in S$ dvs. da S er åben $\exists r \in \mathbb{R}_+ : N_r(w) \subseteq S$

Lad $v \in N_r(w)$ da er $[w, v]$ (se s. 34) en sti fra w til v , dvs. $w \sim v$, men $z \sim w$ så da $\sim$ er transitiv gælder $z \sim v$ dvs. $v \in [z]_{\sim}$. Dermed $N_r(w) \subseteq [z]_{\sim}$. Da $w \in [z]_{\sim}$ var vilk. har vi dermed vist, at $[z]_{\sim}$ er åben.

Da z var valgt vilkårligt har vi dermed vist, at alle S 's komponenter er åbne og kurvesammenhængende, dvs. domæner.

□

Ex. 2.9

i)

Kurven er sammensat af følgende kurver

$$\gamma_1: [-R, R] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \in [-R, R]: \gamma_1(t) = t$$

$$\gamma_2: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \in [0, \pi]: \gamma_2(t) = Re^{it}$$

Sammensættes disse kurver f.eks.

$$\gamma: [-R, R+\pi] \quad t \in [-R, R): \gamma(t) = \gamma_1(t) \quad t \in [R, R+\pi]: \gamma(t) = \gamma_2(t-R)$$

ii)

Kurven er sammensat af følgende kurver ($0 < \epsilon < R$)

$$\gamma_1: [\epsilon, R] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \in [\epsilon, R]: \gamma_1(t) = t$$

$$\gamma_2: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \in [0, \pi]: \gamma_2(t) = Re^{it}$$

$$\gamma_3: [-R, -\epsilon] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \in [-R, -\epsilon]: \gamma_3(t) = t$$

$$\gamma_4: [-\pi, 0] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \in [-\pi, 0]: \gamma_4(t) = \epsilon e^{-it}$$

Sammensættes disse kurver f.eks.

$$\gamma: [\epsilon, 2R-\epsilon+2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \in [\epsilon, R): \gamma(t) = \gamma_1(t)$$

$$t \in [R, R+\pi): \gamma(t) = \gamma_2(t-R)$$

$$t \in [R+\pi, 2R-\epsilon+\pi): \gamma(t) = \gamma_3(t-2R-\pi)$$

$$t \in [2R-\epsilon+\pi, 2R-\epsilon+2\pi]: \gamma(t) = \gamma_4(t-2R+\epsilon-2\pi)$$

iii)

Kurven er sammensat af følgende kurver

$$\gamma_1: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}: \gamma_1(t) = x_1 - i y_1 + t i (y_2 + y_1), \quad t \in [0,1]$$

$$\gamma_2: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}: \gamma_2(t) = x_1 - t(x_1 + x_2) + i y_2, \quad t \in [0,1]$$

$$\gamma_3: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}: \gamma_3(t) = -x_2 + i y_2 - t i (y_2 + y_1), \quad t \in [0,1]$$

$$\gamma_4: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}: \gamma_4(t) = -x_2 + (x_1 + x_2)t - i y_1, \quad t \in [0,1]$$

Sammensætter disse kurver fås:

$$\gamma: [0,4] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \in [0,1]: \gamma(t) = \gamma_1(t)$$

$$t \in [1,2]: \gamma(t) = \gamma_2(t-1)$$

$$t \in [2,3]: \gamma(t) = \gamma_3(t-2)$$

$$t \in [3,4]: \gamma(t) = \gamma_4(t-3)$$

iv)

Kurven er sammensat af følgende kurver ($0 < \varepsilon < R$)

$$\gamma_1: [\varepsilon, R] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \in [\varepsilon, R] \quad \gamma_1(t) = t$$

$$\gamma_2: [0, \pi/4] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \in [0, \pi/4] \quad \gamma_2(t) = R e^{it}$$

$$\gamma_3: [0, R-\varepsilon] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \in [0, R-\varepsilon] \quad \gamma_3(t) = (R-t) e^{i\pi/4}$$

$$\gamma_4: [0, \pi/4] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \in [0, \pi/4] \quad \gamma_4(t) = \varepsilon e^{i(\pi/4-t)}$$

Sammensætter disse kurver fås:

$$\gamma: [\varepsilon, 2R-\varepsilon+\pi/2]$$

$$t \in [\varepsilon, R]: \gamma(t) = \gamma_1(t)$$

$$t \in [R, R+\pi/4]: \gamma(t) = \gamma_2(t-R)$$

$$t \in [R+\pi/4, 2R-\varepsilon+\pi/4]: \gamma(t) = (t-R-\pi/4)$$

$$t \in [2R-\varepsilon+\pi/4, 2R-\varepsilon+\pi/2]: \gamma(t) = (t-2R+\varepsilon-\pi/4)$$

v)

Kurven er sammensat af følgende kurver ($0 < \epsilon < R$)

$$\gamma_1: [\epsilon, R] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \in [\epsilon, R] \quad \gamma_1(t) = t$$

$$\gamma_2: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \in [0, 2\pi] \quad \gamma_2(t) = R e^{it}$$

$$\gamma_3: [0, R-\epsilon] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \in [0, R-\epsilon] \quad \gamma_3(t) = R-t$$

$$\gamma_4: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \in [0, 2\pi] \quad \gamma_4(t) = \epsilon e^{-it}$$

Sammensættes disse kurver fås...

$$\gamma: [\epsilon, 2R-\epsilon+4\pi] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \in [\epsilon, R) \quad \gamma(t) = \gamma_1(t)$$

$$t \in [R, R+2\pi) \quad \gamma(t) = \gamma_2(t-R)$$

$$t \in [R+2\pi, 2R-\epsilon+2\pi) \quad \gamma(t) = \gamma_3(t-R-2\pi)$$

$$t \in [2R-\epsilon+2\pi, 2R-\epsilon+4\pi] \quad \gamma(t) = \gamma_4(t-2R+\epsilon-2\pi)$$

vi)

Kurven er sammensat af følgende kurver ($0 < \epsilon < R$)

$$\gamma_1: [-R, -\epsilon] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \in [-R, -\epsilon] \quad \gamma_1(t) = t$$

$$\gamma_2: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \in [0, \pi] \quad \gamma_2(t) = \epsilon e^{i(\pi-t)}$$

$$\gamma_3: [\epsilon, R] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \in [\epsilon, R] \quad \gamma_3(t) = t$$

Sammensættes disse kurver fås...

$$\gamma: [-R, R-2\epsilon+\pi] \rightarrow \mathbb{C}$$

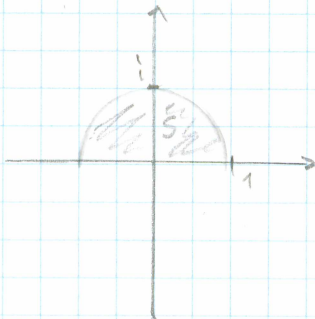
$$t \in [-R, -\epsilon) \quad \gamma(t) = \gamma_1(t)$$

$$t \in [-\epsilon, \pi-\epsilon) \quad \gamma(t) = \gamma_2(t+\epsilon)$$

$$t \in [\pi-\epsilon, R-2\epsilon+\pi] \quad \gamma(t) = \gamma_3(t-\pi+2\epsilon)$$

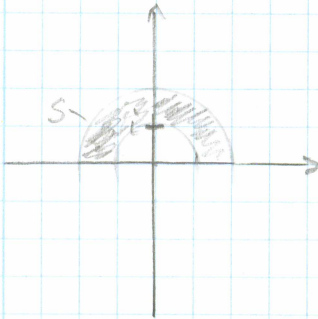
Ex. 2.11

i)



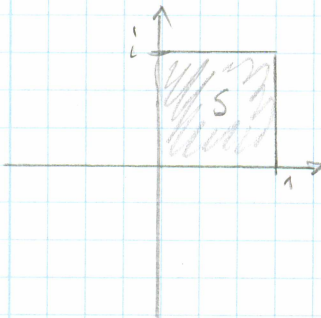
For beskrivelse af S vand
se Ex. 2.9 i - sæt $R=1$

ii)



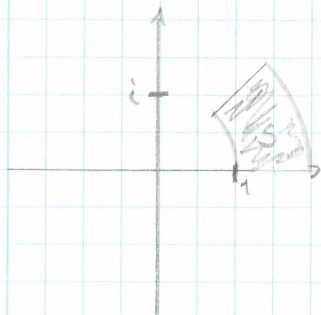
For beskrivelse af S vand
se Ex. 2.9 ii - sæt $\xi=1, R=2$

iii)



For beskrivelse af S vand
se Ex. 2.9 iii - sæt $x_1=1, x_2=0, y_1=0, y_2=1$

iv)



For beskrivelse af S vand
se Ex. 2.9 iv) - sæt $\xi=1, R=2$

Ex. 3.5

$$(u_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{C}, \exists u \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \quad \forall n \geq 1: v_n = \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{n}$$

Påstand: $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = u$

Beweis:

Lad $\varepsilon > 0$ være vilkårlig

$$\exists N \geq 1 \forall n \geq N: |u_n - u| < \varepsilon/2, \quad M := \max_{i=1, \dots, N} (|u_i - u|, \varepsilon/2)$$

$$\text{Valg } n \geq N^2: \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\varepsilon}{2M}, \text{ dvs. } \sqrt{n} \geq N \text{ og } \sqrt{n} \geq \frac{2M}{\varepsilon}$$

Da gælder

$$\begin{aligned} |v_n - u| &= \left| \sum_{i=1}^n \frac{u_i - u}{n} \right| \leq \left| \sum_{i \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{u_i - u}{n} \right| + \left| \sum_{\lfloor \sqrt{n} \rfloor < i \leq n} \frac{u_i - u}{n} \right| \\ &\leq \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n} M + \frac{n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n} \varepsilon/2 \leq \frac{M}{\sqrt{n}} + \varepsilon/2 \leq \varepsilon \end{aligned}$$

□

Ex. 3.7

$$\left| (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!^2 z^{n-1}} \right| / \left| (-1)^n \frac{1}{(n!)^2 z^n} \right|$$
$$= \left(\frac{n!}{(n-1)!} \right)^2 \cdot z = z \cdot n^2 \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty$$

Af ST s. 57_a følger, at

$\forall z \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \frac{z^n}{z^n}^*$ er konvergent, dvs.

$J_0 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \in \mathbb{C} \quad J_0(z) = *$ har konvergensradius $R = \infty$