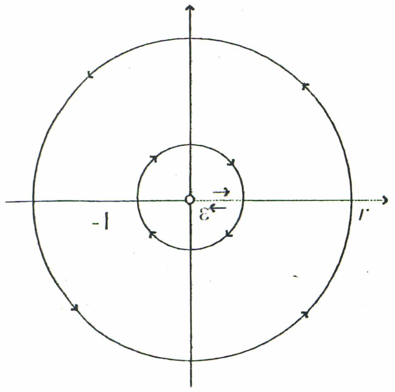


Vi har udledt (3) ret omhyggeligt. Mere øvede i kompleks integrationsteknik ville have omskrevet (3) straks ved at integrere $f(z)$ langs den på figuren til venstre viste vej.

Af (3) følger

(4) $$(1 - e^{-i\alpha 2\pi}) \int_\varepsilon^r \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} = 2\pi i\, e^{-i\alpha\pi} - I_1(r) + I_1(\varepsilon),$$

hvor

$$I_1(\rho) = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}}{\rho^\alpha\, e^{i\alpha t}(1+\rho\, e^{it})}\, dt, \qquad \rho > 0,\ \rho \neq 1.$$

Af vurderingen

$$|I_1(\rho)| \leq 2\pi \frac{\rho}{\rho^\alpha |1-\rho|}, \qquad \rho > 0,\ \rho \neq 1,$$

fremgår, at

$$\begin{aligned} &I_1(r) \to 0 \text{ for } r \to +\infty && (\text{da } \alpha > 0)\ , \\ &I_1(\varepsilon) \to 0 \text{ for } \varepsilon \to 0 && (\text{da } \alpha < 1). \end{aligned}$$

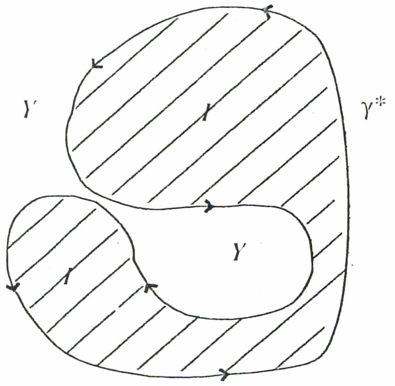
Lader vi altså i (4) $r \to +\infty$ og $\varepsilon \to 0$, ser vi for det første, at det uegentlige integral I er konvergent (hvad vi nu godt vidste i forvejen), og for det andet, at

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} = 2\pi i\, e^{-i\alpha\pi}(1 - e^{-i\alpha 2\pi})^{-1} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}.$$

16 Argumentprincippet. Åbenhed af en holomorf afbildning.

Betragt en lukket vej γ med den egenskab, at $\mathrm{Ind}(\gamma; z)$ er enten 0 eller 1 for alle $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Der gælder altså

$$\mathbb{C} = \gamma^* \cup I \cup Y,$$



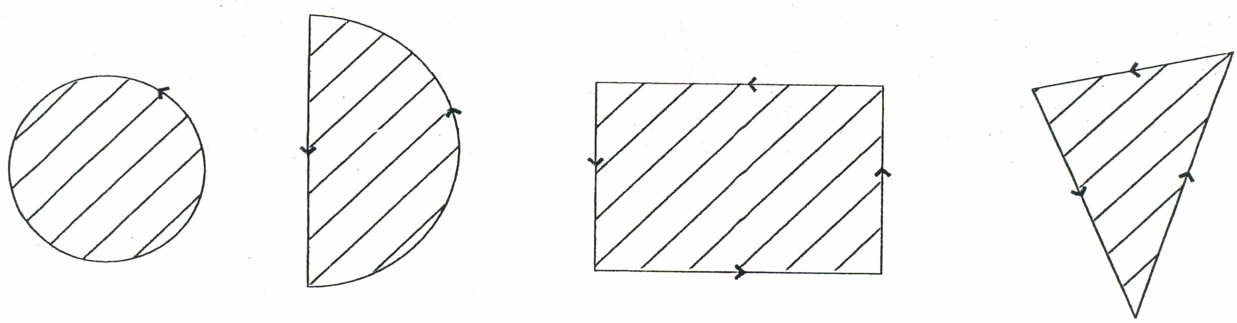
hvor

$$I = \{z \in \mathbb{C} - \gamma^* \mid \mathrm{Ind}(\gamma; z) = 1\},$$
$$Y = \{z \in \mathbb{C} - \gamma^* \mid \mathrm{Ind}(\gamma; z) = 0\}.$$

Vi vil kalde I og Y for henholdsvis det indre og det ydre for γ og vil tale om, at et punkt a ligger på γ, inden for γ eller uden for γ, alt efter som $a \in \gamma^*$, $a \in I$ eller $a \in Y$.

Forløber γ i et område Ω, er γ åbenbart homolog med 0 i Ω når og kun når det indre for γ er indeholdt i Ω.

Nedenfor er angivet simple eksempler på lukkede veje, der har den ovenfor omtalte egenskab.

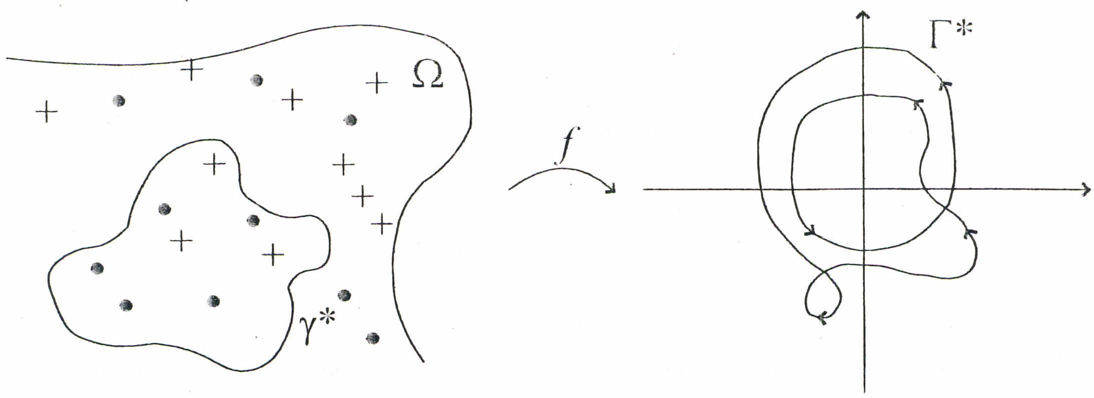


Sætning 16.1 *(Argumentprincippet).*
Lad Ω være et område og lad $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \Omega$ være en lukket vej i Ω, således at $\mathrm{Ind}(\gamma; z)$ er enten 0 eller 1 for alle $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ og således at det indre for γ er indeholdt i Ω.
Lad f være meromorf i Ω og uden nulpunkter eller poler på γ^*.
Lad $\Gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ være den lukkede vej defineret ved $\Gamma(t) = f(\gamma(t))$, $\alpha \le t \le \beta$.

Da gælder

(1) $$\mathrm{Ind}(\Gamma; 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P\,,$$

hvor N og P er henholdsvis antallet af nulpunkter og antallet af poler for f inden for γ. Hvert enkelt nulpunkt og pol skal tælles så ofte, som ordenen angiver.



Kommentar: γ^* forenet med det indre for γ er en kompakt delmængde af Ω. Der er derfor højst endeligt mange nulpunkter og poler for f inden for γ.

Bevis: Første halvdel af (1) er umiddelbar:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}(\Gamma;0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{f'(\gamma(t))\,\gamma'(t)}{f(\gamma(t))}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.\end{aligned}$$

Anden halvdel af (1) vises ved at anvende Residuesætningen på integralet $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f'(z)/f(z)dz$. Funktionen f'/f er holomorf i $\Omega\setminus(N_f\cup P_f)$, hvor N_f og P_f betegner henholdsvis nulpunktsmængden og polmængden for f. I et punkt $a\in N_f\cup P_f$ har f'/f en isoleret singularitet, som vi vil vise er en simpel pol.
a er altså et nulpunkt eller en pol for f. Vi betegner ordenen med $\operatorname{ord}(a)$ og sætter $k=\operatorname{ord}(a)$, hvis $a\in N_f$ og $k=-\operatorname{ord}(a)$, hvis $a\in P_f$.
Der findes en åben cirkelskive $D(a;\rho)\subseteqq\Omega$, således at

(2) $$f(z)=(z-a)^k g(z) \qquad z\in D'(a;\rho),$$

hvor g er holomorf og uden nulpunkter i $D'(a;\rho)$.

Af (2) følger

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{k}{z-a}+\frac{g'(z)}{g(z)}, \qquad z\in D'(a;\rho),$$

hvoraf fremgår, at a er en simpel pol for f, og at

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f};a\right)=\begin{cases}\operatorname{ord}(a) & \text{hvis } a\in N_f,\\ -\operatorname{ord}(a) & \text{hvis } a\in P_f.\end{cases}$$

Ifølge Residuesætningen har vi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{a\in N_f} \operatorname{ord}(a)\operatorname{Ind}(\gamma;a) - \sum_{a\in P_f} \operatorname{ord}(a)\operatorname{Ind}(\gamma;a) = N - P.$$

□

Sætning 16.2 *(Rouchés Sætning).*
Lad Ω være et område og lad $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \Omega$ være en lukket vej i Ω, således at $\operatorname{Ind}(\gamma;z)$ er enten 0 eller 1 for alle $z \in \mathbb{C} - \gamma^*$ og således at det indre for γ er indeholdt i Ω.
Lad f og g være holomorfe i Ω og lad

(3) $$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \qquad \text{for alle } z \in \gamma^*.$$

Så har f og g det samme (endelige) antal nulpunkter inden for γ. Hvert enkelt nulpunkt skal tælles så ofte, som ordenen angiver.

Bevis: Betragt de lukkede veje Γ_1 og Γ_2 definerede ved

$$\Gamma_1(t) = f(\gamma(t)), \qquad \alpha \le t \le \beta,$$
$$\Gamma_2(t) = g(\gamma(t)), \qquad \alpha \le t \le \beta.$$

Af (3) ses, at

$$|\Gamma_1(t) - \Gamma_2(t)| < |\Gamma_1(t)| \qquad \text{for } \alpha \le t \le \beta,$$

hvilket, ifølge Sætning 4.7, side 29 medfører

$$\operatorname{Ind}(\Gamma_1;0) = \operatorname{Ind}(\Gamma_2;0).$$

Rouchés Sætning følger nu umiddelbart af Argumentprincippet. □

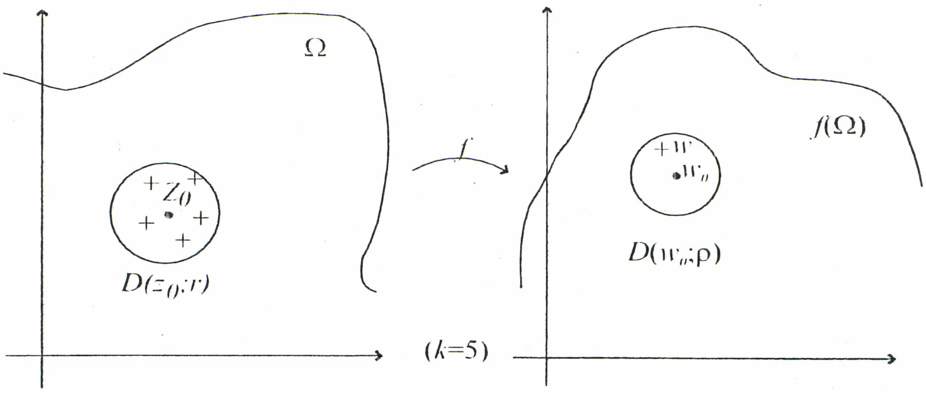
Lad os som eksempel på en anvendelse af Rouchés Sætning bevise Algebraens Fundamentalsætning nok en gang. Vi betragter et polynomium af grad $n \ge 1$:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n.$$

Hvis $R > 1$ og $R > |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|$, gælder der

$$|P(z) - z^n| < |z^n| \qquad \text{for } |z| = R.$$

Af Rouchés Sætning følger, at $P(z)$ har præcis n nulpunkter inden for cirklen $|z| = R$.



Sætning 16.3 *Lad f være holomorf, men ikke konstant i et område Ω. Lad $z_0 \in \Omega$ og $w_0 = f(z_0)$. Lad $k \geq 1$ være bestemt ved $f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0,\ f^{(k)}(z_0) \neq 0$.*
Der findes da åbne cirkelskiver $D(z_0; r) \subseteq \Omega$ og $D(w_0; \rho)$, således at der for ethvert $w \in D(w_0; \rho)$ gælder, at $f(z) - w$ har præcis k nulpunkter i $D(z_0; r)$. Hvis $w \in D'(w_0; \rho)$, er disse k nulpunkter simple og derfor forskellige.

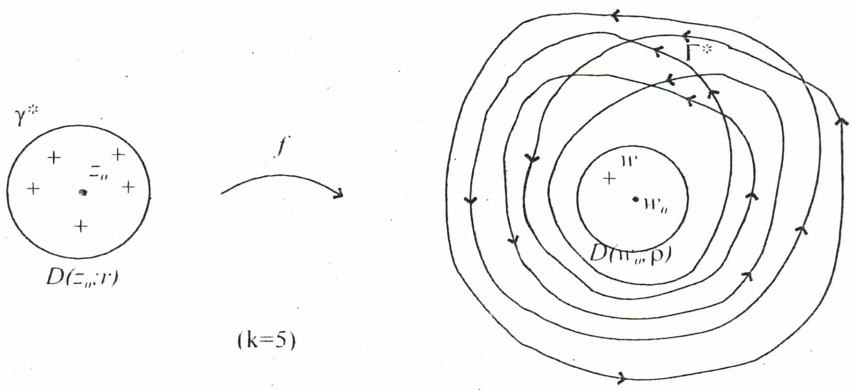
Cirkelskiven $D(w_0; \rho)$ er altså indeholdt i billedmængden $f(\Omega)$. Mere udførligt: Ethvert $w \in D'(w_0; \rho)$ er billede ved f af præcis k forskellige punkter i $D'(z_0; r)$; w_0 er billede ved f af z_0 og ikke billede af noget andet punkt i $D(z_0; r)$.

Sætning 16.3 vil blive skærpet i næste paragraf. (Sætning 17.1 og Sætning 17.3).

Bevis: Der findes en lukket cirkelskive $\bar{D}(z_0; r) \subset \Omega$, således at

(i)	$f(z) \neq w_0$	for alle $z \in \bar{D}(z_0; r) \setminus \{z_0\}$;
(ii)	$f'(z) \neq 0$	for alle $z \in D'(z_0; r)$.

Overvej dette. Lad γ være cirklen $|z - z_0| = r$ med positivt omløb og lad Γ være billedet ved f af γ. Ifølge (i) har vi $w_0 \notin \Gamma^*$, og der findes derfor en åben cirkelskive $D(w_0; \rho) \subset \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$.



Lad $w \in D(w_0;\rho)$. Ifølge Argumentprincippet og Sætning 4.8, side 29 har vi

$$\begin{aligned}&(\text{Antal nulpunkter for } f(z)-w \text{ indenfor } \gamma) = \\ &\qquad \mathrm{Ind}(\Gamma; w) = \mathrm{Ind}(\Gamma; w_0) = \\ &\qquad\qquad (\text{Antal nulpunkter for } f(z)-w_0 \text{ indenfor } \gamma) = k\end{aligned}$$

idet z_0 er et k-dobbelt nulpunkt for $f(z)-w_0$ og $f(z)-w_0$ ikke har andre nulpunkter inden for γ ifølge (i).

Hvis $w \in D'(w_0;\rho)$ og $a \in D(z_0;r)$ er et nulpunkt for $f(z)-w$, har vi $a \neq z_0$ og derfor ifølge (ii)

$$\left[\frac{d}{dz}(f(z)-w)\right]_{z=a} = f'(a) \neq 0\,;$$

a er altså et simpelt nulpunkt for $f(z)-w$.

□

Sætning 16.4 *Lad $f:\Omega \to \mathbb{C}$ være holomorf, men ikke konstant, i et område Ω. Der gælder da*

(I) *Billedmængden $f(\Omega)$ er et område;*

(II) *f er en åben afbildning, dvs.*

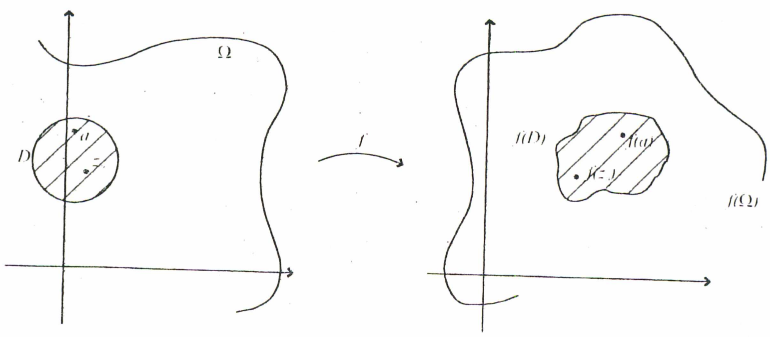
$$A \subseteqq \Omega,\ A \text{ åben} \Longrightarrow f(A) \text{ åben.}$$

Bevis for (I): Af Sætning 16.3 følger umiddelbart, at $f(\Omega)$ er en åben punktmængde, og da en kontinuert afbildning bevarer sammenhæng (vis dette), er $f(\Omega)$ sammenhængende. $f(\Omega)$ er altså et område.

Bevis for (II): Lad $w_0 \in f(A)$; $w_0 = f(z_0)$, $z_0 \in A$. Betragt en åben cirkelskive $D = D(z_0;\delta) \subseteqq A$. Ifølge (I) er $f(D)$ en åben punktmængde, og da $w_0 \in f(D) \subseteqq f(A)$, er w_0 et indre punkt i $f(A)$, der altså er åben.

□

Sætning 16.4 har som Korollar **maximumprincippet** (Sætning 8.3, side 58). Hvis nemlig f er holomorf, men ikke konstant i et område Ω, og hvis vi betragter en åben cirkelskive $D = D(z_0;\delta) \subseteqq \Omega$, så findes der, da $f(D)$ er åben, et punkt $a \in D$, således at $|f(a)| > |f(z_0)|$. $|f|$ kan altså ikke have et lokalt maximum i z_0.



Ganske analogt bevises, at der for $\mathrm{Re} f$ og $\mathrm{Im} f$ gælder såvel et maximumprincip som et minimumsprincip:

Sætning 16.5 *Hvis f er holomorf i et område Ω, og hvis $\mathrm{Re} f$ (eller $\mathrm{Im} f$) har et lokalt maksimum eller minimum i et punkt $z_0 \in \Omega$, så er f konstant i Ω.*

Sætning 16.5 kan også bevises ved at anvende maksimumprincippet (som formuleret side 58) på funktionerne $\exp(f(z))$, $\exp(-f(z))$, $\exp(-if(z))$ og $\exp(if(z))$.

Sætning 16.6 *Lad $f : \Omega \to \mathbb{C}$ være holomorf og injektiv i et område Ω. Der gælder da*

(a) *$f'(z) \neq 0$ for alle $z \in \Omega$;*

(b) *f^{-1} er holomorf i området $f(\Omega)$.*

Bevis for (a): Antag $f'(z_0) = 0$ i et punkt $z_0 \in \Omega$. Lad $w_0 = f(z_0)$ og lad k være bestemt som i Sætning 16.3. Så er $k \geq 2$. Vælg åbne cirkelskiver $D(z_0; r)$ og $D(w_0; \rho)$ som i Sætning 16.3. Ethvert punkt i $D'(w_0; \rho)$ er altså billede ved f af k forskellige punkter i $D'(z_0; r)$, hvoraf følger, at f ikke er injektiv.

Bevis for (b): Vi ved, at f er en åben afbildning, hvilket, da f er injektiv, er ensbetydende med, at f^{-1} er kontinuert i området $f(\Omega)$. Beviset for, at f^{-1} er holomorf i ethvert punkt $w_0 \in f(\Omega)$ forløber på sædvanlig vis:

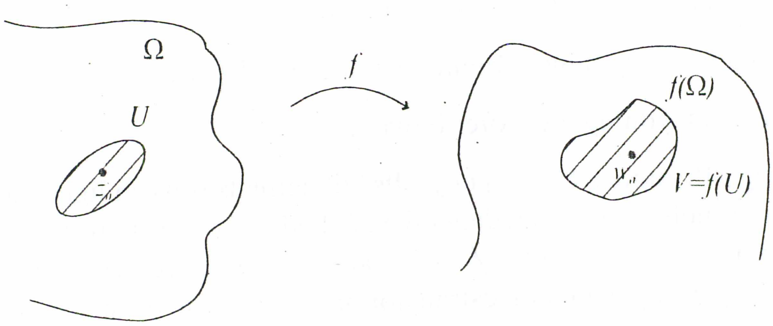
$$\frac{f^{-1}(w) - f^{-1}w_0}{w - w_0} = \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(w)) - f(f^{-1}(w_0))}{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}} \longrightarrow \frac{1}{f'(z_0)} \quad \text{for } w \to w_0,$$

hvor $z_0 = f^{-1}(w_0)$. Vi ser, at $(f^{-1})'w_0 = \frac{1}{f'(z_0)}$. □

Bemærk, at vi ikke af $f'(z) \neq 0$ for alle $z \in \Omega$ kan slutte, af f er injektiv i Ω. Eksponentialfunktionen er et modeksempel herpå. Giv andre modeksempler.

17 Lokal opførsel af en holomorf funktion.

Vi vil undersøge, hvorledes en funktion f, der er holomorf, men ikke konstant, i et område Ω, opfører sig i en passende lille omegn til et punkt $z_0 \in \Omega$.



Ved en omegn til $z \in \Omega$ forstår vi i denne paragraf et område $U \subseteq \Omega$, således at $z_0 \in U$. Ifølge Sætning 16.4 er så $V = f(U)$ en omegn til $w_0 = f(z_0) \in f(\Omega)$.

For at få en fornemmelse af de resultater, vi kan forvente, betragter vi potensrækkefremstillingen af f:

(1)
$$f(z) = w_0 + a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \cdots ,$$

der gælder i enhver åben cirkelskive $D(z_0; \delta) \subseteq \Omega$.

Her er $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$, og $k \geq 1$ er bestemt ved $f'(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0, \; f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Af (1) følger, at f kan fremstilles på formen

(2)
$$f(z) = w_0 + a_k(z - z_0)^k + \varepsilon(z)(z - z_0)^k, \qquad z \in \Omega,$$

hvor $\varepsilon(z) \to 0$ for $z \to z_0$. (Faktisk er $\varepsilon(z)$ holomorf i Ω og $\varepsilon(z_0) = 0$)

Når z ligger tæt ved z_0, er leddet $\varepsilon(z)(z - z_0)^k$ forsvindende lille i forhold til leddet $a_k(z - z_0)^k$. I en tilstrækkelig lille omegn U til z_0 er $f(z)$ altså approksimeret med funktionen

(3)
$$\varphi(z) = w_0 + a_k(z - z_0)^k, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Vi kan følgelig forvente, at f i en tilstrækkelig lille omegn til z_0 opfører sig som den elementære funktion φ, og vi vil nu nærmere gøre rede for, at det virkelig forholder sig således.

Vi betragter først **Tilfældet $f'(z_0) \neq 0$.**

(2) og (3) antager så formerne

(2') $$f(z) = w_0 + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z)(z - z_0), \qquad z \in \Omega\,;$$
(3') $$\varphi(z) = w_0 + f'(z_0)(z - z_0), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Afbildningen $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ er en ligedannethedstransformation. Mere udførligt er φ sammensat af følgende fire afbildninger:

1) en parallelforskydning, der fører z_0 over i 0,

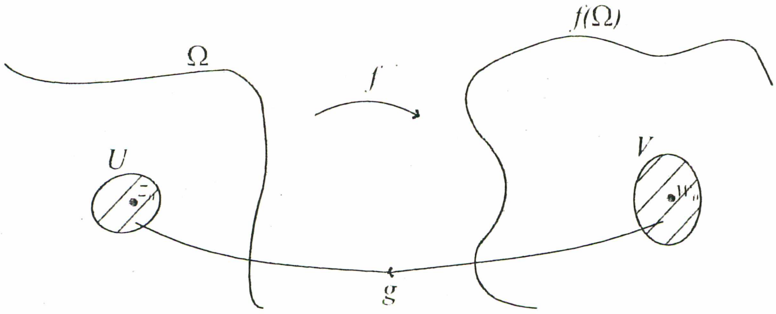
2) en multiplikation ud fra 0 med konstanten $|f'(z_0)|$,

3) en drejning omkring 0 med drejningsvinkel $\arg f'(z_0)$,

4) en parallelforskydning, der fører 0 over i w_0.

I en tilstrækkelig lille omegn U til z_0 er f altså tilnærmelsesvis en ligedannethedstransformation, og $f(U)$ er tilnærmelsesvis et ligedannethedsbillede af U. Vi udtrykker ofte dette ved at sige, at f er **konform i z_0**. Hvis $f'(z) \neq 0$ for alle $z \in \Omega$, siger vi, at f er **konform i Ω**. At f tilnærmelsesvis er en ligedannethedstransformation i U får os specielt til at forvente, at f er injektiv i U og at f er vinkeltro i z_0. Lad os bevise disse to ting.

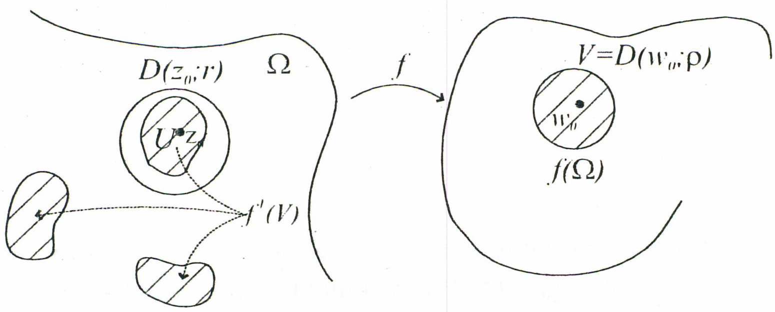
Sætning 17.1 *Lad f være holomorf i et område Ω. Lad $z_0 \in \Omega$ og $f'(z_0) \neq 0$. Der findes da omegne U og V til henholdsvis z_0 og $w_0 = f(z_0)$, således at f er en bijektion af U på V.*



Kommentarer: Den omvendte afbildning $g\colon V \to U$ bestemt ved $g(f(z)) = z$ for alle $z \in U$ er så holomorf i V, jævnfør Sætning 16.6. Hvis vi har lyst til det, kan vi åbenbart vælge U eller V (men almindeligvis ikke både U og V) som en åben cirkelskive.

Bevis: Vælg åbne cirkelskiver $D(z_0; r)$ og $D(w_0; \rho)$ som i Sætning 16.3. Da $k = 1$ er ethvert punkt $w \in D(w_0; \rho)$ altså billede ved f af præcis ét punkt i $D(z_0; r)$.

Lad $V = D(w_0; \rho)$ og $U = D(z_0; \rho) \cap f^{-1}(V)$. Så har vi $z_0 \in U \subsetneqq \Omega$ og $w_0 \in V \subsetneqq f(\Omega)$, og f er en bijektion af U på V. At U er en omegn til z_0, altså at U er et område, følger af, at f er såvel kontinuert som åben og derfor en homeomorfi af U på den åbne cirkelskive V. □

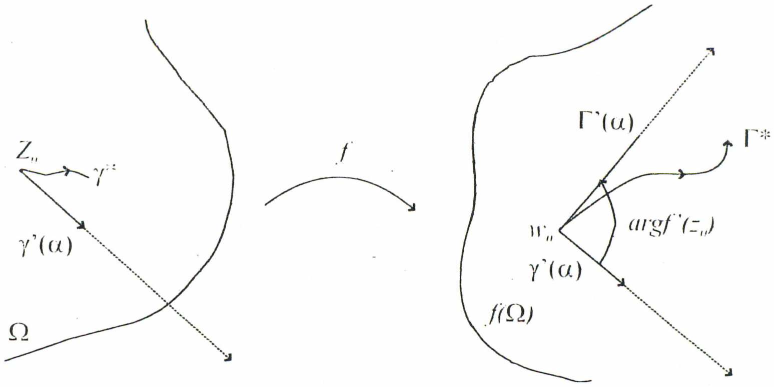


Sætning 17.2 *Lad f være holomorf i et område Ω. Lad $z_0 \in \Omega$ og $f'(z_0) \neq 0$. Så er f vinkeltro i z_0. (Det vil fremgå af det følgende, hvad vi mener dermed).*

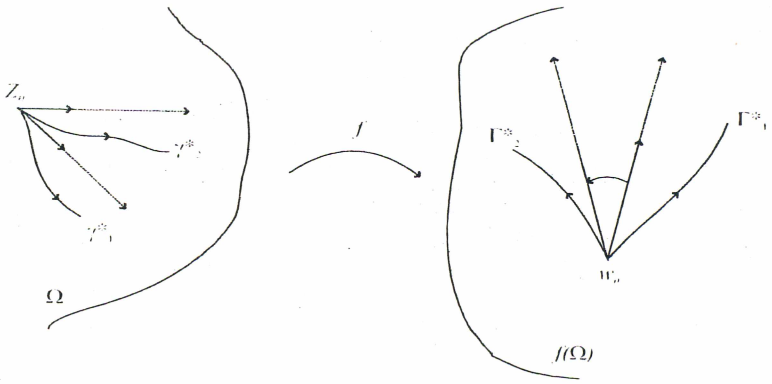
Bevis: Lad $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \Omega$ være en vej i Ω med begyndelsespunkt i z_0 (altså $\gamma(\alpha) = z_0$) og antag $\gamma'(\alpha) \neq 0$. Så har γ en halvtangent i z_0, bestemt ved det komplekse tal $\gamma'(\alpha)$, opfattet som vektor afsat ud fra z_0.
Billedet ved f af γ er en vej Γ i $f(\Omega)$ med begyndelsespunkt i $w_0 = f(z_0)$, og af

(4) $$\Gamma'(\alpha) = f'(z_0)\gamma'(\alpha) \neq 0$$

fremgår, at Γ har en halvtangent i w_0, bestemt ved det komplekse tal $\Gamma'(\alpha)$, opfattet som vektor afsat ud fra w_0.



Af (4) følger $\arg \Gamma'(\alpha) = \arg \gamma'(\alpha) + \arg f'(z_0)$, hvilket viser, at halvtangenten for Γ i w_0 fremkommer ved at dreje halvtangenterne for γ i z_0 vinklen $\arg f'(z_0)$.



Da vinklen $\arg f'(z_0)$ er uafhængig af γ, følger det, at hvis γ_1 og γ_2 er to veje i Ω, begge med begyndelsespunkt i z_0 og begge med halvtangent i z_0, så føres de ved f over i to veje Γ_1 og Γ_2 i $f(\Omega)$, begge med begyndelsespunkt i w_0 og begge med halvtangent i w_0, og vinklen fra γ_1 til γ_2 (regnet med fortegn) er lig med vinklen fra Γ_1 til Γ_2 (også regnet med fortegn). Her forstår vi ved vinklen fra γ_1 til γ_2 vinklen fra halvtangenten for γ_1 i z_0 til halvtangenten for γ_2 i z_0; analogt for vinklen fra Γ_1 til Γ_2.

□

Specielt vil to veje i Ω, der tangerer hinanden (eller er ortogonale) i z_0, ved f føres over i to veje, der tangerer hinanden (henholdsvis er ortogonale) i w_0.

Vi betragter dernæst **Tilfældet $f'(z_0) = 0$.**

Lad os for simpelheds skyld antage $z_0 = w_0 = 0$. Det er ikke nogen væsentlig indskrænkning at gøre denne antagelse, idet det generelle tilfælde ved to parallelforskydninger let reduceres til tilfældet $z_0 = w_0 = 0$.

(2) og (3) antager så formerne

(2") $\qquad f(z) = a_k z^k + \varepsilon(z) z^k, \qquad z \in \Omega,$

(3") $\qquad \varphi(z) = a_k z^k, \qquad z \in \mathbb{C}.$

hvor $a_k \neq 0$ og $k \geq 2$.

Lad b være en af værdierne af $\sqrt[k]{a_k}$. Vi har da

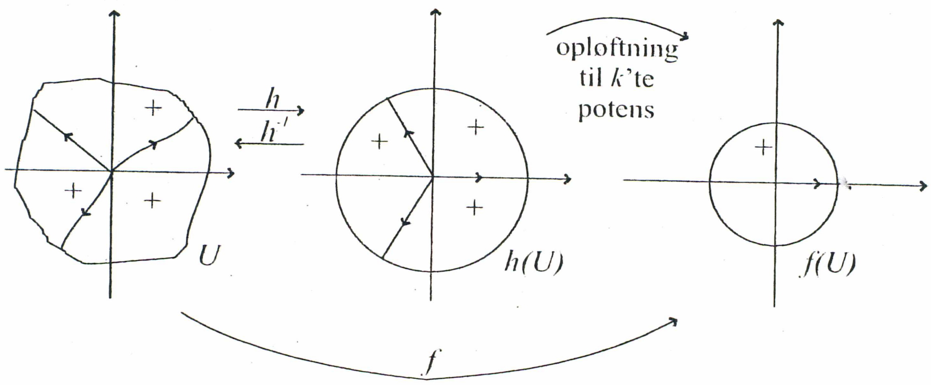
$$\varphi(z) = (bz)^k, \qquad z \in \mathbb{C},$$

hvoraf fremgår, at φ er en ligedannethedstransformation efterfulgt af en opløftning til k'te potens. Vi kan forvente, at f i en tilstrækkelig lille omegn til z_0 tilnærmelsesvis er af samme natur som φ, altså at der gælder følgende Sætning:

Sætning 17.3 *Lad f være holomorf, men ikke konstant, i et område Ω, der indeholder 0. Lad $f(0) = 0$. Lad $k \geq 1$ være bestemt ved $f'(0) = \cdots = f^{(k-1)}(0) = 0$, $f^{(k)}(0) \neq 0$. Der findes da en omegn U til 0, således at*

$$f(z) = (h(z))^k, \qquad z \in U,$$

hvor h er holomorf og injektiv i U.



Kommentarer: Vi kan åbenbart vælge U, så $h(U)$ og dermed $f(U)$ er en åben cirkelskive med centrum i 0. Det er gjort på ovenstående figur, der svarer til $k = 3$. For $k > 1$ er f ikke vinkeltro i 0. Gør rede for, hvad der sker med en vinkel med toppunkt i 0.

Bevis: Da 0 er et nulpunkt af k'te orden for f, har vi

$$f(z) = z^k f_1(z), \qquad z \in \Omega,$$

hvor f_1 er holomorf i Ω og $f_1(0) \neq 0$.

Lad $D(0;\delta) \subseteqq \Omega$ være en åben cirkelskive, således at $f_1(z) \neq 0$ for alle $z \in D(0;\delta)$. Så findes der en holomorf $\sqrt[k]{f_1(z)}$ i $D(0;\delta)$. Lad f_2 være en sådan. f_2 er altså holomorf i $D(0;\delta)$, og $f_1(z) = (f_2(z))^k$ for alle $z \in D(0;\delta)$.

Vi sætter $h(z) = zf_2(z),\ z \in D(0;\delta)$. Vi har så

$$f(z) = (h(z))^k, \qquad z \in D(0;\delta).$$

Af $h'(0) = f_2(0) \neq 0$ (fordi $f_1(0) \neq 0$) følger, at der findes en omegn U til 0, $U \subseteqq D(0;\delta)$, således at h er injektiv i U. Hermed er Sætning 17.3 bevist.

□

Opgaver

Opgave 66.
Find polerne og de tilsvarende residuer for den i $\mathbb{C}$ meromorfe funktion $f(z) = \exp z/(z^3 - z)$.

Opgave 67.
Find polerne og de tilsvarende residuer for den i $\mathbb{C}$ meromorfe funktion $f(z) = \sinh z/(\sin z)^2$.

Opgave 68.
Vis, at hvis f har en isoleret singularitet i et punkt z_0, så er $\operatorname{Res}(f'; z_0) = 0$.
Vis, at der for $n = 0, 1, 2, \dots$ gælder

$$(\cot z)^n = -\frac{1}{n+1}\frac{d}{dz}\left[(\cot z)^{n+1}\right] - (\cot z)^{n+2}$$

og udnyt dette til at bestemme $\operatorname{Res}((\cot z)^n; 0)$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Opgave 69.
Betragt for ethvert $R > 0$ den lukkede polygonvej $\gamma(R) = [-Ri,\ \pi - Ri,\ \pi + Ri,\ Ri,\ -Ri]$.
Lad n være et positivt helt tal.
Gør rede for, at

$$\operatorname{Res}\left((\tan z)^n; \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(R)} (\tan z)^n dz,$$

og udnyt dette til at bestemme $\operatorname{Res}\left((\tan z)^n; \frac{\pi}{2}\right)$.

Opgave 70.
Lad f, g og h være holomorfe i et område, der indeholder punktet z_0.

1. Idet det antages, at z_0 er et nulpunkt af anden orden for g, skal man vise, at

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}; z_0\right) = \frac{6f'(z_0)g''(z_0) - 2f(z_0)g'''(z_0)}{3(g''(z_0))^2}.$$

2. Idet det antages, at z_0 er et nulpunkt af første orden for h, skal man vise, at

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{h^2}; z_0\right) = \frac{f'(z_0)h'(z_0) - f(z_0)h''(z_0)}{(h'(z_0))^3}.$$

Opgave 71.
Vis, at

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}, \qquad a \in \mathbb{R},\ a > 1;$$

Opgave 72.
Vis, at

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n\,t}{1-2a\cos t + a^2}dt = \begin{cases} \frac{\pi\, a^n}{1-a^2} & a \in \mathbb{C},\ |a| < 1, \\ \frac{\pi}{a^n(a^2-1)} & a \in \mathbb{C},\ |a| > 1. \end{cases}$$

(n er et positivt helt tal).
Opgaven kan løses ved metoden i Eksempel 1, side 88.
Regningerne bliver simplere, hvis man udnytter, at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{i \sin n\,t}{1-2a\cos t + a^2}dt = 0,$$

idet integranten er en ulige funktion.

Opgave 73.
Find værdierne af integralerne

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx; \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx; \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4}\,dx.$$

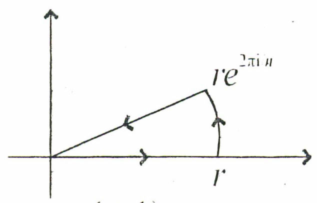
Opgave 74.
Find værdien af integralet

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\,dx\,, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Vejledning: For $t \geq 0$ kan vejen i Eksempel 2, side 89, benyttes.
Vis, at

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2e}.$$

Opgave 75.

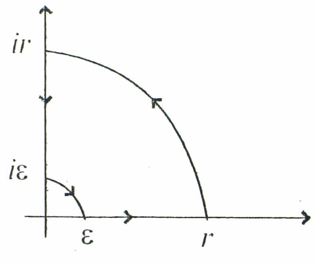


$(r>1)$

Vis ved hjælp af vejen på figuren til venstre, at

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Opgave 76.



$(0<\varepsilon<1<r)$

Integrer funktionen $\operatorname{Log} z/(1+z^4)$ langs vejen på hosstående figur og vis derved, at

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{1+x^4}\,dx = -\frac{1}{16}\pi^2\sqrt{2}\,;$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\pi\sqrt{2}.$$

Opgave 77.
Lad a være et reelt tal, $0<a<1$.
Integrer funktionen

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$$

langs den lukkede polygonvej γ: $[-r, r, r+2\pi i, -r+2\pi i, -r]$, $r>0$, og vis derved, at

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Benyt dette resultat til at bestemme værdien af integralet i Eksempel 3, side 91.

Opgave 78.
Integrer funktionen $e^{iz}/\cosh z$ langs den lukkede polygonvej $[-r, r, r+\pi i, -r+\pi i, -r]$, $r>0$, og find derved integralet

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\cosh x}\,dx.$$

Opgave 79.
Lad $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 0\}$ og lad $\log z$ være den i Eksempel 3, side 91 betragtede determination af logaritmen i Ω. Integrer funktionen $(\log z)^2/(1+z)^3$ langs vejen i Eksempel 3, og vis derved, at

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{(1+x)^3}\,dx = -\frac{1}{2}.$$

Opgave 80.
Integrer funktionen $\operatorname{Log} z/z^2-1$ langs vejen i Opgave 76 og vis derved, at

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

Opgave 81.
Lad $a \in \mathbb{C}$, $|a| > e$, $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$.
Vis, at funktionen

$$f(z) = e^z - az^n, \qquad z \in \mathbb{C},$$

hvor præcis n forskellige nulpunkter i $D(0;1)$.

Opgave 82.
Lad $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Vis, at funktionen

$$f(z) = a - z - e^{-z}\,, \qquad z \in \mathbb{C},$$

har præcis ét nulpunkt i halvplanen $\mathrm{Re}z \geq 0$, og at dette nulpunkt er reelt.

Opgave 83.
Lad f være holomorf i et område, der indeholder den lukkede cirkelskive $\overline{D}(0;1)$. Antag, at $|f(z)| > 1$ for $|z| = 1$ og at $f(0) = 1$. Vis, at $f(z)$ har mindst ét nulpunkt i $D(0;1)$.

Opgave 84.
Bestem ved hjælp af Rouchés Sætning antallet af nulpunkter (hvert nulpunkt talt så mange gange, som ordenen angiver) for polynomiet

$$z^7 - 5z^4 + z^2 - 2$$

i ringområdet $\{z \in \mathbb{C} \,|\, 1 < |z| < 2\}$.

Opgave 85.
Lad f være holomorf og injektiv i $D(0;1)$. Lad $f(0) = 0$. Gør rede for, at der findes en funktion g, der er holomorf i $D(0;1)$ således at

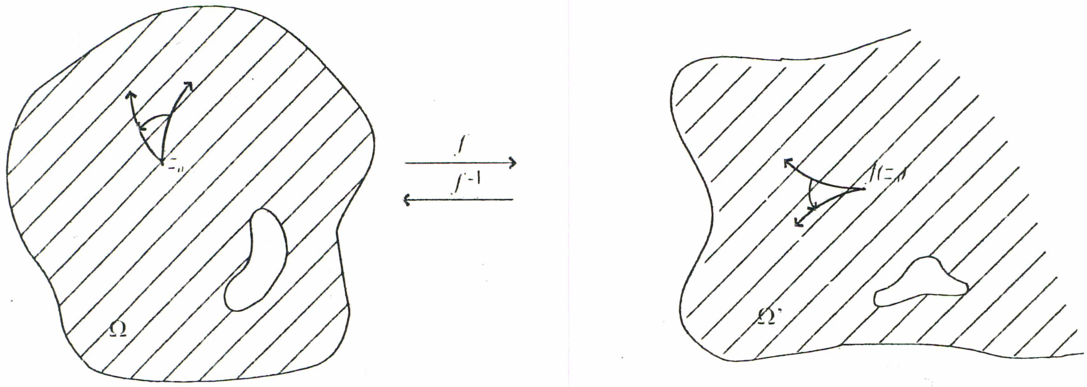
$$(g(z))^2 = f(z^2) \qquad \text{for alle } z \in D(0;1).$$

Vis, at g også er injektiv i $D(0;1)$.

Opgave 86.
Lad $f : \overline{D}(0;1) \to D(0;1)$ være holomorf i $D(0;1)$ og kontinuert i $\overline{D}(0;1)$. Vis, at f har præcis ét fixpunkt.

18 Isomorfe områder. Riemann–flade.

To områder Ω og Ω' i den komplekse plan siges at være **konformt ækvivalente** eller **isomorfe,** såfremt der findes en bijektiv, holomorf afbildning $f : \Omega \to \Omega'$, og i så fald siges f at være en **isomorfi af Ω på Ω'**.



Hvis f er en isomorfi af området Ω på området Ω', så er $f'(z) \neq 0$ for alle $z \in \Omega$, (Sætning 16.6), og f er altså en **konform afbildning** af Ω på Ω'. Specielt er f **vinkeltro** i ethvert punkt $z_0 \in \Omega$. Den omvendte afbildning f^{-1} er en isomorfi af Ω' på Ω, (Sætning 16.6). Isomorfe områder er klart homeomorfe og har derfor samme topologiske natur. Hvis f.eks. det ene af de to isomorfe områder er enkeltsammenhængende, må det andet også være det.

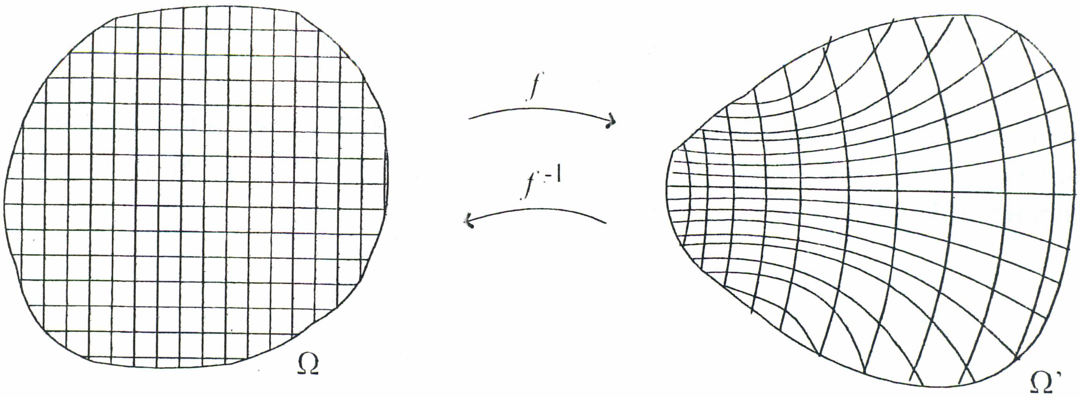
Det gælder ikke altid omvendt, at homeomorfe områder er isomorfe. Et særligt simpelt modeksempel er hele planen og en åben cirkelskive, idet der gælder

Sætning 18.1 *Områderne $\mathbb{C}$ og $D(0;1)$ er homeomorfe, men ikke isomorfe.*

Bevis: Funktionen $\varphi(z) = \frac{z}{1+|z|}$, $z \in \mathbb{C}$, er en homeomorfi af $\mathbb{C}$ på $D(0;1)$.
Hvis f er en isomorfi af $\mathbb{C}$ på $D(0;1)$, så er f holomorf og begrænset i $\mathbb{C}$ og derfor ifølge Liouvilles Sætning konstant i $\mathbb{C}$, hvilket er en modstrid. $\square$

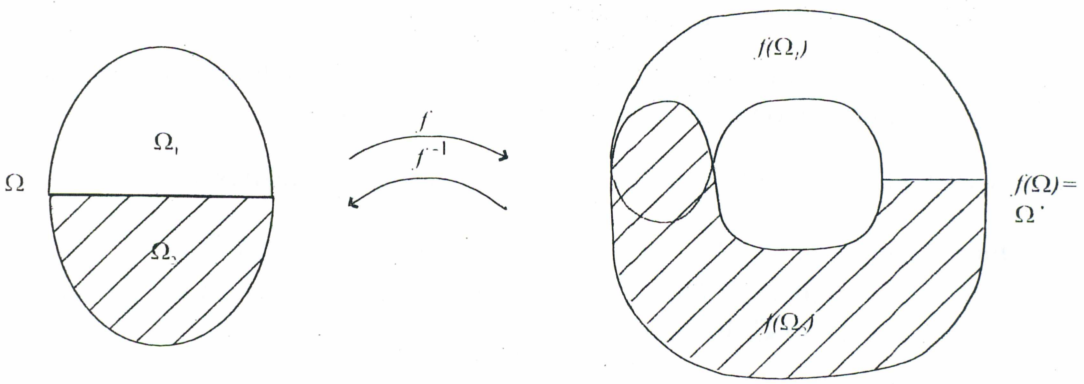
Hvis f er en isomorfi af området Ω på området Ω', og vi ønsker at studere afbildningen f nøjere, kan vi gøre det ved at betragte to systemer af pæne kurver i Ω (linier, cirkelbuer, ellipsebuer, etc.) således beskafne, at der gennem ethvert punkt i Ω går én og kun én kurve fra hvert af systemerne, og disse to kurver skærer hinanden under en ret vinkel. Et sådant par af kurvesystemer i Ω vil vi kort kalde **to ortogonale kurvesystemer i Ω**. Eksempelvis er et kvadratnet i Ω del af to ortogonale kurvesystemer i Ω. (Se figur næste side).

Da f er vinkeltro og bijektiv, vil billedet af to ortogonale kurvesystemer i Ω være to ortogonale kurvesystemer i Ω' og ved at bestemme disse opnår vi normalt et udmærket overblik over afbildningen f.
Hvilket par ortogonale kurvesystmer i Ω, det er mest hensigtsmæssigt at vælge afhænger af Ω og



f. I de følgende paragraffer og opgaver vil vi træffe eksempler på isomorfe områder, isomorfier og korresponderende par af ortogonale kurvesystemer.

Hvis $f : \Omega \to \mathbb{C}$ er en holomorf, men ikke injektiv, afbildning, er f^{-1} en flertydig funktion i Ω' til Ω. Man kan komme ud over denne flertydighed og skaffe sig et bedre overblik over f og f^{-1} ved at indføre Riemann–fladen for f^{-1}. Lad os antyde ideen bag dette begreb ved at betragte situationen skitseret på følgende figur.

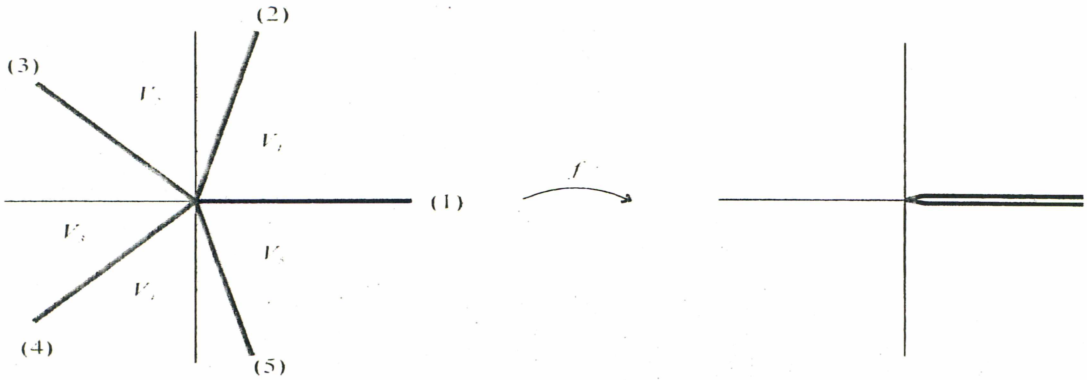


Vi tænker os, at f er injektiv i Ω_1 og Ω_2, men at $f(\Omega_1)$ og $f(\Omega_2)$ overlapper hinanden. **Riemann–fladen for f^{-1}** fremkommer nu ved, at vi forestiller os $f(\Omega)$ som en flade $\mathcal{F}$, der delvis overdækker sig selv. Over ethvert punkt i $f(\Omega_1) \cap f(\Omega_2)$ ligger der altså to punkter på fladen $\mathcal{F}$, et i hvert "blad" af $\mathcal{F}$. Så kan f opfattes som en bijektion af Ω på fladen $\mathcal{F}$, og f^{-1}, der er flertydig i Ω', bliver entydig på $\mathcal{F}$.

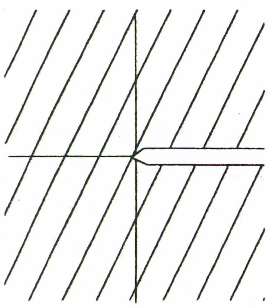
I de næste paragraffer vil vi skitsere Riemann–fladen for de flertydige funktioner $\sqrt[n]{z}$, $\log z$ og $\arcsin z$.

19 Riemann–fladen for $\sqrt[n]{}$.

Lad os behandle tilfældet $n = 5$.
Vi betragter altså afbildningen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bestemt ved $f(z) = z^5$, $z \in \mathbb{C}$. Vi forudsætter, at læseren er fortrolig med denne afbildning.
Den omvendte relation $f^{-1} = \sqrt[5]{}$ er en flertydig funktion i $\mathbb{C}$ (5-tydig i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, for at være præcis). Vi vil, uden at gøre forsøg på at være stringente, konstruere Riemann–fladen for $\sqrt[5]{}$.
Hertil betragter vi de fem halvlinier, som ved f føres over i halvlinien $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, og de fem vinkelrum, der bestemmes ved disse halvlinier. Vi betegner vinkelrummene med V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 og nummererer halvlinierne som vist på figuren.

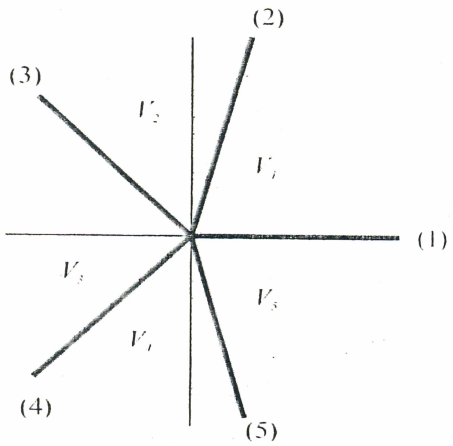


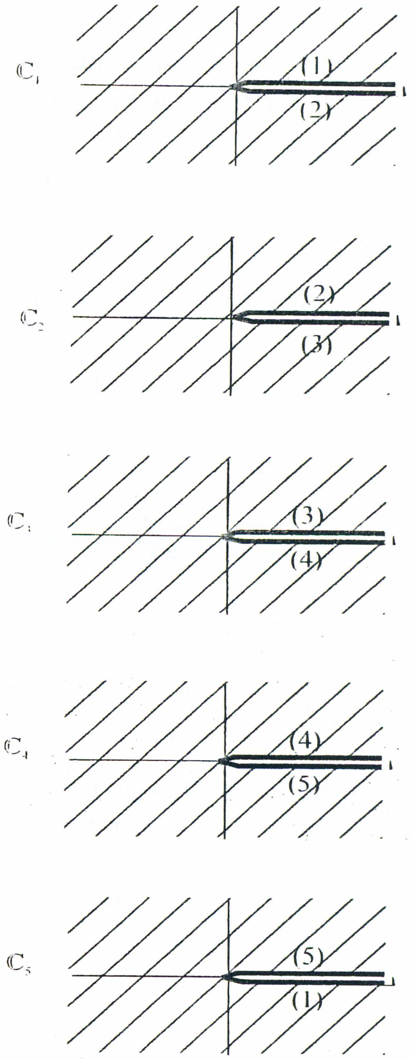
Vinkelrummene skal opfattes som lukkede punktmængder. De to begrænsende halvlinier regnes altså med til et vinkelrum og hver af de fem halvlinier hører på den måde med til to af vinkelrummene.
Som bekendt er f en isomorfi af hvert enkelt af de tilsvarende åbne vinkelrum på området $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.



Lad os opskære den komplekse plan langs halvlinien $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ og tænke os snittet forsynet med to rande som antydet på figuren til venstre.

Lad $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \mathbb{C}_3, \mathbb{C}_4, \mathbb{C}_5$ være fem eksemplarer af den således opskårne komplekse plan.





For ethvert $j = 1, 2, 3, 4, 5$ kan restriktionen af f til vinkelrummet V_j opfattes som en bijektion af V_j på $\mathbb{C}_j$. Randtilordningerne er angivet på figuren (med numre). **Riemann–fladen for $\sqrt[5]{\ }$** fremkommer nu ved, at vi forestiller os de fem komplekse planer $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \mathbb{C}_3, \mathbb{C}_4, \mathbb{C}_5$ stablet ovenpå hinanden og snitrandene klæbet sammen to og to i overensstemmelse med nummereringen. Vi klæber altså den nederste snitrand i $\mathbb{C}_1$ sammen med den øverste snitrand i $\mathbb{C}_2$, og så videre. Derved forekommer en flade $\mathcal{F}$, som vi beskriver som en **fembladet** Riemann–flade med ét forgreningspunkt i 0 **af femte orden**.

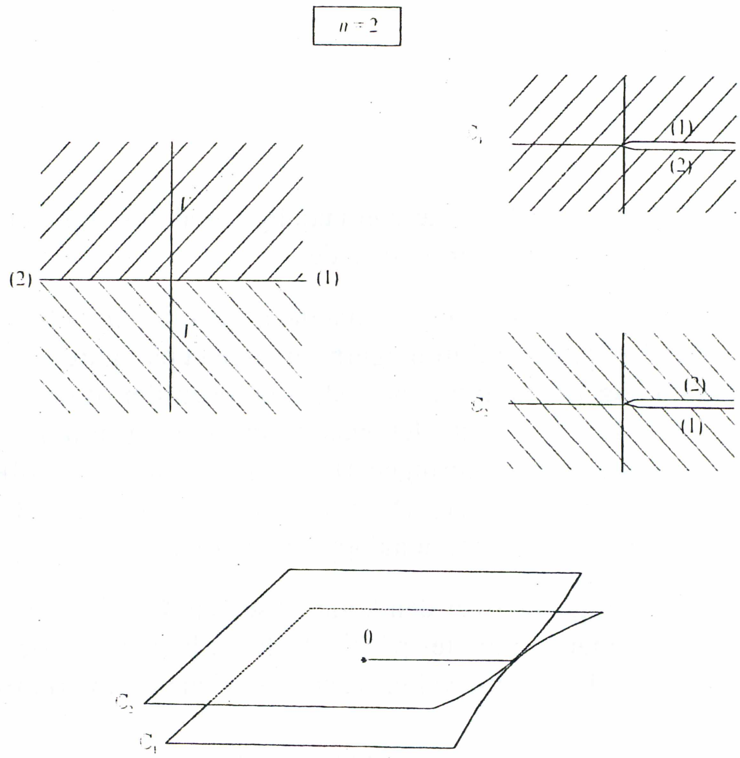
Vil vi foretage sammenklæbningen rent fysisk, opstår der selvgennemskæringer for $\mathcal{F}$. Disse skal opfattes fiktivt, således at forstå, at når vi bevæger os f.eks. fra nederste halvdel af blad $\mathbb{C}_5$ til øverste halvdel af blad $\mathbb{C}_1$ over de sammenklæbede snitrande (1), så skal den øvrige del af $\mathcal{F}$ være usynlig for os.

Idet vi forestiller os $\mathcal{F}$ liggende over den komplekse plan $\mathbb{C}$, har vi altså, at der over ethvert punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ligger fem forskellige punkter på $\mathcal{F}$, ét i hvert blad af $\mathcal{F}$. Over punktet $0 \in \mathbb{C}$ ligger der ét og kun ét punkt på $\mathcal{F}$, nemlig forgreningspunktet $0 \in \mathcal{F}$.

Bevæger vi os på $\mathcal{F}$ omkring 0, vil vi efter hvert omløb komme ind i et nyt blad af $\mathcal{F}$, og efter fem omløb vil vi være tilbage på det blad, hvor vi startede.

f kan opfattes som en bijektiv afbildning af $\mathbb{C}$ på $\mathcal{F}$ og har således opfattet en omvendt afbildning $g \colon \mathcal{F} \to \mathbb{C}$. Vi ser, at værdierne af g i de fem punkter på $\mathcal{F}$, der ligger over et punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, netop er de fem værdier af $\sqrt[5]{z}$, og at $g(0) = \sqrt[5]{0}$. Det er derfor rimeligt også at bruge betegnelsen $\sqrt[5]{\ }$ for g og at tale om, at den flertydige funktion $\sqrt[5]{\ }$ er en éntydig funktion, når den opfattes som en funktion på Riemann–fladen $\mathcal{F}$.

I analogi med tilfældet $n = 5$ kan vi for ethvert helt tal $n \geq 2$ konstruere en **Riemann–flade for** $\sqrt[n]{\ }$, på hvilken den flertydige funktion $\sqrt[n]{\ }$ kan opfattes som en éntydig funktion. Det bliver en n-bladet Riemann–flade med ét forgreningspunkt i 0 af n-te orden.



20 Riemann–fladen for log.

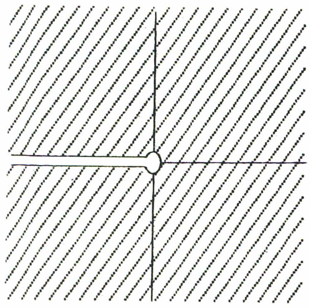
Vi betragter eksponentialfunktionen exp, der som bekendt afbilder den komplekse plan $\mathbb{C}$ på den udprikkede komplekse plan $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Læseren forudsættes fortrolig med denne afbildning.

Den omvendte funktion til exp er den komplekse logaritmefunktion log, der er en flertydig funktion: til ethvert punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ svarer der uendeligt mange værdier af $\log z$.

Vi vil, stadigvæk uden forsøg på at være stringente, konstruere Riemann–fladen for log. Hertil betragter vi de lukkede parallelstrimler

$$\mathcal{P}_j = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi + j2\pi \leq \operatorname{Im} z \leq \pi + j2\pi\} ,$$

$j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Som bekendt er exp en isomorfi af hvert enkelt af de tilsvarende åbne parallelstrimler på området $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$.

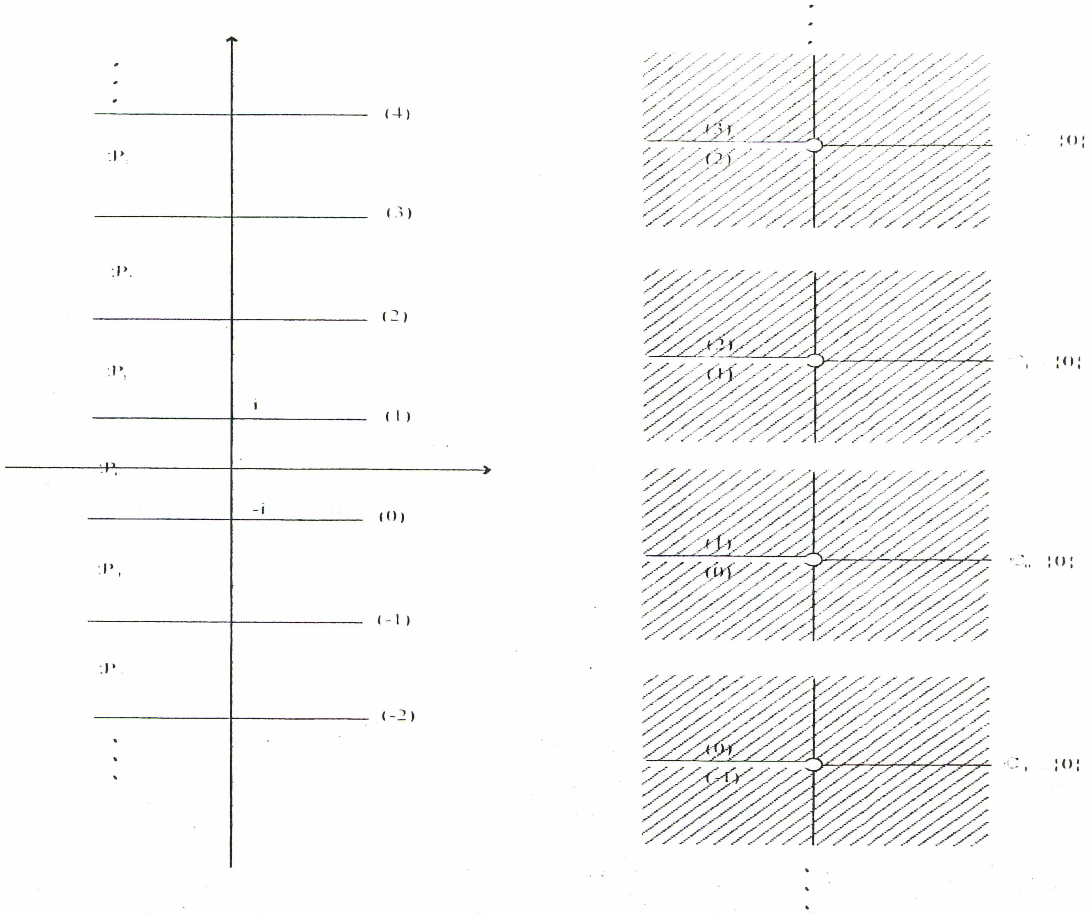


Lad os opskære den udprikkede komplekse plan $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ langs halvlinien $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ og tænke os snittet (bortset fra 0) forsynet med to rande som antydet på figuren til venstre.

Lad $\mathbb{C}_j \setminus \{0\}$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, være et tælleligt antal eksemplarer af den således opskårne udprikkede komplekse plan. Se figur næste side.

For ethvert $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ kan restriktionerne af exp til parallelstrimlen $\mathcal{P}_j$ opfattes som en bijektion af $\mathcal{P}_j$ på $\mathbb{C}_j \setminus \{0\}$. Randtilordningerne er angivet på figuren på næste side (med numre). **Riemann–fladen for log** fremkommer nu ved, at vi forestiller os de udprikkede komplekse planer $\mathbb{C}_j \setminus \{0\}$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, stablet ovenpå hinanden og snitrandene klæbet sammen to og to i overensstemmelse med nummereringen. (Denne gang kan vi forestille os sammenklæbningen foretaget uden selvgennemskæringer). Derved forekommer en **uendelig-bladet** Riemann–flade $\mathcal{F}$, nærmest af karakter som en "sammenklappet vindelflade".

Idet vi forestiller os $\mathcal{F}$ liggende over den komplekse plan $\mathbb{C}$, ligger der altså over ethvert punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ uendeligt mange punkter på $\mathcal{F}$, ét i hvert blad af $\mathcal{F}$. Bemærk, at der over $0 \in \mathbb{C}$ ikke ligger noget punkt på $\mathcal{F}$. Alligevel vil vi sige, at $\mathcal{F}$ har et **forgreningspunkt** i 0 af **uendelig** orden.
Bevæger vi os på $\mathcal{F}$ omkring 0, vil vi efter hvert omløb komme ind i et nyt blad af $\mathcal{F}$, og vi vil aldrig komme tilbage til et blad, hvor vi har været før, medmindre vi skifter omløbsretning.
exp kan opfattes som en bijektiv afbildning af $\mathbb{C}$ på $\mathcal{F}$. Gør vi det, har exp en omvendt afbildning $g\colon \mathcal{F} \to \mathbb{C}$. Vi ser, at værdierne af g i de uendeligt mange punkter på $\mathcal{F}$, der ligger over et punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, netop er de uendeligt mange værdier af $\log z$. Det er derfor rimeligt også at betegne g med log og at tale om, at den flertydige funktion log er en éntydig funktion, når den opfattes som en funktion på Riemann–fladen $\mathcal{F}$.
Overvej (uden at være stringent), at hvis γ er en kurve i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, så kan γ opfattes som en kurve $\bar{\gamma}$ på $\mathcal{F}$, og at dette hænger sammen med eksistensen af en kontinuert $\log z$-funktion langs γ. Overvej videre, at selv om γ er lukket, så er $\bar{\gamma}$ ikke nødvendigvis lukket, og angiv sammenhængen



mellem $\mathrm{Ind}(\gamma; 0)$ og placeringen af begyndelsespunkt og endepunkt for $\bar{\gamma}$ på $\mathcal{F}$. Overvej specielt, at $\mathrm{Ind}(\gamma; 0) = 0$ når og kun når $\bar{\gamma}$ er en lukket kurve på $\mathcal{F}$.

21 En bemærkning om trigonometriske og hyperbolske funktioner.

Lad os gøre os klart, hvorledes vi rimeligt skal gribe et studium af de (komplekse) trigonometriske og deres omvendte hyperbolske funktioner an.

Som bekendt er de trigonometriske funktioner definerede ved

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad z \in \mathbb{C};$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad z \in \mathbb{C};$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + p\pi \,\middle|\, p \in \mathbb{Z} \right\};$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{ p\pi \mid p \in \mathbb{Z} \}.$$

Deres omvendte funktioner, der alle er flertydige, betegnes henholdsvis arccos, arcsin, arctg og arccot. De hyperbolske funktioner definerede ved

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \qquad z \in \mathbb{C};$$

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \qquad z \in \mathbb{C};$$

$$\operatorname{tgh} z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi i}{2} + p\pi i \,\middle|\, p \in \mathbb{Z} \right\};$$

$$\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ p\pi i \,\middle|\, p \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Af

$$\cosh z = \cos \frac{z}{i}, \qquad z \in \mathbb{C};$$

$$\sinh z = i \sin \frac{z}{i}, \qquad z \in \mathbb{C};$$

$$\operatorname{tgh} z = i \operatorname{tg} \frac{z}{i}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi i}{2} + p\pi i \,\middle|\, p \in \mathbb{Z} \right\};$$

$$\coth z = \frac{1}{i} \cot \frac{z}{i}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ p\pi i \,\middle|\, p \in \mathbb{Z} \right\}.$$

fremgår for eksempel, at afbildningen $\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ er sammensat af følgende tre afbildninger:

1) en drejning om 0 (drejningsvinkel $-\frac{\pi}{2}$),

2) afbildningen $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

3) en drejning om 0 (drejningsvinkel $+\frac{\pi}{2}$),

Analogt for cosh, tgh og coth .
Det er derfor nok at studere de trigonometriske funktioner.

$$\cos z = \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - z\right), \qquad z \in \mathbb{C},$$

$$\cot z = \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{2} - z\right), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{p\pi \mid p \in \mathbb{Z}\},$$

fremgår videre, at det er nok at studere funktionerne sin og tg . Vi vil studere sin i næste paragraf.

Vedrørende tg bemærker vi, at der af

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{i} \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$$

fremgår, at afbildningen $\operatorname{tg} \colon \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + p\pi \mid p = 0, \pm 1, \dots\} \to \mathbb{C}$ er sammensat af følgende fire afbildninger

1) en drejning om 0 (drejningsvinkel + $\frac{\pi}{2}$),

2) multiplikation med 2,

3) exp,

4) afbildningen φ bestemt ved $\varphi(\zeta) = \frac{1}{i}\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}$.

φ er et eksempel på en såkaldt homografisk transformation. Disse vil blive behandlet generelt i §24, og studiet af tg (der overlades til læseren) udsættes hensigtsmæssigt til efter denne paragraf.

22 Sinus og Riemann–fladen for arcsin.

Af $\sin(z + 2\pi) = \sin z$ og $\sin(z + \pi) = -\sin z$ fremgår, at det er rimeligt at begynde med at undersøge sin i en lodret parallelstrimmel af bredden π. Vi vælger parallelstrimlen

$$\mathcal{P} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid -\tfrac{\pi}{2} < x < \tfrac{\pi}{2},\ -\infty < y < +\infty\}.$$

Vi vil vise, at sin er en isomorfi af $\mathcal{P}$ på området

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{u + iv \in \mathbb{C} \mid |u| \geq 1,\ v = 0\},$$

og vi vil beskrive afbildningen $\sin \colon \mathcal{P} \to \Omega$ ved at angive billedet i Ω af de to ortogonale kurvesystemer i $\mathcal{P}$, der består af henholdsvis liniestykkerne parallelle med x-aksen (af længde π, gennemløbet fra venstre mod højre, endepunkterne ikke medregnede) og linierne parallelle med y-aksen (gennemløbet nedefra og op). Se figuren side 119.

Vi har

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y. \tag{1}$$

Heraf fremgår, at liniestykket

(2) $$z = x + iy_0\,, \qquad -\tfrac{\pi}{2} < x < \tfrac{\pi}{2}\,,$$

som billede har kurven med parameterfremstillingen

(3) $$\left.\begin{aligned} u &= \cosh y_0 \,\sin x \\ v &= \sinh y_0 \,\cos x \end{aligned}\right\} \; -\tfrac{\pi}{2} < x < \tfrac{\pi}{2}\,.$$

For $y_0 > 0$ fremstiller (3) den i øvre halvplan $\{u+iv \in \mathbb{C} \,|\, v > 0\}$ beliggende halvdel af ellipsen med ligningen

(4) $$\frac{u^2}{(\cosh y_0)^2} + \frac{v^2}{(\sinh y_0)^2} = 1\,,$$

gennemløbet fra venstre mod højre. Skiftes fortegn på y_0, fremstiller (3) den i den nedre halvplan $\{u + iv \in \mathbb{C} \,|\, v < 0\}$ beliggende halvdel af ellipsen (4) gennemløbet fra venstre mod højre. For $y_0 = 0$ er liniestykket (2) det åbne interval $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ på x-aksen, og billedkurven (3) er det åbne interval $]-1, 1[$ på u-aksen. Vi kan opfatte $]-1, 1[$ som en udartet halvellipse.

Alle halvellipserne har, uafhængigt af y_0, brændpunkter i -1 og 1. (Fordi halvakserne er $\cosh y_0$ og $|\sinh y_0|$, og $(\cosh y_0)^2 - (\sinh y_0)^2 = 1$).

Af (1) fremgår videre, at linien

(5) $$z = x_0 + iy\,, \qquad -\infty < y < +\infty\,.$$

som billede har kurven med parameterfremstillingen

(6) $$\left.\begin{aligned} u &= \sin x_0 \,\cosh y \\ v &= \cos x_0 \,\sinh y \end{aligned}\right\} \; -\infty < y < +\infty\,.$$

For $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$ fremstiller (6) den højre gren af hyperblen med ligningen

(7) $$\frac{u^2}{(\sin x_0)^2} - \frac{v^2}{(\cos x_0)^2} = 1\,,$$

gennemløbet nedefra og op. Skiftes fortegn på x_0, fremstiller (6) den venstre gren af hyperblen (7), gennemløbet nedefra og op.

For $x_0 = 0$ er linien (5) y-aksen, og billedkurven (6) er v-aksen. Vi kan opfatte v-aksen som en udartet hyperbelgren.
Alle hyperbelgrenene har, uafhængigt af x_0, brændpunkter i -1 og 1. (Fordi halvakserne er $|\sin x_0|$ og $\cos x_0$, og $(\sin x_0)^2 + (\cos x_0)^2 = 1$).

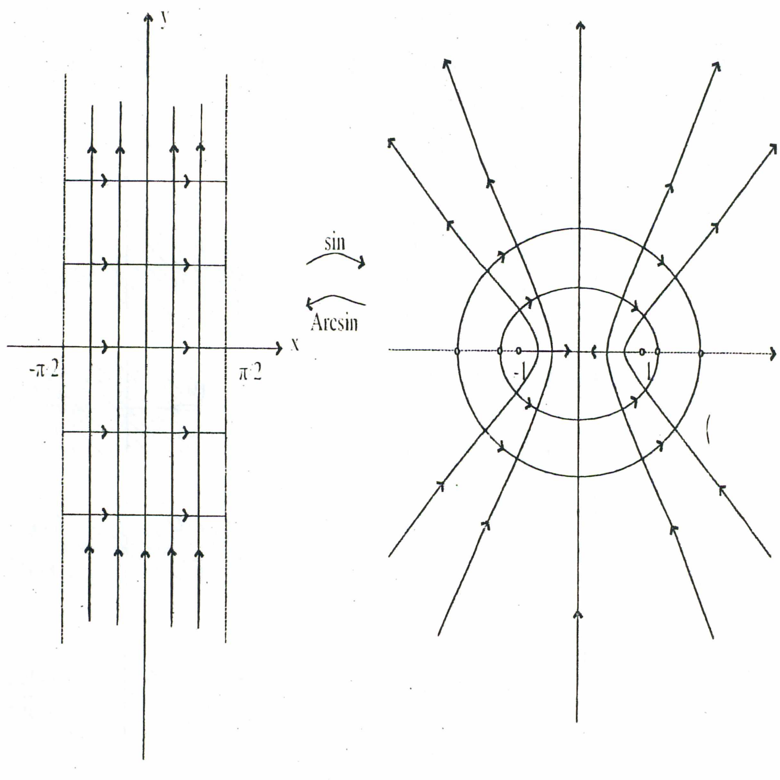
Vi har altså vist, at billedet af det betragtede par ortogonale kurvesystemer i $\mathcal{P}$ er de to kurvesystemer, der består af henholdsvis halvellipserne med brændpunkt i -1 og 1 (fra venstre toppunkt

til højre toppunkt, disse toppunkter fraregnede) og hyperbelgrenene med brændpunkter i -1 og 1. Da alle disse kurver forløber i Ω, og da der gennem ethvert punkt i Ω går én og kun én halvellipse med brændpunkter i -1 og 1 og én og kun én hyperbelgren med brændpunkter i -1 og 1, ser vi, at sin er en bijektion af $\mathcal{P}$ på Ω; sin er altså en isomorfi af $\mathcal{P}$ på Ω. Heraf følger, at de betragtede halvellipser og hyperbelgrene udgør to ortogonale kurvesystemer i Ω, hvilket iøvrigt også følger af, at tangenten til en ellipse (hhv. en hyperbel) i et punkt af ellipsen (hhv. hyperblen) halverer supplementsvinklen (hhv. vinklen) mellem brændstrålerne til punktet.
Den omvendte afbildning af Ω på $\mathcal{P}$ betegnes **Arcsin** og kaldes **hoveddeterminationen** af den flertydige funktion **arcsin**.

Billedet ved sin af linien $z = -\frac{\pi}{2} + iy$, $-\infty < y < +\infty$, er kurven med parameterfremstillingen

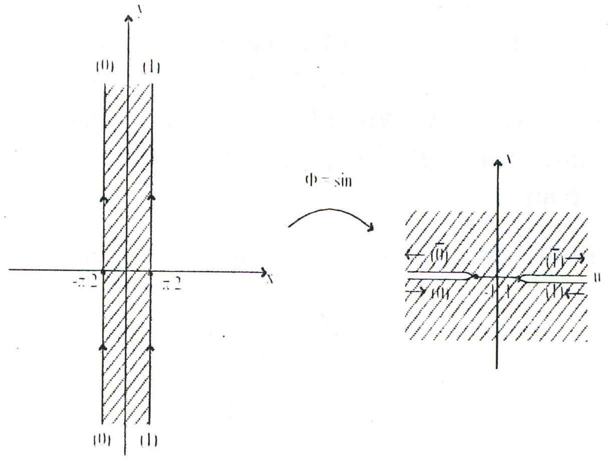
$$\left.\begin{aligned} u &= -\cosh y \\ v &= 0 \end{aligned}\right\} \; -\infty < y < +\infty .$$

altså halvlinien $\{u + iv \in \mathbb{C} \,|\, u \leq -1,\ v = 0\}$ gennemløbet to gange, først fra venstre mod højre, dernæst fra højre mod venstre. Vi kan opfatte denne kurve som en udartet hyperbelgren. Analogt er billedet ved sin af linien $z = \frac{\pi}{2} + iy$, $-\infty < y < +\infty$, halvlinien $\{u + iv \in \mathbb{C} \,|\, u \geq 1,\ v = 0\}$ gennemløbet to gange, først fra højre mod venstre og dernæst fra venstre mod højre.



Vi ser, at sin kan opfattes som en bijektion Φ af den lukkede parallelstrimmel $\{x+iy \in \mathbb{C} \,|\, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ -\infty < y < +\infty\}$ på den komplekse plan opskåret langs halvlinierne $\{u + iv \in \mathbb{C} \,|\, u \leq -1,\ v = 0\}$ og $\{u + iv \in \mathbb{C} \,|\, u \geq 1,\ v = 0\}$ og forsynet med snitrande som antydet på figuren

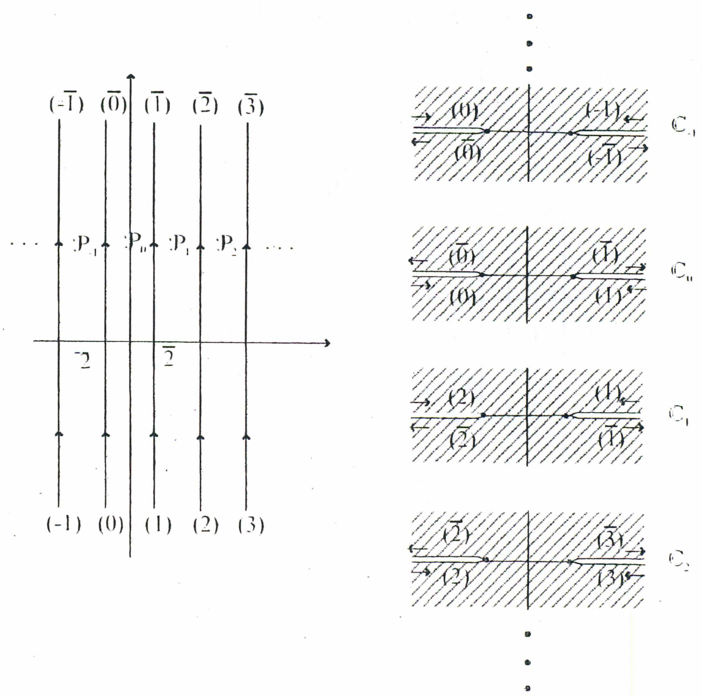
øverst på næste side.
Randtilordningerne er angivet på figuren (med numre).



For at konstruere Riemann–fladen for arcsin betragter vi de lukkede parallelstrimler

$$\mathcal{P}_j = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid -\tfrac{\pi}{2} + j\pi \le \tfrac{\pi}{2} + j\pi, -\infty < y < +\infty\}, \; j = 0, \pm 1, \dots,$$

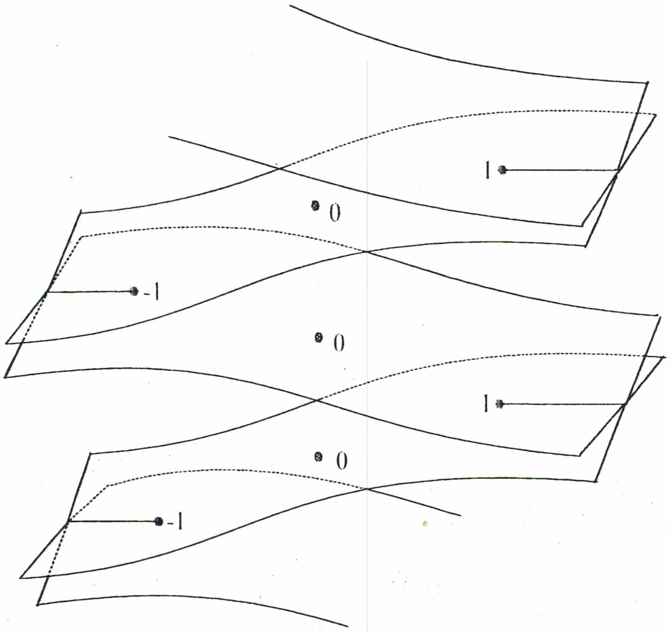
og et tælleligt antal eksemplarer af den komplekse plan: $\mathbb{C}_j$, $j = 0, \pm 1, \dots$, opskårne og forsynede med snitrande som nedenfor vist.



Hvis j er lige, gælder der $\sin z = \sin(z - j\pi)$, og sin kan derfor opfattes som en bijektion af $\mathcal{P}_j$ på $\mathbb{C}_j$ af samme art som Φ. Hvis j er ulige, gælder der $\sin z = -\sin(z - j\pi)$, og sin kan derfor opfattes som en bijektion af $\mathcal{P}_j$ på $\mathbb{C}_j$ af samme art som Φ efterfulgt af en drejning på 180° om 0.

Randtilordningerne er angivet på figuren (med numre).

Riemann–fladen for arcsin fremkommer nu ved, at vi forestiller os de komplekse planer $\mathbb{C}_j$, $j = 0, \pm 1, \ldots$, stablet ovenpå hinanden og snitrandene klæbet sammen to og to i overensstemmelse med nummereringen. Derved fremkommer en **uendelig-bladet** Riemann–flade $\mathcal{F}$.



Idet vi forestiller os $\mathcal{F}$ liggende på den komplekse plan $\mathbb{C}$, ser vi, at der over hvert af punkterne $-1 \in \mathbb{C}$ og $1 \in \mathbb{C}$ ligger uendeligt mange forgreningspunkter på $\mathcal{F}$, alle af orden 2.

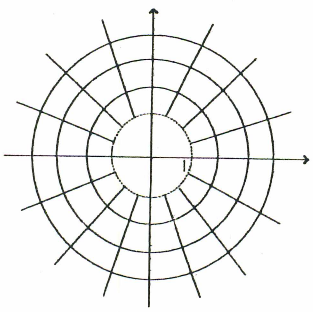
sin kan opfattes som en bijektion af $\mathbb{C}$ på $\mathcal{F}$. Gør vi det, har sin en omvendt afbildning $g\colon \mathcal{F} \to \mathbb{C}$ og værdierne af g i de uendeligt mange punkter på $\mathcal{F}$, der ligger over et punkt $z \in \mathbb{C}$, er netop de uendeligt mange værdier af arcsin z. Det er derfor rimeligt også at betegne g med arcsin og at tale om, at den flertydige funktion arcsin er en éntydig funktion, når den opfattes som en funktion på Riemann–fladen $\mathcal{F}$.

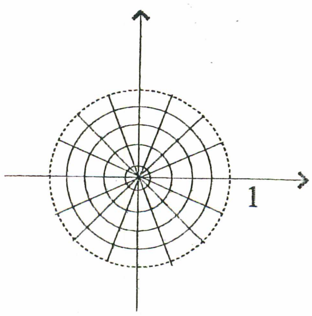
Opgaver

Opgave 87.
Betragt funktionen $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

1. Vis, at f er en isomorfi af området $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ på området $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
2. Vis, at f er en isomorfi af den åbne cirkelskive $D(0;1)$ på den åbne halvplan $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re} z > 0\}$.
3. Vis, at f er en isomorfi af den åbne halvcirkelskive $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1,\ \mathrm{Im} z > 0\}$ på den åbne kvadrant $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re} z > 0\ , \mathrm{Im} z > 0\}$.
   Vejledning til 2. og 3.: Vis først, at
   $$\mathrm{Re} f(z) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \text{ og } \mathrm{Im} f(z) = \frac{2\,\mathrm{Im} z}{|1-z|^2}, \quad (z \neq 1)\ .$$
   f er et eksempel på en homografisk transformation. Disse vil senere blive behandlet generelt.

Opgave 88.
Betragt funktionen $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

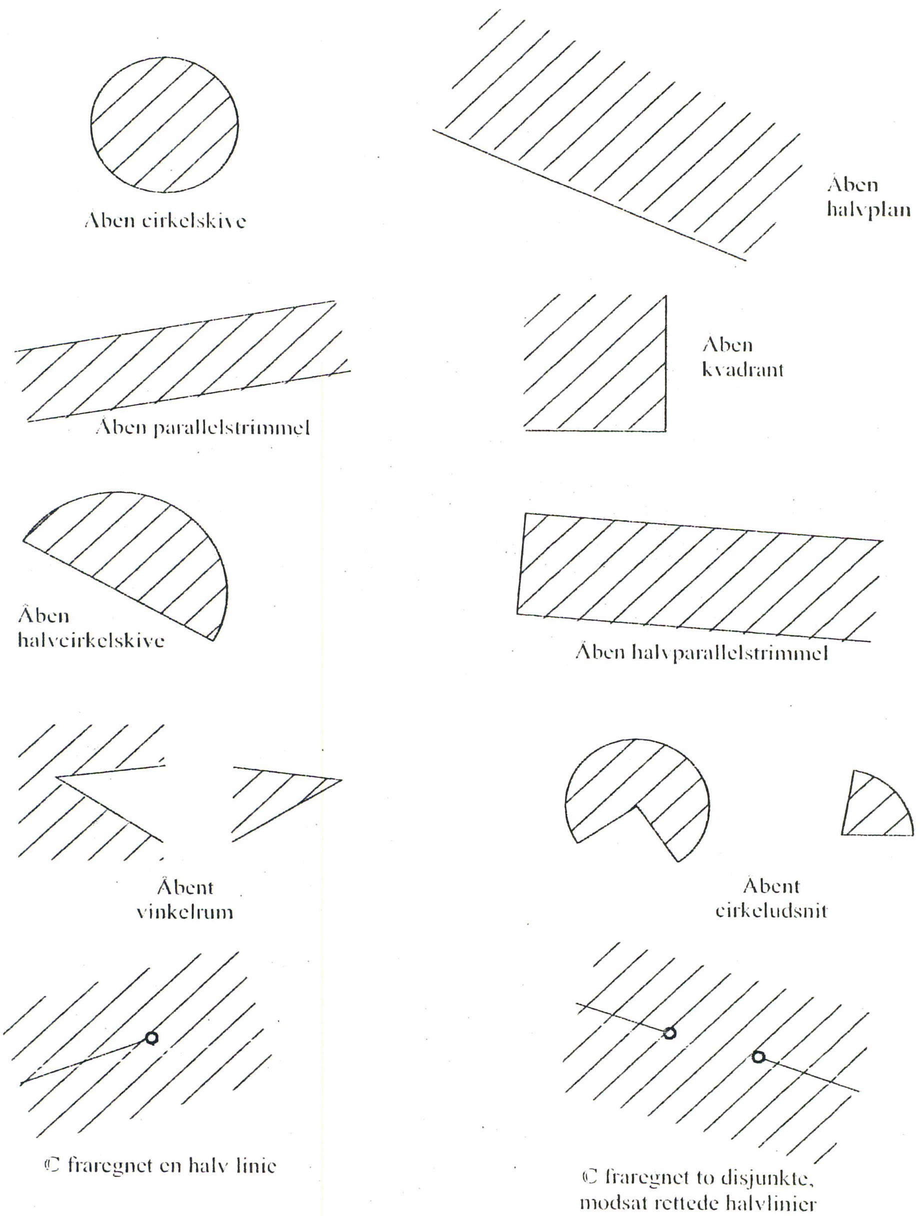
1. Vis, at f er en isomorfi af området $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ på området $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 1\}$.
2. 

   Vis, at f fører de to ortogonale kurvesystemer i Ω vist på figuren til venstre over i de to ortogonale kurvesystemer i Ω_1, der består af ellipserne med brændpunkter i -1 og 1, og de to halve hyperbelgrene (også de udartede) med brændpunkter i -1 og 1.
3. 

   Vis, at f er en isomorfi af $D'(0;1)$ på Ω_1. Angiv billedet ved f af de to ortogonale kurvesystemer i $D'(0;1)$ vist på figuren til venstre.

4. Vis, at f er en isomorfi af den øvre halvplan $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}z > 0\}$ på området $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x| \geq 1\}$.

Opgave 89.
Gør rede for (bl.a. ved brug af f.eks. Opgave 87, punkterne 2. og 3., og Opgave 88, punkt 4.), at nedennævnte typer af områder er indbyrdes isomorfe.



Opgave 90.
Vis, at sin afbilder $\mathbb{C}$ på $\mathbb{C}$ og at tg afbilder $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + p\pi \,|\, p = 0, \pm 1, \dots\}$ på $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$.

Udtryk de flertydige funktioner

$$\arcsin w, \;\; w \in \mathbb{C}; \qquad \operatorname{arctg} w, \;\; w \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\};$$

ved de flertydige funktioner $\sqrt{\ }$ og log .

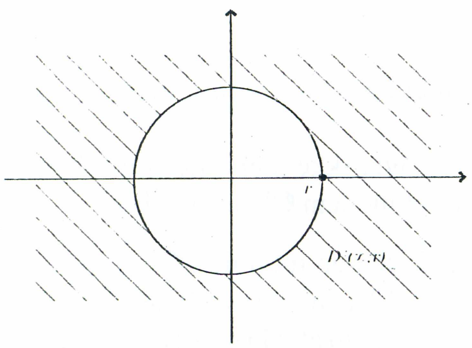
23 Den udvidede komplekse plan. Riemanns kugle.

I mange forbindelser er det hensigtmæssigt at betragte **den udvidede plan** $\mathbb{C}^*$, der fremkommer ved at føje et ekstra punkt ∞ til den sædvanlige komplekse plan $\mathbb{C}$ og forsyne punktmængden $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ med den topologi, der defineres ved at bevare topologien i $\mathbb{C}$ og lade punktmængderne

$$D(\infty; r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\} \cup \{\infty\}, \qquad 0 < r < +\infty,$$

være en omegnsbasis for punktet ∞. De tilsvarende udprikkede omegne til ∞ er så punktmængderne

$$D'(\infty; r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\}, \qquad 0 < r < +\infty\,.$$

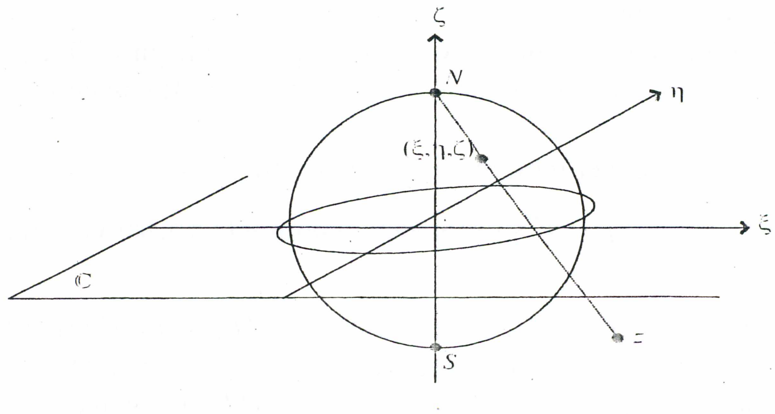


Punktet $\infty \in \mathbb{C}^*$ må ikke forveksles med de to punkter $-\infty$ og $+\infty$, der føjes til den reelle akse $\mathbb{R}$ for at danne den udvidede reelle akse $\mathbb{R}^*$.
$\mathbb{C}^*$ er åbenbart et kompakt topologisk rum. Faktisk er $\mathbb{R}^*$, som vi nu skal se, homeomorf med en kugleflade.

Betragt enhedskuglefladen i $\mathbb{R}^3$:

$$S_2 = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\},$$

og identificer den komplekse plan $\mathbb{C}$ med $\xi\eta$-planen i $\mathbb{R}^3$, således at den reelle akse identificeres med ξ-aksen og den imaginære akse med η-aksen.



Lad N og S være punkterne $(0,0,1)$ og $(0,0,-1)$. N og S er altså henholdsvis nordpolen og sydpolen på S_2.
Ved stereografisk projektion fra N (se figuren) er der etableret en bijektion φ af $\mathbb{C}$ på $S_2 \setminus \{N\}$. Sættes $\varphi(\infty) = N$, er φ en bijektion af $\mathbb{C}^*$ på S_2.
I koordinater er φ givet ved

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi(z) = \left(\frac{2\text{Re}z}{|z|^2+1}, \frac{2\text{Im}z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right), & z \in \mathbb{C}, \\ \varphi(\infty) = (0,0,1), \end{cases}$$

og φ^{-1} er givet ved

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi^{-1}(\xi,\eta,\zeta) = \frac{\xi+i\eta}{1-\zeta}, & (\xi,\eta,\zeta) \in S_2 \setminus \{N\}, \\ \varphi^{-1}(0,0,1) = \infty . \end{cases}$$

Det er geometrisk klart og ses også let af (1) og (2), at φ og φ^{-1} er kontinuerte. φ er altså en homeomorfi af $\mathbb{C}^*$ på S_2.
S_2 kaldes **Riemanns kugle**, idet vi, når vi bruger dette navn, ikke alene tænker på S_2 som en kugleflade, men også på den sammenhæng, der er etableret mellem $\mathbb{C}^*$ og S_2 via φ.

Ved **en cirkel i $\mathbb{C}^*$** forstår vi enten en sædvanlig cirkel i $\mathbb{C}$ eller en ret linie i $\mathbb{C}$ tilføjet ∞. Hvis l er en ret linie i $\mathbb{C}$, vil vi altså omtale $l \cup \{\infty\}$ som en cirkel i $\mathbb{C}^*$ gennem ∞. Vi ser, at der gennem tre forskellige punkter i $\mathbb{C}^*$ går én og kun én cirkel i $\mathbb{C}^*$. Ved hjælp af (1) og (2) eftervises let, at φ og φ^{-1} er **cirkeltro**, altså at der til en cirkel i $\mathbb{C}^*$ svarer en cirkel på S_2 og omvendt. Umiddelbart observeres, at der til $l \cup \{\infty\}$, hvor l er en ret linie i $\mathbb{C}$, svarer en cirkel på S_2 gennem N, og omvendt.
Uden bevis skal det nævnes, at φ og φ^{-1} også er **vinkeltro**.

Afbildningen $z \mapsto \frac{1}{z}$ (vi sætter $\frac{1}{0} = \infty$ og $\frac{1}{\infty} = 0$) er en bijektion af $\mathbb{C}^*$ på sig selv. Den tilsvarende bijektion af Riemann-kuglen på sig selv er simpelthen drejningen på 180° om ξ-aksen, hvilket let ses ved hjælp af (1) eller (2).
Ved $z \mapsto \frac{1}{z}$ afbildes en omegn til ∞ bijektivt på en omegn til 0, og den tilsvarende bijektion mellem de tilsvarende omegne til henholdsvis N og S på Riemann-kuglen er en kongruenstransformation.
I ly af disse bemærkninger indfører vi følgende definitioner:

En funktion $f \colon D(\infty; r) \to \mathbb{C}$ siges at være **holomorf i ∞**, såfremt funktionen $f(\frac{1}{z})$ er holomorf i 0.

En funktion $f \colon D'(\infty; r) \to \mathbb{C}$, der er holomorf i $D'(\infty; r)$, siges at have **en isoleret singularitet i ∞**. Vi taler om, at f har **en hævelig singularitet i ∞**, **en pol af orden k i ∞** eller **en væsentlig isoleret singularitet i ∞**, alt efter som $f(\frac{1}{z})$ har en hævelig singularitet i 0, en pol af orden k i 0 eller en væsentlig isoleret singularitet i 0.

Når f har en isoleret singularitet i ∞, kan f fremstilles som sum af en Laurentrække i en udprikket omegn til ∞:

(3) $$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \qquad z \in D'(\infty; r) .$$

$f(\frac{1}{z})$ har så Laurentrækkefremstillingen

$$f(\frac{1}{z}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{-m} z^m, \qquad z \in D'(0; \frac{1}{r}) .$$

Funktionen

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n, \qquad z \in \mathbb{C},$$

kaldes den principale del af f hørende til den isolerede singularitet ∞. Vi ser, at $f \setminus \psi$ har en hævelig singularitet i ∞.

Til resultaterne i §11 vedrørende en isoleret singularitet i et punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ svarer analoge resultater vedrørende en isoleret singularitet i ∞. Bl.a. gælder der

(a) f har en hævelig singularitet i ∞, når og kun når (3) antager formen

$$f(z) = a_0 + a_{-1}z^{-1} + a_{-2}z^{-2} + \cdots , \qquad z \in D'(\infty; r),$$

altså når og kun når f i en udprikket omegn til ∞ kan fremstilles ved en potensrække i $\frac{1}{z}$. Singulariteten hæves ved at sætte $f(\infty) = a_0 = \lim_{z\to\infty} f(z)$.

f har en hævelig singularitet i ∞, når og kun når der findes en udprikket omegn til ∞, hvori $|f|$ er begrænset.

(b) f har en pol af orden k i ∞, når og kun når (3) antager formen

$$f(z) = a_k z^k + \cdots + a_1 z + a_0 + a_{-1}z^{-1} + a_{-2}z^{-2} + \cdots , \qquad z \in D'(\infty; r),$$

($k \geq 1$, $a_k \neq 0$), altså når og kun når den principale del af f hørende til ∞ er et polynomium af grad k.

f har en pol i ∞, når og kun når $f(z) \to \infty$ for $z \to \infty$.

(c) (Weierstrass.) Hvis f har en væsentlig isoleret singularitet i ∞, er $f(D'(\infty; R))$ en overalt tæt punktmængde i $\mathbb{C}$ for ethvert $R \geq r$.

Sætning 23.1 *De funktioner, der er meromorfe i hele den udvidede komplekse plan* $\mathbb{C}^*$, *er netop de rationale funktioner, altså funktionerne af typen* $\frac{P(z)}{Q(z)}$, *hvor* $P(z)$ *og* $Q(z)$ *er polynomier* ($Q(z) \neq$ *nulpolynomiet*).

Bevis: En rational funktion ses let at være meromorf i $\mathbb{C}^*$. Lad omvendt f være meromorf i $\mathbb{C}^*$. Da $\mathbb{C}^*$ er kompakt, har f højst et endeligt antal poler. Lad $z_1, z_2, \ldots, z_m$ være polerne i $\mathbb{C}$ (hvis der er nogen), lad $k_1, k_2, \ldots, k_m$ være deres ordener og lad $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ være de principale dele af f hørende til henholdsvis $z_1, z_2, \ldots, z_m$. Lad k være ordenen af polen i ∞, hvis f har en pol i ∞, og lad $k = 0$, hvis f er holomorf i ∞. Lad ψ være den principale del af f hørende til ∞ (hvis f er holomorf i ∞, er ψ nulfunktionen).

Funktionen $g = f - (\psi + \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m)$ er holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ og har hævelige singulariteter i ∞ og i $z_1, z_2, \ldots, z_m$. g er følgelig holomorf i hele $\mathbb{C}^*$. Da $\mathbb{C}^*$ er kompakt, er $|g|$ begrænset og g derfor konstant (Liouvilles Sætning). Benævnes denne konstant a_0, har vi altså

$$f(z) = a_0 + \psi(z) + \varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \cdots + \varphi_m(z)\,. \tag{4}$$

Hermed er Sætning 23.1 bevist, idet funktionerne $\psi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ alle er rationale funktioner. $\square$

Mere udførligt er ψ et polynomium (uden konstantled) i z af grad k, hvis $k \geq 1$. Hvis $k = 0$, er ψ nulpolynomiet. φ_j er et polynomium (uden konstantled) i $\frac{1}{z - z_j}$ af grad k_j, $j = 1, 2, \ldots, m$. (4) har altså udseendet

$$\begin{aligned} f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_k z^k &+ \\ + \frac{A_1^{(1)}}{z - z_1} + \frac{A_2^{(1)}}{(z - z_1)^2} + \cdots + \frac{A_{k_1}^{(1)}}{(z - z_1)^{k_1}} &+ \\ + \frac{A_1^{(2)}}{z - z_2} + \frac{A_2^{(2)}}{(z - z_2)^2} + \cdots + \frac{A_{k_2}^{(2)}}{(z - z_2)^{k_2}} &+ \\ + \cdots + & \\ + \frac{A_1^{m}}{z - z_m} + \frac{A_2^{(m)}}{(z - z_m)^2} + \cdots + \frac{A_{k_m}^{(m)}}{(z - z_m)^{k_m}} &. \end{aligned}$$

Denne fremstilling af den rationale funktion f kaldes **partialbrøkfremstillingen** af f. Den antager et særligt simpelt udseende, hvis alle polerne i $\mathbb{C}$ er simple poler.
Hvis en funktion f er meromorf i et område $\Omega \subseteq \mathbb{C}^*$, vil vi fra nu af tildele f værdien ∞ i ethvert punkt af Ω, hvori f har en pol. Herved opnås, at f er defineret i hele Ω og er en kontinuert afbildning af Ω ind i $\mathbb{C}^*$. Specielt er på den måde enhver rational funktion en kontinuert afbildning af $\mathbb{C}^*$.

24 Homografiske transformationer.

En afbilding $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ givet ved

$$(1) \qquad f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad z \in \mathbb{C}^*,$$

hvor de komplekse tal a, b, c og d opfylder

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0,$$

kaldes en **homografisk transformation** eller kort en **homografi.** I litteraturen træffes også navnene **Möbius-transformation, lineær bruden transformation** og (uheldigt, men ikke sjældent) **lineær transformation**.

Sætning 24.1 *En homografisk transformation f er en homeomorfi af $\mathbb{C}^*$ på $\mathbb{C}^*$.*
I tilfældet $c = 0$ er f en isomorfi af $\mathbb{C}$ på $\mathbb{C}$.
I tilfældet $c \neq 0$ er f en isomorfi af $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ på $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$.

$w = \frac{az+b}{cz+d}$ $\quad cw \cdot z + dw = az+b$
$(a-1)z = (c+d)w - b$

Bevis:
Tilfældet $c = 0$. Så er $a \neq 0$ og $d \neq 0$ og f er simpelthen et førstegradspolynomium. f er altså holomorf i $\mathbb{C}$ og har en simpel pol i ∞. (1) antager udførligere skrevet udseendet

$$\begin{cases} f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}, & z \in \mathbb{C}, \\ f(\infty) = \infty . \end{cases}$$

Vi ser, at f er en bijektion af $\mathbb{C}^*$ på $\mathbb{C}^*$, og at den omvendte afbildning f^{-1} er givet ved

$$\begin{cases} f^{-1}(w) = \frac{d}{a}w - \frac{b}{a}, & w \in \mathbb{C}, \\ f^{-1}(\infty) = \infty . \end{cases}$$

f^{-1} er altså en homografi. Det fremgår, at såvel f som f^{-1} er kontinuerte, altså at f er en homeomorfi af $\mathbb{C}^*$ på $\mathbb{C}^*$. Yderligere fremgår, at f er en isomorfi af $\mathbb{C}$ på $\mathbb{C}$. Mere præcist: f er en ligedannethedstransformation af $\mathbb{C}$ på $\mathbb{C}$ (overvej!).

Tilfældet $c \neq 0$. Så er f holomorf i $\mathbb{C}\setminus\{-\frac{d}{c}\}$, har en simpel pol i $-\frac{d}{c}$ og en hævelig singularitet i ∞. (1) antager udførligere skrevet udseendet

$$\begin{cases} f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}, \\ f(-\frac{d}{c}) = \infty, & \\ f(\infty) = \frac{a}{c} . & \end{cases}$$

Vi efterviser let, at f er en bijektion af $\mathbb{C}^*$ på $\mathbb{C}^*$, og at den omvendte afbildning f^{-1} er givet ved

$$\begin{cases} f^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}, & w \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}, \\ f^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}, & \\ f^{-1}(\frac{a}{c}) = \infty . & \end{cases}$$

$w = \dfrac{az+b}{cz+d}$

$wcz + wd = az + b$

$z(wc-a) = b - wd$

$z = \dfrac{-dw+b}{cw-a}$

f^{-1} er altså en homografi. Det fremgår, at såvel f som f^{-1} er kontinuerte, altså at f er en homeomorfi af $\mathbb{C}^*$ på $\mathbb{C}^*$. Yderligere fremgår, at f er en isomorfi af $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ på $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$. □

I begge tilfælde så vi, at den omvendte afbildning f^{-1} var homeografien givet ved

$$f^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}, \qquad w \in \mathbb{C}^* .$$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Af Sætning 24.1 følger specielt, at **en homografi er vinkeltro**, når bortses fra vinkler med toppunkt i ∞. Betragtes den til en homografi svarende afbildning af Riemann-kuglen S_2 på sig selv, gælder vinkeltroskaben også for vinkler med toppunkt i $N = \varphi(\infty)$.

Sætning 24.2 *Mængden $\mathcal{G}$ af homografier udgør en transformationsgruppe over $\mathbb{C}^*$.*

Bevis: Lad $\mathcal{F}$ være den fulde tranformationsgruppe over $\mathbb{C}^*$. Vi skal vise, at $\mathcal{G}$ er en undergruppe i $\mathcal{F}$. Da vi allerede har vist $f \in \mathcal{G} \Longrightarrow f^{-1} \in \mathcal{G}$, skal vi blot vise

$$f_1 \in \mathcal{G},\ f_2 \in \mathcal{G} \Longrightarrow f_1 \circ f_2 \in \mathcal{G} .$$

$\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$

$ad - bc = 1$

Vi betragter altså to homografier

$$f_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \qquad z \in \mathbb{C}^*,$$

$$f_2(\zeta) = \frac{a_2 \zeta + b_2}{c_2 \zeta + d_2}, \qquad \zeta \in \mathbb{C}^* .$$

Udregning af $f_1(f_2(\zeta))$ giver, at $f_1 \circ f_2$ er givet ved

$$(f_1 \circ f_2)(\zeta) = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}, \qquad \zeta \in \mathbb{C}^*,$$

hvor

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} .$$

Regnerierne har mening, når $\zeta \neq \infty$, $f_2(\zeta) \neq \infty$ og $(f_1 \circ f_2)(\zeta) \neq \infty$. Af kontinuitetsgrunde gælder resultatet for alle $\zeta \in \mathbb{C}^*$.

$$\frac{A\frac{az+b}{cz+d} + B}{C\frac{az+b}{cz+d} + D} = \frac{Aaz + Ab + Bcz + Bd}{Caz + Cb + Dcz + Dd} = \frac{(Aa+Bc)z + Ab+Bd}{(Ca+Dc)z + Cb+Dd}$$

$f_1 \circ f_2$ er altså en homografi, hvormed Sætning 24.2 er bevist. $\square$

Lad os betragte gruppen M af 2 gange 2 matricer (komplekse elementer, sædvanlig matrixmultiplikation) med determinant $\neq 0$.
Af (2) fremgår, at afbildningen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

er en gruppehomomorfi af M på $\mathcal{G}$. Kernen N for denne homomorfi består af matricerne af formen $\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Ifølge den fundamentale homomorfisætning for grupper er $\mathcal{G}$ gruppeisomorf med faktorgruppen M/N.

Sætning 24.3 *En homografi er cirkeltro. Hermed menes, at en homografi fører enhver cirkel i $\mathbb{C}^*$ over i en cirkel i $\mathbb{C}^*$. (Læseren bedes genkalde sig definitionen på en cirkel i $\mathbb{C}^*$).*

Bevis: Vi bemærker først, at enhver homografi

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad z \in \mathbb{C}^*,$$

er sammensat af homografier af typen $z \mapsto \alpha z + \beta$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \alpha \neq 0)$, og homografien $z \mapsto \frac{1}{z}$.
Dette er trivielt, hvis $c = 0$, og for $c \neq 0$ fremgår det af

$$f(z) = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c}\,\frac{1}{cz+d}, \qquad z \in \mathbb{C}^* .$$

En homografi af typen $z \mapsto \alpha z + \beta$ fører ∞ over i ∞ og er iøvrigt en ligedannethedstransformation i $\mathbb{C}$. Heraf følger umiddelbart, at den er cirkeltro.
At homografien $z \mapsto \frac{1}{z}$ er cirkeltro følger af, at den tilsvarende afbildning af Riemann-kuglen S_2 på sig selv er en drejning på 180° om ξ-aksen.
At homografien $z \mapsto \frac{1}{z}$ er cirkeltro kan også indses direkte, uden at indblande Riemann-kuglen, for eksempel som følger:

1) Cirklen $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ føres over i cirklen $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| = \frac{1}{r}\}$.

2) Cirklen $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$, hvor $z_0 \neq 0$ og $r \neq |z_0|$, føres over i

$$\left\{ w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \;\middle|\; \frac{|w - \frac{1}{z_0}|}{|w|} = \frac{r}{|z_0|} \right\}.$$

Dette er forholdscirklen over punkterne $\frac{1}{z_0}$ og 0 svarende til forholdet $r/|z_0|$.

3) Cirklen $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = |z_0|\}$, hvor $z_0 \neq 0$ føres over i

$$\{\infty\} \cup \left\{ w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \,\middle|\, \frac{|w - \frac{1}{z_0}|}{|w|} = 1 \right\} .$$

Dette er en cirkel i $\mathbb{C}^*$ gennem ∞, nemlig

$$\{\infty\} \cup \{\text{midtnormalen til liniestykket } [0, \frac{1}{z_0}]\} .$$

4) Cirklen $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \arg z = \Theta\} \cup \{0, \infty\}$ gennem 0 og ∞ føres over i $\{w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \arg w = -\Theta\} \cup \{\infty, 0\}$, ligeledes en cirkel gennem 0 og ∞.

5) Cirklen $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \frac{|z-a|}{|z|} = 1\} \cup \{\infty\}$, hvor $a \neq 0$ (altså en cirkel gennem ∞, men ikke gennem 0), føres over i cirklen $\{w \in \mathbb{C} \mid |w - \frac{1}{a}| = \frac{1}{a}\}$.

□

Bemærk at en homografi ikke nødvendigvis fører centrum for en cirkel over i centrum for billedcirklen.

Sætning 24.4 (a) *En homografi, der ikke er identiteten, har enten ét eller to fikspunkter. En homografi, der har tre fikspunkter, er altså nødvendigvis identiteten.*

(b) *Hvis z_1, z_2, z_3 er tre indbyrdes forskellige punkter i $\mathbb{C}^*$, så findes der én og kun én homografi f, således at $f(z_1) = 0,\ f(z_2) = 1,\ f(z_3) = \infty$.*

(c) *Hvis $z_1 z_2, z_3$ er tre indbyrdes forskellige punkter i $\mathbb{C}^*$ og hvis $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ er tre indbyrdes forskellige punkter i $\mathbb{C}^*$, så findes der én og kun én homografi f, således at $f(z_1) = \zeta_1,\ f(z_2) = \zeta_2,\ f(z_3) = \zeta_3$.*

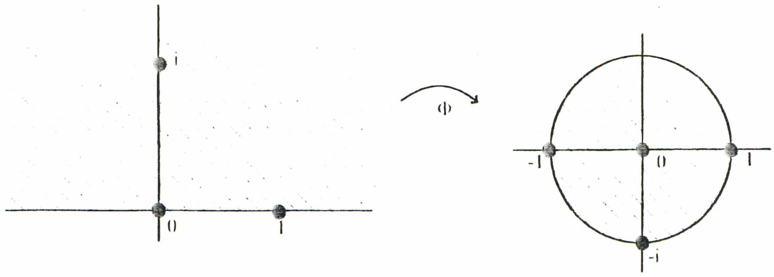
Beviserne, der er helt elementære, overlades til læseren.

Vi er nu i stand til at undersøge enhver foreliggende homografi med et minimum af regnerier ved hjælp af resultaterne i det foregående. Navnlig er vinkeltroskaben og cirkeltroskaben nyttige hjælpemidler. Lad os som eksempel kigge lidt på homografien

$$\Phi(z) = \frac{z - i}{z + \cancel{1}\,i}, \qquad z \in \mathbb{C}^* .$$

Af $\Phi(0) = -1,\ \Phi(1) = -i$ og $\Phi(\infty) = 1$ i forbindelse med cirkeltroskaben sluttes, at den reelle akse (tilføjet ∞) afbildes på cirklen gennem $-1, -i$ og 1, altså enhedscirklen $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1\}$.

Af $\Phi(i) = 0$ og $\Phi(-\overset{i}{\cancel{1}}) = \infty$ i forbindelse med, at Φ er en homeomorfi af $\mathbb{C}^*$ på $\mathbb{C}^*$ sluttes videre, at halvplanen $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ afbildes på $D(0; 1)$, og at halvplanen $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$ afbildes på $D(\infty; 1)$. Overvej!



Ved Φ er der altså givet en isomorfi af den øvre halvplan $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}z > 0\}$ på enhedscirkelskiven $D(0;1)$. Vi noterer os dette til senere brug.

Yderligere kendskab til Φ fås ved at betragte to ortogonale kurvesystemer i $\mathbb{C}^*$ og bestemme deres billeder. På grund af cirkeltroskaben benyttes kurvesystemer, der består af cirkler i $\mathbb{C}^*$ eller cirkelbuer i $\mathbb{C}^*$. Bestem for eksempel billederne ved Φ af følgende tre par af ortogonale kurvesystemer i $\mathbb{C}^*$:

(A) Halvlinierne udgående fra 0 (altså cirkelbuerne i $\mathbb{C}^*$ fra 0 til ∞) og cirklerne med centrum i 0.

(B) Linierne parallelle med den reelle akse og linierne parallelle med den imaginære akse. (Der er altså tale om to ortogonale cirkelbundter i $\mathbb{C}^*$, begge bestående af cirkler i $\mathbb{C}^*$ gennem ∞).

(C) Halvlinierne udgående fra $-i$ (altså cirkelbuerne i $\mathbb{C}^*$ fra $-i$ til ∞) og cirklerne med centrum i $-i$.

Tegn figurer!!

25 Automorfigrupperne for $\mathbb{C}$, $D(0;1)$, $\{\mathrm{Im}z > 0\}$og $\mathbb{C}^*$.

En isomorfi af et område $\Omega \subseteqq \mathbb{C}$ på sig selv kaldes en **automorfi i Ω**. Automorfierne i Ω udgør en transformationsgruppe over Ω. Den kaldes **automorfigruppen for Ω** og betegnes i disse noter med $\mathcal{G}(\Omega)$.

Sætning 25.1 *Automorfigruppen for den komplekse plan $\mathbb{C}$ består netop af de lineære transformationer*

$$f(z) = az + b, \qquad z \in \mathbb{C}, \ (a, b \in \mathbb{C}, \ a \neq 0)\ .$$

Enhver automorfi i $\mathbb{C}$ er altså en ligedannethedstransformation.

Bevis: En lineær transformation er klart en automorfi i $\mathbb{C}$. Lad omvendt $f \in \mathcal{G}(\mathbb{C})$. f er så holomorf i hele $\mathbb{C}$ og har altså en isoleret singularitet i ∞. Af

$$f(D'(\infty;1)) \subset f(\mathbb{C} \setminus D(0;1)) = \mathbb{C} \setminus f(D(0;1))$$

i forbindelse med, at $f(D(0;1))$ er et område, ses, at $f(D'(\infty;1))$ ikke er en overalt tæt punktmængde i $\mathbb{C}$. f har derfor ikke en væsentlig isoleret singularitet i ∞. f har heller ikke en hævelig singularitet i ∞, idet dette ville medføre, at f var konstant (Liouvilles Sætning). f har altså pol i ∞ og er derfor et polynomium af grad ≥ 1. Da f er en automorfi i $\mathbb{C}$, har f ét og kun ét nulpunkt $z_0 \in \mathbb{C}$, og dette nulpunkt er simpelt (da $f'(z_0) \neq 0$). f er følgelig et førstegradspolynomium. □

Til at bestemme automorfigruppen $\mathcal{G}(D(0;1))$ får vi brug for nedenstående - også i andre forbindelser nyttige - Sætning.

Sætning 25.2 *(Schwarz's Lemma)*.
Lad $f\colon D(0;1) \to D(0;1)$ være holomorf og lad $f(0) = 0$.
Da gælder da

1° $|f(z)| \leq |z|$ *for alle* $z \in D(0;1)$, *og* $|f'(0)| \leq 1$.

2° *Hvis der findes et $z_0 \in D'(0;1)$, således at $|f(z_0)| = |z_0|$, eller hvis $|f'(0)| = 1$, så er f af formen*

$$f(z) = az, \qquad z \in D(0;1), \ (a \in \mathbb{C}, \ |a| = 1);$$

f er altså en drejning om 0.

Bevis: Funktionen

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{for } z \in D'(0;1), \\ f'(0) & \text{for } z = 0, \end{cases}$$

er holomorf i $D(0;1)$. Lad $|z| < r < 1$. Ifølge Maximumprincippet har vi

$$|g(z)| \leq \max_{|\zeta|=r} |g(\zeta)| = \max_{|\zeta|=r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|} < \frac{1}{r}.$$

Lader vi $r \to 1$, får vi

$$|g(z)| \leq 1 \text{ for alle } z \in D(0;1),$$

hvoraf 1° følger.

Hvis der findes et $z_0 \in D'(0;1)$ så $|f(z_0)| = |z_0|$, eller hvis $|f'(0)| = 1$, så har vi $|g(z_0)| = 1$ eller $|g(0)| = 1$. I begge tilfælde har $|g|$ et maximum i $D(0;1)$, hvilket medfører, at g er konstant i $D(0;1)$. Altså $g(z) = a$ for alle $z \in D(0;1)$, hvor $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$. Heraf følger 2°. □

Sætning 25.3 *Hvis f er en automorfi i $D(0;1)$, således at $f(0) = 0$, så er f af formen*

$$f(z) = az, \qquad z \in D(0;1), \ (a \in \mathbb{C}, \ |a| = 1);$$

f er altså en drejning om 0.

Bevis: Schwartz's Lemma, anvendt på både f og f^{-1}, giver

(1) $$|f(z)| \leq |z| \qquad \text{for alle } z \in D(0;1)\,;$$

(2) $$|f^{-1}(w)| \leq |w| \qquad \text{for alle } w \in D(0;1)\,.$$

Sættes $w = f(z)$ i 2, fås

(3) $$|z| \leq |f(z)| \qquad \text{for alle } z \in D(0;1)\,.$$

Af (1) og (3) følger $|f(z)| = |z|$ for alle $z \in D(0;1)$, og Sætning 25.3 følger nu af 2° i Schwartz' Lemma. □

Sætning 25.4 *Automorfigruppen for enhedscirkelskiven $D(0;1)$ består netop af de homografier, der kan skrives på formen*

(4) $$f(z) = a\,\frac{z - z_0}{-\bar{z}_0 z + 1}, \qquad z \in D(0;1),$$

hvor $|a| = 1$ og $|z_0| < 1$.

Bevis: Lad f være en homografi af typen (4). Af

$$|f(e^{i\theta})| = |a|\,\frac{|e^{i\theta} - z_0|}{|e^{i\theta}|\,|e^{-i\theta} - \bar{z}_0|} = 1 \qquad \text{for alle } \theta \in \mathbb{R},$$

fremgår, at f afbilder cirklen $\{|z| = 1\}$ på sig selv. Af $|f(0)| < 1$ sluttes videre, at $f(D(0;1)) = D(0;1)$. (Vi benytter, at f er en homeomorfi af $\mathbb{C}^*$ på $\mathbb{C}^*$). f er altså en automorfi i $D(0;1)$.

Lad omvendt f være en automorfi i $D(0;1)$. Inspireret af, hvad vi ønsker at vise, sætter vi $f^{-1}(0) = z_0$ (så er $|z_0| < 1$ og $f(z_0) = 0$) og betragter homografien

$$g(z) = \frac{z - z_0}{-\bar{z}_0 z + 1}, \qquad z \in D(0;1),$$

der ifølge det lige viste er en automorfi i $D(0;1)$. Der gælder $g(z_0) = 0$ og derfor $g^{-1}(0) = z_0$. Afbildningen $h = f \circ g^{-1}$ er også en automorfi i $D(0;1)$, og $h(0) = 0$. Ifølge Sætning 25.3 er h af formen $h(z) = az$, hvor $|a| = 1$. Af $f = h \circ g$ følger så, at f er en homografi af typen (4). □

Bestemmelse af $\mathcal{G}(\{\mathrm{Im}z > 0\})$ føres tilbage til bestemmelsen af $\mathcal{G}(D(0;1))$ ved hjælp af følgende

Sætning 25.5 *Lad Ω og Ω' være områder i $\mathbb{C}$ og lad φ være en isomorfi af Ω på Ω'. Afbildningen*

$$f \in \mathcal{G}(\Omega) \longmapsto \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{G}(\Omega')$$

er en gruppeisomorfi af $\mathcal{G}(\Omega)$ på $\mathcal{G}(\Omega')$.

Beviset overlades til læseren.

Betragt nu den øverst side 133 omtalte isomorfi $\Phi\colon \{\operatorname{Im} z > 0\} \to D(0;1)$. Ifølge Sætning 25.5 består $\mathcal{G}(\{\operatorname{Im} z > 0\})$ netop af afbildningerne $\Phi^{-1} \circ f \circ \Phi$, hvor $f \in \mathcal{G}(D(0;1))$. Vi ser, at enhver automorfi i $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ er en homografi, og vi slutter, at $\mathcal{G}(\{\operatorname{Im} z > 0\})$ netop består af de homografier, der afbilder $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ på sig selv, altså af de homografier g, der afbilder $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ på sig selv, og for hvilke $\operatorname{Im} g(i) > 0$. Heraf følger let

Sætning 25.6 *Automorfigruppen for den øvre halvplan* $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ *består netop af de homografier, der kan skrives på formlen*

$$g(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad z \in \{\operatorname{Im} z > 0\},$$

hvor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *og* $ad - bc > 0$.

Definition: *Ved en automorfi i* $\mathbb{C}^*$ *forstås en bijektiv og meromorf afbildning af* $\mathbb{C}^*$ *på sig selv.* Automorfierne i $\mathbb{C}^*$ udgør en transformationsgruppe over $\mathbb{C}^*$, hvilket let eftervises direkte, men iøvrigt fremgår af

Sætning 25.7 *Automorfierne i* $\mathbb{C}^*$ *er netop de homografiske transformationer.*

Bevis: (kortfattet). Lad f være en automorfi i $\mathbb{C}^*$. Ifølge Sætning 23.1 er f en rational funktion. Da f er en automorfi i $\mathbb{C}^*$, har f præcis ét nulpunkt i $\mathbb{C}^*$, og dette nulpunkt er simpelt. Analogt har f præcis én pol i $\mathbb{C}^*$, og denne pol er simpel. Heraf følger, at f er en homografi. □

26 Riemanns Afbildningssætning.

Ethvert område Ω, der er isomorft med en åben cirkelskive, er enkeltsammenhængende og $\neq \mathbb{C}$ (jvf. Sætning 18.1, side 109). Uden bevis anføres, at der omvendt gælder

Sætning 26.1 *(Riemanns Afbildningssætning).*
Ethvert enkeltsammenhængende område $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$ *er isomorft (=konformt ækvivalent) med den åbne cirkelskive* $D(0;1)$.

Ved beviset benyttes kun, at området $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$ har den egenskab, at enhver funktion $f(z)$, der er holomorf og uden nulpunkter i Ω, har en holomorf $\log f(z)$ i Ω. Med sætning 26.1 (i forbindelse med Sætning 18.1) er altså Sætning 13.2, side 77 fuldtud bevist.

Opgaver

Opgave 91.
Betragt en rational funktion $\frac{P(z)}{Q(z)}$, hvor $P(z)$ og $Q(z)$ er polynomier med komplekse koefficienter og uden fælles rødder. Lad $n = \operatorname{grad} Q(z) > 0$ og antag, at $Q(z)$ har n forskellige rødder $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Lad $\operatorname{grad} P(z) < \operatorname{grad} Q(z)$.
Gør rede for, f.eks. ved anvendelse af sidste halvdel af Sætning 14.2, side 86, at partialbrøkfremstillingen af $\frac{P(z)}{Q(z)}$ er

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{P(z_j)}{Q'(z_j)} \cdot \frac{1}{z - z_j} .$$

Find partialbrøkfremstillingen af $\frac{1}{z^4-1}$.

Opgave 92.
Find partialbrøkfremstillingen af den rationale funktion

$$f(z) = \frac{z^6 + 2z + 92}{z^4 - 2z^3 + 5z^2 - 8z + 4} .$$

Opgave 93.
Gør rede for, at tg er en isomorfi af området $\mathcal{P} = \{x+iy \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ -\infty < y < +\infty\}$ på området $\mathbb{C} \setminus \{u + iv \in \mathbb{C} \mid u = 0,\ |v| \geq 1\}$. Angiv billedet ved tg af liniestykkerne i $\mathcal{P}$ parallelle med x-aksen og linierne i $\mathcal{P}$ parallelle med y-aksen.
Konstruer Riemann-fladen for arctg og gør rede for, at den er uendelig-bladet med to forgreningspunkter, der begge er af samme art som logaritmefladens forgreningspunkt.

Opgave 94.
Betragt området

$$\Omega = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid |x| < \frac{\pi}{4},\ -\infty < y < +\infty\} .$$

Lad $f\colon \Omega \to D(0;1)$ være holomorf og lad $f(0) = 0$. Vis, at der gælder

$$|f(iy)| \leq \frac{e^{2|y|} - 1}{e^{2|y|} + 1} \qquad \text{for alle } y \in \mathbb{R} .$$

Vejledning: tg er en isomorfi af Ω på $D(0;1)$.

Opgave 95.
Lad $D = D(0;1)$. Lad $g\colon D \to \mathbb{C}$ og $h\colon D \to \mathbb{C}$ være holomorfe og injektive. Lad $g(0) = h(0)$ og $g(D) \subsetneqq h(D)$. Vis, at $|g'(0)| \leq |h'(0)|$. Vis yderligere, at $|g'(0)| = |h'(0)|$ når og kun når $g(D) = h(D)$.

Opgave 96.
Lad Ω og Ω' være områder i $\mathbb{C}$. Lad $H(\Omega)$ være ringen af holomorfe funktioner i Ω. Lad $H(\Omega')$ være ringen af holomorfe funktioner i Ω'. Lad φ være en isomorfi af Ω på Ω'. Vis, at afbildningen

$$f \in H(\Omega) \longmapsto f \circ \varphi^{-1} \in H(\Omega')$$

er en ringisomorfi af $H(\Omega)$ på $H(\Omega')$.

Opgave 97.
Udnyt Sætning 25.1 til at give et andet bevis for Sætning 25.7.

Opgave 98.
Lad h være kontinuert i $\bar{D}(0;1)$ og holomorf i $D(0;1)$. Lad $|h(z)| \leq 1$ for $|z| = 1$. Vis, at hvis $a_1, a_2, \ldots, a_n \in D'(0;1)$, er nulpunkter for h, så gælder der

$$|h(0)| \leq |a_1 a_2 \ldots a_n|,$$

og at lighedstegn indtræffer, når og kun når h er af formen

$$h(z) = b \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z},$$

hvor $b \in \mathbb{C}$, $|b| = 1$.
Lad f være en funktion som i Opgave 51, side 81. Gør rede for, at

$$|f(0)| \leq \tfrac{1}{81} \max_{|z|=3} |f(z)|,$$

og at der findes et f forskellig fra nulfunktionen, således at lighedstegn indtræffer.

Opgave 99.
Lad Ω være et område i $\mathbb{C}$ og lad $z_0 \in \Omega$. Vis, at der findes højst én isomorfi $f\colon \Omega \to D(0;1)$, således at $f(z_0) = 0$ og $f'(z_0)$ er reel og positiv.