

Det Naturvidenskabelige Fakultet		Vinter 01/02
NATURVIDENSKABELIG KANDIDATEKSAMEN		
1. del		
Kompleks funktionsteori		
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden):		3
Eksamensdag:		Torsdag den 17. januar 2002 kl. 09-13
Eksamenslokale:		Trøjborg, lokale 139, Niels Juelsgade 84, 8200 Århus N
Tilladte medbragte hjælpemidler:		
Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger og notater)		
Materiale der udleveres til eksaminanden:		

OPGAVETEKSTEN BEGYNDER PÅ

NÆSTE SIDE

Besvarelsenerne ønskes afleveret på de til renskrivning beregnede ark. Kun når særlige omstændigheder taler herfor, kan kladden afleveres. De dele af denne, som ønskes taget i betragtning, må da være tydeligt afmærkede.

Kompleks funktionsteori

Eksamen vinteren 2001-2001

Opgave 1.

1) Vis at funktionen

$$f(z) = \tan z$$

er analytisk i hele den komplekse plan på nær simple poler i $\frac{\pi}{2} + p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$

2) Vis at $\operatorname{Re}(\cos z) > 0$ for $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}$

3) Find en stamfunktion til $f(z)$ i $\{z \mid -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}\}$

4) Lad $z_1 = \frac{\pi}{3}$, $z_2 = \frac{\pi}{4}$

og lad C være halvcirklen fra z_1 til z_2 givet ved

$$C(\varphi) = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi}{24}e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi$$

Find

$$\int_C f(z) dz$$

Opgave 2.

Lad $f(z)$ være funktionen defineret ved

$$f(z) = \frac{(z^2 + 2)e^{iz}}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)}$$

1) Find polerne af $f(z)$ og vis at de er simple

2) Find residuerne af $f(z)$ i hver af polerne i den øvre halvplan $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$

3) Lad C_R være halvcirklen med parameterfremstilling

$$C_R(z) = Re^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi$$

Vis at

$$\int_{C_R} f(z) dz \rightarrow 0 \text{ for } R \rightarrow \infty$$

4) Udregn

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 2) \cos x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$$

Opgave 3.

Lad

$$f(z) = e^{-z} + z^2 - 5z + 6$$

Lad C være cirklen med centrum $\frac{5}{2}$ og radius $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$C = \left\{ z \left| \left| z - \frac{5}{2} \right|^2 = \frac{3}{4} \right. \right\}$$

Vis at $f(z)$ har netop to nulpunkter, regnet med multiplicitet, indenfor C .
Vink: Benyt Rouché's sætning.

Opgave 4.

Lad $f(z)$ være analytisk på cirkelskiven

$$D(0, 1 + \varepsilon) = \{z \mid |z| < 1 + \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0,$$

$$f(z) \neq 0 \text{ på cirklen } \{z \mid |z| = 1\}$$

og antag at $f(z)$ har nulpunkterne $z_1, \dots, z_n$ i $D(0, 1)$, $|z_i| < 1$ for $i \geq 1, \dots, n$, hvor et nulpunkt af orden k gentages k gange. Lad

$$F(z) = f(z) \frac{1 - \bar{z}_1 z}{z - z_1} \cdot \frac{1 - \bar{z}_2 z}{z - z_2} \dots \frac{1 - \bar{z}_n z}{z - z_n}.$$

- 1) Vis at $F(z)$ er analytisk på $D(0, 1 + \varepsilon)$ og $F(z) \neq 0$ på afslutningen $\bar{D}(0, 1)$ af $D(0, 1)$.
- 2) Lad $\log F(z)$ være den analytiske funktion defineret for z i en omegn af $\bar{D}(0, 1)$ ved

$$\log F(z) = \ln |F(0)| + \int_0^z \frac{F'(t)}{F(t)} dt,$$

hvor $\ln x$ betegner den naturlige logaritme af x , $0 < x < \infty$.

Vis at

$$\log F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log F(e^{i\theta}) d\theta$$

- 3) Vis at

$$\ln |F(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |F(e^{i\theta})| d\theta$$

- 4) Vis at for $|z| = 1$ gælder

$$\left| \frac{1 - \bar{z}_j z}{z - z_j} \right| = 1, \quad j = 1, \dots, n$$

- 5) Vis at

$$\ln \left| f(0) \frac{1}{z_1} \dots \frac{1}{z_n} \right| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(e^{i\theta})| d\theta$$

Naturvidenskabelige Kandidateksamen. 1. del. Vinteren 1998/99.
Kompleks Funktionsteori.

Opgave 1. 09

Lad $\Omega = \{x + iy \in \mathbf{C} \mid |x| < 1, y \in \mathbf{R}\}$, og lad $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ være analytisk. Antag, at $f(it) = i \arctan t$ for alle $t \in \mathbf{R}$.

(a) Vis, at

$$f'(z) = \frac{1}{1 - z^2}$$

for alle $z \in \Omega$.

(Vink: vis først, ved hjælp af Cauchy–Riemann ligningerne, at resultatet gælder for $z = it$, $t \in \mathbf{R}$.)

(b) Udregn integralet

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{1 - z^2},$$

hvor kurven $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ er givet ved $\gamma(t) = \frac{1}{2}(1 - t^2) + it$ for $t \in [-1, 1]$.

(c) Udregn integralet

$$\int_{\delta} \frac{dz}{1 - z^2},$$

hvor kurven $\delta : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ er givet ved $\delta(t) = 2(1 - t^2) + it$ for $t \in [-1, 1]$.

Opgave 2. 10

Lad $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$, og lad $f : D \rightarrow \mathbf{C}$ være en analytisk funktion.

(a) Lad funktionen $M : [0, 1) \rightarrow [0, \infty)$ være givet ved

$$M(t) = \sup_{|z|=t} |f(z)|.$$

Vis, at $M(s) \leq M(t)$ når $s \leq t$, $s, t \in [0, 1)$.

(b) Lad $0 < a < 1$, og antag, at a og $-a$ er nulpunkter for f , begge af orden to.

Vis, at der findes en analytisk funktion $g : D \rightarrow \mathbf{C}$ således, at

$$f(z) = (z^2 - a^2)^2 g(z)$$

for alle $z \in D$.

(c) Lad $s < t$, $a < t < 1$. Vis, at

$$M(s) \leq \left(\frac{s^2 + a^2}{t^2 - a^2} \right)^2 M(t).$$

(Vink: anvend (a) på g .)

Opgavesættet fortsættes!

Opgave 3. A7

Sæt

$$f(z) = \frac{z}{(z-2)(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{3})(z+3)}.$$

- (a) Gør rede for, at f definerer en analytisk funktion på $\mathbf{C} \setminus \{-3, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2\}$.
 (b) Beregn residuerne for f ved punkterne $-\frac{1}{3}$ og $\frac{1}{2}$.
 (c) Beregn

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(4 \cos \theta - 5)(3 \cos \theta + 5)}.$$

(Vink: vis, at $3iI = \int_{\gamma} f(z) dz$, hvor $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{C}$ er kurven givet ved $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.)

Opgave 4. A8

- (a) Lad p være polynomiet $p(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$, med $a_i \in \mathbf{C}$, $i = 0, \dots, n$. Lad $0 \leq k \leq n$ og $R > 0$, og antag, at

$$|a_k|R^k > \sum_{i \neq k} |a_i|R^i.$$

Vis, at p har præcis k nulpunkter (talt med multiplicitet) i cirkelskiven $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| < R\}$.

(Vink: anvend Rouché's sætning.)

- (b) Vis, at ligningen

$$z^4 + 9z^3 + 13z^2 + z + 1 = 0$$

har præcis eet nulpunkt i området $\{z \in \mathbf{C} \mid 1 < |z| < 2\}$. Gør rede for, at dette nulpunkt er reelt.

Naturvidenskabelige Kandidateksamen. 1. del. Sommeren 1999.
Kompleks Funktionsteori.

Opgave 1. 89

- (a) Gør rede for, at $z \mapsto (\operatorname{Log}(z+i))/(z^2+1)$ definerer en meromorf funktion f på $\mathbf{C} \setminus L$, hvor $L = \{z \in \mathbf{C} \mid z = x-i, x \in (-\infty, 0]\}$.
- (b) Gør rede for, at i er den eneste singularitet for f i den øvre halvplan, og at den er en simpel pol. Vis, at $\operatorname{res}(f, i) = \frac{\pi}{4} - i\frac{\log 2}{2}$.
- (c) Lad γ_r være en lukket kurve, som gennemløber først intervallet fra $-r$ til r på den reelle akse, og derefter halvcirklen i den øvre halvplan (med centrum 0) fra r til $-r$. Ved at betragte $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r}$, vis, at

$$\int_0^\infty \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1} dx = \pi \log 2.$$

Opgave 2. 810

Lad $b, c \in \mathbf{C}$, hvor $|b| < 1$, og skriv $D(r)$ for den lukkede cirkelskive med centrum 0 og radius r .

- (a) Lad z ligge på randen af $D(r)$, hvor $r \geq |c|/(1-|b|)$. Vis, at $bz+c \in D(r)$.

Lad nu $a, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}$, hvor $|\beta| < 1$. Lad f være en analytisk funktion på $\mathbf{C}$ som tilfredsstiller

$$f(z) = af(bz+c) + \alpha f(\beta z + \gamma) \quad (*)$$

for alle $z \in \mathbf{C}$.

- (b) Vis, at hvis $|a| + |\alpha| < 1$, så er f identisk 0.
(Vink: vælg z således, at $|f(z)|$ er maksimumsværdien for $|f|$ på $D(r)$, for r tilstrækkelig stor.)
- (c) Vis, at f er et polynomium.
(Vink: differentier $(*)$ et passende antal gange.)

Opgavesættet fortsættes!

Opgave 3. 8/10

Lad $D \subset \mathbf{C}$ være en sammenhængende åben mængde, og $f, g : D \rightarrow \mathbf{C}$ analytiske funktioner. Antag, at der findes en følge $z_1, z_2, \dots$ i D , som har et grænsepunkt i D , således, at

$$f'(z_k)g(z_k) = f(z_k)g'(z_k) \text{ for } k = 1, 2, \dots$$

- (a) Gør rede for, at $f'(z)g(z) = f(z)g'(z)$ for alle $z \in D$.
- (b) Gør rede for, at der findes $a, b \in \mathbf{C}$ således, at $ag(z) = bf(z)$ for alle $z \in D$.

Opgave 4. A9

- (a) Lad $a, b \in \mathbf{C}$ være således, at $|a - b| < |a| + |b|$. Vis, at $b \neq 0$, og at $a/b \in \mathbf{C} \setminus (-\infty, 0]$.
- (b) Lad γ være en lukket kurve i $\mathbf{C} \setminus (-\infty, 0]$. Vis, at $\omega(\gamma, 0) = 0$.
- (c) Vis følgende skarpere form af Rouchés sætning:

Antag, at f og g er analytiske funktioner defineret på en åben mængde D , som indeholder en simpel lukket kurve γ , og alle punkter i det indre af γ . Hvis

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

for alle z i billedet af γ , så har f og g lige mange nulpunkter i det indre af γ , talt med multiplicitet.

(Vink: betragt *beviset* for Rouchés sætning.)

**Naturvidenskabelige Kandidateksamen. 1. del. Vinteren 1999–2000.
Kompleks Funktionsteori.**

Opgave 1. *A13*

- (a) Lad f være funktionen givet ved

$$f(z) = \frac{e^{az}}{\cosh z},$$

hvor a er et komplekst tal med $-1 < \operatorname{Re} a < 1$. Angiv singulariteterne for f , og beregn residuerne for f i disse punkter.

- (b) Vis, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh x} dx = \frac{\pi}{\cos(\frac{a\pi}{2})}.$$

(Vink: lad X, Y være store, positive reelle tal, og integrer f langs randen af rektanglet med hjørnerne $X, X + i\pi, -Y + i\pi, -Y$.)

- (c) Angiv værdierne af

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\cosh x} \quad \text{og} \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\cosh x} dx.$$

Opgave 2. *810*

- (a) Lad $a \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, og lad $\mathbf{C}_{\arg a} = \{z \in \mathbf{C} : z \neq 0, \arg z \neq \arg a\}$. Vis, at $w - a \in \mathbf{C}_{\arg a}$ for alle $w \in \mathbf{C}$ med $|w| < |a|$.

Lad nu Ω være en begrænset åben delmængde af $\mathbf{C}$, med en simpel løkke som rand. Antag, at funktionen f er meromorf i Ω og analytisk i en åben mængde som indeholder randen $\partial\Omega$. Lad $M = \sup_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$; og vælg $a \in \mathbf{C}$ med $|a| > M$.

- (b) Gør rede for, at $z \mapsto \log_{\arg a}(f(z) - a)$ er analytisk i en omegn af $\partial\Omega$.
(c) Vis, at f antager værdien a lige så mange gange som f har poler i Ω , når der tælles med multiplicitet.

(Vink: anvend argument-princippet.)

Opgavesættet fortsættes!

Opgave 3. 8/4

Lad $\Omega = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z| < 1\}$, og lad $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ være analytisk.

- (a) Vis, at hvis f har en pol af orden m i 0, så har f^2 en pol af orden $2m$ i 0.

Antag nu, at f har en simpel pol i 0. Lad r og s være residuerne i 0 af henholdsvis f og $z \mapsto f(z)/z$.

- (b) Vis, at $\lim_{z \rightarrow 0}(f(z) - r/z)$ findes, og er s .
 (c) Vis, at residuet af f^2 i 0 er $2rs$.
 (d) Lad γ være en simpel løkke i Ω , med 0 i sit indre. Vis, at

$$i\pi \int_{\gamma} f^2(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz \cdot \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z} dz.$$

Opgave 4. 8/11

Lad $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$. For $a \in D$, lad ϕ_a være funktionen givet ved

$$\phi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

- (a) Vis, at $\phi_{-a}(\phi_a(z)) = z$ for alle $z \in D$.
 (b) Lad $f : D \rightarrow D$ være en analytisk afbildning. Gør rede for, at funktionen g defineret ved $g = \phi_{f(a)} \circ f \circ \phi_{-a}$ også er en analytisk afbildning $D \rightarrow D$.
 Vis, at

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = \left(\frac{1 - |a|^2}{1 - |f(a)|^2} \right) f'(a).$$

- (c) Vis, at

$$\left| \frac{f(z) - f(a)}{1 - \overline{f(a)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \text{ for alle } z \in D;$$

og at

$$|f'(a)| \leq \frac{1 - |f(a)|^2}{1 - |a|^2}.$$

(Vink: anvend Schwarz's lemma.)

Naturvidenskabelige Kandidateksamen. 1. del. Sommeren 2000.
Kompleks Funktionsteori.

Opgave 1. 89

(a) Lad P være den polynomiale funktion givet ved

$$P(z) = 8z^{11} + z^9 - z^7 + z^4 + z^3 - z^2 - z + 1.$$

Vis, at alle nulpunkter for P ligger i cirkelskiven $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$.

(Vink: anvend Rouchés sætning.)

Lad nu $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ være funktionen givet ved

$$f(z) = \frac{z^{10} - 4z^7 + z - 3}{P(z)};$$

og lad $\gamma_R : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ være kurven givet ved $\gamma_R(t) = Re^{2\pi it}$, $0 \leq t \leq 1$.

(b) Vis, at $\int_{\gamma_R} f \rightarrow \frac{i\pi}{4}$ når $R \rightarrow \infty$.

(c) Vis, at $\int_{\gamma_1} f = \frac{i\pi}{4}$.

(Vink: vis, at $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_R} f$ for $R \geq 1$.)

Opgave 2. 011

Delopgaverne A og B er uafhængige.

A Lad $f, g : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ være analytiske funktioner. Antag, at der findes $k \in \mathbf{R}$ således, at $\operatorname{Re}(f(z)) \leq k \operatorname{Re}(g(z))$ for alle $z \in \mathbf{C}$. Vis, at der findes $c \in \mathbf{C}$ således, at $f(z) = k g(z) + c$ for alle $z \in \mathbf{C}$.

(Vink: betragt $e^{f(z)-k g(z)}$.)

B Lad f være en analytisk funktion med en væsentlig isoleret singularitet i z_0 . Lad g være analytisk og ikke identisk nul i en omegn af z_0 . Vis, at produkt-funktionen $z \mapsto f(z)g(z)$ har en væsentlig isoleret singularitet i z_0 .

Opgavesættet fortsættes!

Opgave 3 A10

Skriv $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ og $H = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.

(a) Vis, at Möbius-transformationen

$$\phi(z) = i \frac{1+z}{1-z}$$

afbilder D på H .

(b) Lad $f : H \rightarrow D$ være en analytisk funktion med $f(i) = 0$. Vis, at

$$|f'(i)| \leq 1/2, \quad |f(2i)| \leq 1/3.$$

(Vink: anvend Schwarz' lemma på $f \circ \phi$.)

(c) Angiv en analytisk funktion $g : H \rightarrow D$ således, at $g(i) = 0$ og $g'(i) = 1/2$.

Opgave 4. 013

Lad a, b være positive reelle tal, med $a > b$.

(a) Lad

$$f(z) = \frac{z}{(a^2 - b^2)z^4 + 2(a^2 + b^2)z^2 + a^2 - b^2}.$$

Vis, at $\pm i\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ er de eneste singulære punkter for f i enhedscirkelskiven $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$, og beregn residuerne for f i disse punkter.

(b) Beregn integralet

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}.$$

(Vink: betragt $\int_\gamma f$, hvor γ gennemløber cirklen med centrum 0, radius 1.)

Naturvidenskabelige Kandidateksamen. 1. del. Vinteren 2000–01.
Kompleks Funktionsteori.

Opgave 1. 012

Lad

$$f(z) = \frac{1 + iz - e^{iz}}{z^3} \quad \text{for } z \neq 0.$$

- (a) Find Laurenttrækken for f omkring 0. Angiv residuet $\text{res}(f, 0)$ for f i 0.
(b) Lad H_r være halvcirklen med centrum 0 og radius r i den øvre halvplan.
Vis, at

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{H_r} f = i\pi \text{res}(f, 0), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{H_r} f = 0.$$

- (c) Beregn

$$\int_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^3} dx.$$

Opgave 2. 012

Lad $f_k(z) = e^z - 3z^k$ for $k = 1, 2, \dots$

- (a) Vis, at $\overline{f_k(z)} = f_k(\bar{z})$ for alle $z \in \mathbf{C}$.
(b) Vis, at alle nulpunkter for f_k er af orden 1.
Lad Ω være det åbne kvadrat $\{z \in \mathbf{C} \mid |\text{re}(z)| < 1, |\text{im}(z)| < 1\}$.
(c) Vis, at f_k har præcis k nulpunkter i Ω .
(Vink: anvend Rouchés sætning.)
(d) Hvis k er ulige, vis, at mindst et af nulpunkterne for f_k i Ω er reelt.

Opgavesættet fortsættes!

Opgave 3. All

Lad D betegne cirkelskiven $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$. Lad $f : D \rightarrow D$ være en analytisk funktion med $f(0) = 0$, og definer $g : D \rightarrow \mathbf{C}$ ved

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)+f(-z)}{2z} & \text{for } z \in D \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{for } z = 0. \end{cases}$$

- (a) Vis, at g er analytisk, og at $g'(0) = \frac{1}{2}f''(0)$.
(Vink: anvend Taylorrækken for f omkring 0.)
- (b) Vis, at $g(D) \subset D$.
(Vink: anvend Schwarz' lemma på f .)
- (c) Vis, at $|f(z) + f(-z)| \leq 2|z|^2$ for alle $z \in D$, og at $|f''(0)| \leq 2$.

Opgave 4.

- (a) Lad x, y være reelle tal. Vis, at

$$|\cos(x + iy)| \leq \frac{1}{2} (e^y + e^{-y}).$$

Betragt nu rækken

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{4n} \cos\left(\frac{1}{nz}\right).$$

- (b) Lad r, R være reelle, med $0 < r \leq R < 1$. Vis, at rækken konvergerer uniformt på $\{z \in \mathbf{C} : r \leq |z| \leq R\}$.
- (c) Vis, at sum-funktionen $z \rightarrow f(z)$ er analytisk på $\{z \in \mathbf{C} : 0 < |z| < 1\}$.
(Vink: anvend Weierstrass-sætningen om konvergens af følger uniformt på kompakte mængder.)
- (d) Vis, at $f(\frac{1}{m}) \rightarrow 0$ og $f(\frac{i}{m}) \rightarrow \infty$ når $m \rightarrow \infty$. Konkluder, at 0 er en væsentlig isoleret singularitet for f .

Naturvidenskabelige Kandidateksamen. 1. del. Sommeren 2001.
Kompleks Funktionsteori.

Opgave 1. 8/3

Vis, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x+x^2)^2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Der lægges vægt på, at de enkelte skridt i udregningen fremtræder klart.

Opgave 2. 8/2

Delopgaverne A og B er uafhængige.

A Lad $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ være en funktion således, at $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}$ for alle positive hele tal n . Vis, at f ikke er analytisk.

(Vink: anvend identitetssætningen.)

B Lad $g : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ være en analytisk funktion således, at $g(0) = 4 - 3i$ og $|g(z)| \leq 5$ for $|z| < 1$. Vis, at g er konstant.

Opgavesættet fortsættes!

Opgave 3. A12

Lad D betegne cirkelskiven $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$; lad $a \in D$.

- (a) Gør rede for, at der findes en automorfi ϕ af D således, at $\phi(0) = a$.

Lad nu $f : D \rightarrow D$ være en analytisk funktion med $f(a) = a$. Antag også, at der findes $b \in D \setminus \{a\}$ således, at $f(b) = b$.

- (b) Definer $g : D \rightarrow D$ ved $g = \phi^{-1} \circ f \circ \phi$. Gør rede for, at $g(0) = 0$ og $g(\phi^{-1}(b)) = \phi^{-1}(b)$. Konkluder, ved hjælp af Schwarz's lemma, at $g(z) = z$ for alle $z \in D$.
- (c) Vis, at $f(z) = z$ for alle $z \in D$.

Opgave 4. A13

Lad $\Omega = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 1\}$.

- (a) Lad $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ være en lukket kurve. Gør rede for, at γ har samme omløbstal omkring alle punkter af $\mathbf{C} \setminus \Omega$.
- (b) Lad $z_1, \dots, z_k$ være k forskellige punkter i $\mathbf{C} \setminus \Omega$, og lad $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbf{C}$. Definer

$$f(z) = \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{z - z_i}.$$

Vis, at f har en stamfunktion i Ω hvis, og kun hvis, $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$.